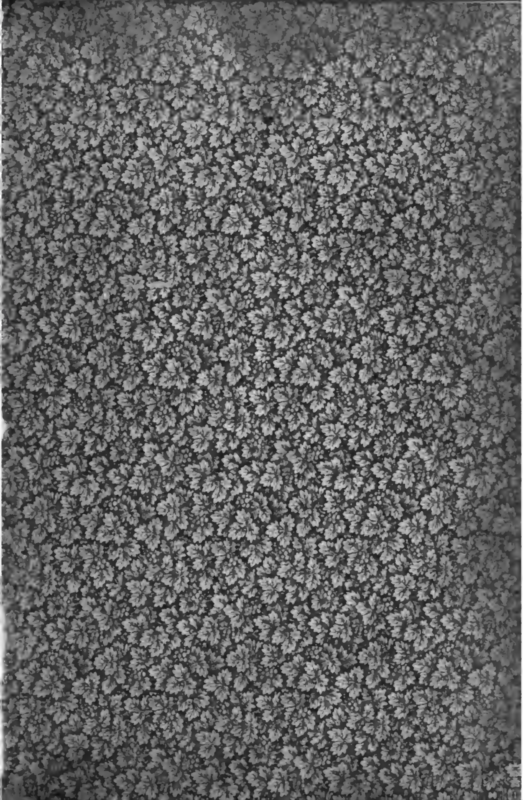






TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL.



GAND, IMP. DE C. ANNOOT-BRAECKMAN.



TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL,

PAR

A. TIMMERMANS,

Chevalier de l'ordre de Léopold, professeur à la faculté des sciences de l'université de Gand, membre de l'académie royale des sciences et des lettres de Belgique, de la société impériale des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, etc.

DEUXIÈME ÉDITION.

BRUXELLES,
Chez A. DECQ, Libraire, rue de la Madeleine, 9.

GAND,
Chez H. HOSTE, Libraire, rue des Champs, 45.

1860.







PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

En composant cet ouvrage, l'auteur n'avait pas l'intention de publier un traité complet d'analyse infinitésimale, qui aurait dépassé de beaucoup les limites qu'il s'était imposées. Rédigé à l'occasion du cours de calcul différentiel et intégral dont il est chargé à la faculté des sciences de l'Université de Gand et distribué aux élèves depuis 1838 en feuilles autographiées, il n'embrassait d'abord que les matières indiquées au programme des examens de l'École du Génie Civil, peu différent de celui de l'École Polytechnique de France, que les fondateurs de nos écoles spéciales s'étaient fait un devoir de prendre pour guide et pour modèle; mais depuis, l'auteur a cru nécessaire dans l'intérêt

des jeunes gens qui se destinent au doctorat en sciences mathématiques ou qui se proposent d'approfondir l'étude des sciences exactes, de comprendre dans son traité certaines théories jugées jusqu'ici par la plupart des auteurs comme trop abstraites ou d'une application trop restreinte pour pouvoir entrer dans le cadre de l'enseignement. De ce nombre sont l'intégration des fonctions elliptiques, le théorème de Fourier sur les intégrales doubles, l'extension de la méthode des variations aux intégrales multiples, etc. Des simplifications notables dans plusieurs de ces théories et une exposition plus élémentaire des principes fondamentaux du calcul des variations, lui ont permis de faire ces additions sans que son ouvrage perdit le caractère classique qu'il tenait à lui conserver.

De cette manière la plupart des théories importantes du calcul intégral ou des branches qui s'y rattachent, ont été passées en revue, et comme on a eu soin de disposer les matières de manière à permettre de faire des coupures sans nuire à l'enchaînement, ces additions n'ont pas rendu l'étude de ce livre plus difficile pour ceux qui veulent se borner aux éléments.

Le mode d'exposition du calcul infinitésimal que l'on a adopté, est celui indiqué par Landen et Dalembert, et qui est fondé sur la considération des limites. Cette méthode a sur sa rivale, la méthode des infiniment petits, l'immense avantage de la rigueur et de l'exactitude qui manquent complètement à l'autre, puisque la première n'applique les règles de l'arithmétique et de l'algèbre qu'à des quantités finies et par conséquent saisissables à l'esprit, tandis que l'autre admet gratuitement, que ces mêmes règles sont encore vraies quand on considère des quantités sans grandeur appréciable, et qui, par conséquent, échappent à nos sens et à notre intelligence.

On a donc cherché à déduire du seul principe des limites, d'une manière méthodique et uniforme, toutes les propositions

fondamentales du calcul différentiel ; mais l'ancienne méthode de Leibnitz présente de trop grands avantages sous le rapport de la brièveté et de la simplicité, pour qu'on ait cru pouvoir s'abstenir de la faire connaître ; c'est pourquoi la plupart des démonstrations un peu importantes sont doubles, l'une destinée à convaincre l'esprit, et l'autre, à le soulager et à mieux se graver dans la mémoire. Il arrive même quelquefois, lorsque la réduction aux limites ne présente aucune difficulté, que l'on s'est borné à une démonstration par les infiniment petits, à laquelle le lecteur pourra toujours rendre par la pensée la forme plus rigoureuse adoptée pour les autres démonstrations.

Indépendamment des avantages incontestables que présente sous le rapport de la brièveté, l'emploi des infiniment petits, il existe un autre motif pour ne pas s'attacher exclusivement aux limites et pour faire marcher en quelque sorte de front les deux méthodes. Le calcul intégral, sous la forme que les géomètres lui ont laissée jusqu'ici, a essentiellement pour objet la considération des quantités infiniment petites : il est donc nécessaire que l'élève se rende familières ces quantités abstraites, avant d'aborder la seconde partie du traité.

Il est vrai qu'il serait facile de faire disparaître du calcul intégral les infiniment petits ou différentielles en partant de ce théorème fondamental, *qu'une intégrale représente le produit de la valeur moyenne de la dérivée par la différence entre les valeurs extrêmes de la variable.* Cette innovation très logique aurait l'avantage d'introduire de l'uniformité dans le traité et de combler la lacune que présente la théorie des limites, au passage du calcul direct infinitésimal, au calcul inverse ; mais comme elle exigerait un changement total dans les dénominations et dans les notations, sans un avantage réel autre que celui que nous venons de signaler, on a cru préférable de ne pas s'écarter des anciens errements, laissant aux géomètres qui font autorité dans la science, le soin de décider

de l'opportunité de cette réforme et d'en prendre l'initiative.

Un grand nombre de démonstrations sont présentées sous une forme un peu abrégée et des lecteurs trouveront peut-être que quelques développements de calcul n'auraient pas été superflus. Ce laconisme tient à l'usage auquel ce traité était destiné avant qu'il ne reçût une publicité complète, et une expérience de seize années à laquelle il a été soumis a prouvé surabondamment que les détails de calcul qui ne sont pas indispensables, ne font que fatiguer les yeux et l'esprit et nuisent à l'enchaînement des raisonnements. Du reste on ose croire que jamais ces formes abrégées n'ont été employées là où il y avait quelque difficulté à résoudre et le but de l'auteur aura été atteint si, comme il l'espère, il n'a omis que des détails auxquels une lecture attentive pourra facilement suppléer et s'il est parvenu à rendre moins ardue et moins pénible l'étude des hautes sciences aux jeunes gens d'élite qui se préparent à subir les épreuves difficiles du doctorat ou qui veulent embrasser les carrières du génie civil et de l'enseignement.

TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.

Des fonctions. Fonctions algébriques et transcendantes. — Représentation géométrique des équations. Variable dépendante et indépendante. Fonctions implicites et explicites, continues et discontinues. — Limite du rapport de l'accroissement d'une fonction à l'accroissement de la variable. Fonction dérivée. — Signification géométrique d'une fonction dérivée. — Signification analytique d'une fonction dérivée. — Infiniment petits et infiniment grands des différents ordres. Différentielles. — Fonctions croissantes et décroissantes. — Différentiation et dérivation des fonctions. — Dérivation des fonctions de fonctions. — Dérivation d'une fonction de plusieurs fonctions. Dérivée partielle et dérivée totale. — Dérivée d'une variable par rapport à une autre variable, lorsqu'elles sont exprimées toutes deux en fonction d'une troisième. — Dérivée du produit de plusieurs fonctions. — Dérivée du quotient de deux fonctions. — Calcul des dérivées. Dérivée de $\log x$. — Dérivée de $\sin x$. — Dérivée de x^m. — Dérivée de la fonction exponentielle a^x. — Dérivées des fonctions trigonométriques. — Dérivation des fonctions compliquées. — Dérivation des fonctions imaginaires. — Dérivation des fonctions implicites. Équation dérivée. — Dérivées des ordres supérieurs des fonctions explicites. — Dérivées successives d'une fonction de fonction. — Dérivees successives, les deux variables étant données en fonction d'une troisième. — Dérivées successives des fonctions implicites. Équations dérivées successives. — Différentielles successives d'une fonction implicite. — Changement de la variable indépendante.

1. *Des fonctions. Fonctions algébriques et transcendantes.* — Une quantité est dite *fonction d'une autre quantité*, lorsqu'elle est liée à la seconde de telle manière qu'un changement arbitraire dans la valeur de l'une entraîne nécessairement un changement dans la valeur de l'autre,

et on appelle *fonction*, l'expression analytique de la loi qui lie ces deux quantités; ainsi, dans les équations

$$y = ax^2 + \frac{b}{x}, \quad y = \sin x, \quad y = \log(a - x),$$

y est fonction de x ou x est fonction de y, et les expressions

$$ax^2 + \frac{b}{x}, \quad \sin x, \quad \log(a - x)$$

sont des fonctions de x. Si l'on avait

$$z = xy + y^2 - a^2,$$

le second membre et par conséquent z seraient des fonctions de x et de y. Dans l'équation

$$xy + xz + yz - 1 = 0,$$

z est encore fonction de x et de y puisqu'on peut concevoir cette équation résolue par rapport à z.

Parmi les quantités qui entrent dans une fonction, les unes ont une valeur fixe et invariable, quoique arbitraire, et prennent pour cette raison le nom de *constantes;* les autres n'ont pas de valeur déterminée et sont susceptibles de passer par une suite continue de grandeurs. Elles prennent pour ce motif le nom de *variables*. On convient ordinairement d'employer les premières lettres de l'alphabet pour représenter les constantes et de réserver les dernières pour représenter les variables.

Pour indiquer une fonction d'une ou plusieurs variables x, y, z, etc., on emploie les notations f, F, ψ, φ, f', F', etc.; ainsi Fx représente une fonction de x dont la forme peut être connue ou inconnue et Fy représente une fonction composée en y de la même manière que Fx l'est en x. De même $\varphi(x, y)$ indique une certaine fonction de x et de y. Si u représentait une fonction de x, φu représenterait une certaine fonction de u et serait par conséquent une *fonction de fonction* de x.

Les fonctions se divisent en *fonctions algébriques* et en *fonctions transcendantes;* les premières sont celles où les variables ne sont liées qu'au moyen des signes indiquant les six opérations fondamentales de l'arithmétique; ainsi

$$\frac{5ax^2 - \dfrac{3b^4}{x}}{\sqrt{4a^2x^2 - 6bx^3 + c^4}}$$

est une fonction algébrique. Les secondes sont celles où les variables se trouvent liées de toute autre manière. Une fonction contenant des termes de la forme a^x, $\log x$, $\sin x$, $\tang x$ est donc transcendante.

Les fonctions algébriques se divisent aussi en fonctions *irrationnelles* et *rationnelles*, suivant qu'elles contiennent ou ne contiennent pas de radical.

Les fonctions transcendantes se divisent en fonctions *exponentielles*, *logarithmiques* et *circulaires* ou *trigonométriques*, suivant qu'elles renferment des quantités exponentielles de la forme a^x ou des quantités telles que $\log x$, ou des quantités trigonométriques, comme $\tang x$, $\sin (a - x)$ etc.

2. *Représentation géométrique des équations. Variable dépendante et indépendante. Fonctions implicites et explicites, continues et discontinues.* — Une équation quelconque entre deux variables x, y peut, en général, être considérée comme représentant une certaine courbe dont la forme dépend essentiellement de la forme de l'équation; car $f(x, y) = 0$ étant l'équation donnée, si on la conçoit résolue par rapport à y, il viendra $y = \varphi x$ et en donnant à x toutes les valeurs possibles tant positives que négatives, il est clair que l'on obtiendra pour y une suite de valeurs correspondant à chaque valeur attribuée à x. Considérons maintenant x et y comme étant les deux coordonnées rectangulaires d'un point rapporté à deux axes X et Y, et portons sur l'axe des X, à partir du point A (fig. 1) toutes les valeurs AP, AP′, AP″...., attribuées à x. En élevant les ordonnées PM, P′M′, P″M″.......... égales aux valeurs correspondantes de y, l'ensemble des points M, M′, M″........ constituera le plus souvent une courbe composée d'une ou plusieurs branches, liée intimement à l'équation $f(x, y) = 0$ et dont elle forme le *lieu géométrique*.

Cette construction par points, de la courbe, établit entre les deux variables une différence essentielle, puisque à l'une d'elles, x, on donne des valeurs arbitraires, tandis que les valeurs correspondantes de y s'obtiennent par la résolution de l'équation; c'est pourquoi on appelle x *variable indépendante* et y, *variable dépendante*. Si au lieu de résoudre l'équation par rapport à y, on la résolvait par rapport à x, les deux variables changeraient de rôle et de nom.

Dans les deux équations considérées plus haut,

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad y = \varphi x,$$

qui dérivent l'une de l'autre et expriment par conséquent des relations identiques entre x et y, la variable dépendante y entre d'une

manière toute différente. Dans $f(x, y) = 0$, la variable dépendante y est combinée avec la variable indépendante x et est dite pour ce motif *fonction implicite* de x; tandis que dans $y = \varphi x$, y se trouve exprimée au moyen de la variable indépendante x, et est dite *fonction explicite* de x.

Lorsque deux équations à deux variables

$$f(x, y) = 0 \quad F(x, y) = 0$$

ont lieu simultanément, c'est-à-dire, lorsque x et y ont la même signification de part et d'autre, les valeurs de ces deux quantités sont entièrement déterminées, si les deux équations sont distinctes, puisqu'elles suffisent pour déterminer deux inconnues. Leur ensemble représente par conséquent un ou plusieurs points, ce qui résulte aussi de ce que les coordonnées x, y ne peuvent appartenir qu'aux points d'intersection des deux courbes représentées par chacune des équations prises isolément.

Considérons maintenant une équation à trois variables,

$$f(x, y, z) = 0.$$

Elle représente en général une surface; en effet, admettons que x, y et z soient les trois coordonnées d'un point dans l'espace, rapporté à trois axes rectangulaires. En concevant l'équation résolue par rapport à z, il vient

$$z = \varphi(x, y);$$

si maintenant on prend un point quelconque dans le plan des XY et qu'on substitue dans l'équation précédente les valeurs de x et y qui correspondent à ce point, on en déduira la valeur de z, que l'on portera sur une ordonnée menée par le point parallèlement à l'axe des z, ce qui déterminera un point dans l'espace. En considérant successivement tous les points du plan des XY, il est clair que l'on fixera dans l'espace une suite de points dont l'ensemble donnera lieu en général à une surface, lieu géométrique de l'équation.

Les deux variables x et y, dont on dispose à volonté, se nomment pour ce motif *variables indépendantes*, et z dont la valeur est assujettie à satisfaire à l'équation et dépend des valeurs attribuées à x et y, se nomme *variable dépendante* et est fonction de x et y.

Si deux équations à trois variables

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

existent simultanément, le système de ces équations appartient à

l'intersection des deux surfaces représentées par chacune des équations et par conséquent à une courbe située dans l'espace; car x, y et z devant avoir la même valeur dans les deux équations, ne pourront appartenir qu'aux points communs à ces deux surfaces.

En éliminant successivement entre ces deux équations les variables x et y, elles pourront être mises sous la forme

$$\psi(x, z) = 0, \quad \psi'(y, z) = 0$$

et celles-ci tiendront lieu des deux précédentes. Quoiqu'elles ne contiennent, chacune, que deux variables, elles représentent encore des surfaces; mais celles-ci sont les cylindres formés par les perpendiculaires abaissées de tous les points de la courbe de l'espace sur le plan des XZ, pour la première, et des YZ pour la seconde; car la première équation exprime la relation qui existe entre x et z pour un point quelconque de la courbe de l'espace, et comme ces deux coordonnées sont les mêmes pour tous les points de la perpendiculaire abaissée sur le plan des XZ, cette relation subsistera pour tous les points de l'une quelconque de ces perpendiculaires, c'est-à-dire, pour le cylindre projetant. Il en est de même de la seconde équation. Il est à remarquer que, comme les points de la projection de la courbe dans le plan des XZ, appartiennent au cylindre projetant, l'équation

$$\psi(x, z) = 0$$

appartient aussi à cette projection, de même que l'équation

$$\psi'(y, z) = 0$$

représente la projection de la courbe sur le plan des XZ. On voit donc que la courbe représentée par le système des deux équations

$$\psi(x, z) = 0, \quad \psi'(y, z) = 0$$

se trouve donnée par deux de ses projections. Si l'on conçoit celles-ci mises sous la forme

$$x = \mathrm{F}z, \quad y = \mathrm{F}'z,$$

il est visible que l'on ne peut disposer que d'une seule variable z, à laquelle on est libre d'attribuer toutes les valeurs possibles et que les deux autres sont déterminées aussitôt que l'on a fixé la valeur de

la première. C'est pourquoi celle-ci est seule variable indépendante et les deux autres sont des variables dépendantes.

Si trois équations à trois variables existaient simultanément, leur ensemble ne pourrait représenter qu'un ou plusieurs points situés dans l'espace; en effet ces trois équations suffiraient pour déterminer les valeurs des trois coordonnées x, y et z, qui fixeraient la position d'un point dans l'espace, si ces valeurs étaient uniques, ou plusieurs points, si l'on trouvait pour x, y et z plusieurs valeurs réelles. On est conduit au même résultat en remarquant que le système des trois équations ne peut appartenir qu'à l'intersection des trois surfaces, intersection qui, en général, ne peut être qu'un point ou plusieurs points isolés.

Une fonction est dite *continue*, lorsqu'en faisant croître la variable indépendante d'une manière continue entre certaines limites, la fonction varie elle-même d'une manière continue, ou, en d'autres termes, lorsque pour des accroissements de la variable indépendante, moindres que toute grandeur assignable, la fonction éprouve elle-même des variations moindres que toute grandeur assignable. La plupart des fonctions sont dans ce cas et les courbes qu'elles représentent sont dites *courbes continues;* mais toutes les fonctions ne jouissent pas de cette propriété; elles sont dites alors *discontinues*, ainsi que la courbe ou plutôt le lieu géométrique correspondant, qui se compose alors de points et de portions de lignes isolés. Les principes du calcul différentiel, fondés essentiellement sur la continuité des fonctions, ne sont pas applicables en général à ces sortes de fonctions.

Souvent des fonctions dites continues présentent des discontinuités accidentelles qui se manifestent de différente manière dans la courbe qui en forme le lieu géométrique et donnent naissance à des points appelés *singuliers*. Cette circonstance se présente particulièrement lorsque la fonction devient brusquement infinie ou imaginaire pour une valeur déterminée et finie de la variable indépendante et sera l'objet d'un examen particulier.

3. *Limite du rapport de l'accroissement d'une fonction à l'accroissement de la variable. Fonction dérivée.* — Considérons maintenant une fonction explicite et continue quelconque

$$y = fx.$$

Concevons que x prenne un accroissement h; y ou la fonction fx prendra une nouvelle valeur y' telle que $y' = f(x+h)$; l'accroissement de y sera

$$y' - y = f(x+h) - fx$$

et le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable sera exprimée par

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}.$$

En représentant par les signes Δy et Δx les accroissements ou *les différences* de y et de x, on a donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-fx}{h}.$$

La valeur de ce rapport s'obtient facilement dans chaque cas particulier; ainsi si l'on fait

$$fx=x^4,$$

on trouve

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\frac{x^4+4hx^3+6h^2x^2+4h^3x+h^4-x^4}{h}=4x^3+6hx^2+4h^2x+h^3.$$

On voit par cet exemple, qu'en général, la valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dépend de x et de l'accroissement h ou Δx donné à cette variable. On voit aussi que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ approche d'autant plus d'être égal à $4x^3$, que l'accroissement h est plus petit, en sorte que $4x^3$ est la *limite vers laquelle tend sans cesse le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, lorsqu'on fait décroître h jusqu'à zéro.* $4x^3$ n'étant plus qu'une valeur particulière de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on indique cette circonstance en remplaçant la lettre Δ par la lettre d et on écrit

$$\frac{dy}{dx}=4x^3.$$

On trouve de même pour la fonction

$$y=a+bx-cx^3,$$

la limite suivante

$$\frac{dy}{dx}=b-3cx^2.$$

On voit par ce qui précède, que $\frac{dy}{dx}$ doit être considéré comme une

notation générale servant à représenter ce que devient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ à la limite, ou lorsqu'on fait Δx nul. La limite du rapport de l'accroissement d'une fonction à celui de sa variable se nomme *fonction dérivée*, par opposition à la fonction donnée qui prend le nom de *fonction primitive*.

4. *Signification géométrique d'une fonction dérivée.* — *Le calcul différentiel* a pour objet de trouver la fonction dérivée, pour toutes les formes de fonctions primitives et de rechercher les propriétés des dérivées. Avant de nous occuper de ces recherches, il est essentiel de démontrer que la valeur limite qui constitue la dérivée d'une fonction déterminée de x est *en général* elle-même une certaine fonction de x dont la forme dépend de celle de la fonction primitive et que par conséquent cette dérivée ne saurait avoir, pour toute valeur de x une valeur invariable telle que zéro ou l'infini ou une valeur indéterminée. Cette proposition peut se vérifier par des considérations géométriques très simples; en effet on a vu (N° 2) qu'une équation de la forme

$$y = fx$$

représente, si fx est continue, une certaine courbe d'une forme déterminée rapportée à deux axes et ayant (x, y) pour coordonnées de l'un quelconque de ses points. Soit donc BMC (fig. 2) cette courbe, AX, AY les deux axes que nous supposerons rectangulaires et M un point quelconque pris sur la courbe et ayant pour coordonnées x et y ou AP et PM. Si l'on donne à x un accroissement $PP' = h$ ou Δx, l'ordonnée deviendra M'P' ou P'N + NM', c'est-à-dire, y + NM', en sorte que NM' sera l'accroissement Δy de y correspondant à l'accroissement h de x; on aura donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{M'N}{MN} = \text{tang } M'MN = \text{tang } S,$$

à cause de la propriété du triangle rectangle M'MN et de l'égalité des angles M'MN et MSX ou S. On voit que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ représente, en général, la tangente trigonométrique de l'angle que fait la sécante MN' ou Ss avec l'axe des X. Si maintenant on suppose que h ou PP' diminue d'une manière continue, la sécante Ss pivotera autour du point M et se rapprochera de plus en plus de la touchante Tt à la courbe au point M, et elle se confondra avec cette touchante, ou, ce qui revient au même, l'angle S se confondra avec l'angle T, lorsque h sera

devenu zéro; d'où il suit que la limite $\frac{dy}{dx}$ de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ représente la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des X la touchante à la courbe au point M; or, il est clair que la valeur de cet angle change pour chaque point M, suivant une loi déterminée qui est une conséquence nécessaire de la forme de la courbe. La valeur de $\frac{dy}{dx}$ est donc une fonction de la variable x, et la forme de cette fonction dépend de celle de la fonction primitive fx.

5. *Signification analytique d'une fonction dérivée.* — La même proposition peut être démontrée par des considérations purement analytiques, comme il suit : divisons l'accroissement h de la variable x en un nombre n de parties égales représentées par i et faisons croître cette variable par intervalles égaux à i. La fonction deviendra successivement fx, $f(x+i)$, $f(x+2i)$........$f(x+ni)$ ou $f(x+h)$ et les rapports des accroissements successifs de la fonction à l'accroissement de la variable, rapports que nous désignerons par $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f(x+i)}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f(x+2i)}{\Delta x}$ ..... $\frac{\Delta f[x+(n-1)i]}{\Delta x}$, deviendront

$$\frac{f(x+i)-fx}{i}=\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

$$\frac{f[(x+i)+i]-f(x+i)}{i}=\frac{\Delta f(x+i)}{\Delta x}$$

$$\frac{f[(x+2i)+i]-f(x+2i)}{i}=\frac{\Delta f(x+2i)}{\Delta x}$$

. . . .

$$\frac{f[(x+(n-1)i)+i]-f[x+(n-1)i]}{i}=\frac{\Delta f[x+(n-1)i]}{\Delta x}.$$

Si on additionne ces équations membre à membre, en remarquant que le premier terme de chaque équation est détruit par le second terme de l'équation suivante, on trouve

$$\frac{f(x+ni)-fx}{i}=\frac{\Delta fx}{\Delta x}+\frac{\Delta f(x+i)}{\Delta x}+\frac{\Delta f(x+2i)}{\Delta x}\dots+\frac{\Delta f[x+(n-1)i]}{\Delta x}$$

ou bien, en divisant les deux membres par n et remplaçant ni par h,

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=\frac{1}{n}\left\{\frac{\Delta fx}{\Delta x}+\frac{\Delta f(x+i)}{\Delta x}+\frac{\Delta f(x+2i)}{\Delta x}\dots\frac{\Delta f[x+(n-1)i]}{\Delta x}\right\}.$$

Il est visible qu'en prenant n suffisamment grand, on pourra faire en sorte que ni conserve une grandeur finie donnée h, quoique i aille en décroissant indéfiniment, et le second membre représentera toujours la moyenne arithmétique des n valeurs par lesquelles passe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tandis que la variable passe d'une valeur x à une autre valeur $x+h$, par des accroissements successifs égaux i ou $\frac{h}{n}$. Si on suppose que i ait atteint la limite de ses décroissements, les différents termes du second membre seront les valeurs successives par lesquelles passe la fonction dérivée de fx, tandis que la variable croît d'une manière continue depuis une valeur x jusqu'à $x+h$. Or, si la dérivée n'était pas fonction de x ou était infinie pour toute valeur de x, cette dérivée ne changerait pas quand on change celle de x, c'est-à-dire, que les dérivées de fx, $f(x+i)$, $f(x+2i)$, $f(x+3i)$...... seraient toutes égales entre elles et indépendantes de x ou toutes infinies, ainsi que la moyenne arithmétique de ces quantités, résultat incompatible avec l'équation précédente; car le second membre serait indépendant de x ou infini, tandis que le premier contient évidemment cette variable, puisque $f(x+h)-fx$ est une fonction de x qui n'est pas infinie quand fx ne l'est pas.

Une seule fonction fait exception à cette règle; c'est celle qui est de la forme $ax+b$ dont la dérivée est constante et égale à a.

Comme la dérivée de fx est elle-même une fonction finie de x, nous la représenterons souvent par $f'x$.

Puisque les limites des quantités $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f(x+i)}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f(x+2i)}{\Delta x}$ sont les fonctions dérivées de fx, correspondant aux différentes valeurs x, $x+i$, $x+2i$........ par lesquelles passe la variable x en croissant jusqu'à $x+h$, il résulte de la valeur trouvée pour $\frac{f(x+h)-fx}{h}$ que *le rapport de l'accroissement d'une fonction à l'accroissement h de la variable est égal à la moyenne arithmétique des valeurs par lesquelles passe la fonction dérivée, tandis que la variable passe d'une valeur x à une valeur $x+h$ d'une manière continue.*

Il est à remarquer que la démonstration précédente et la conséquence qu'on vient d'en tirer, supposent essentiellement que fx et sa dérivée $f'x$ conservent des valeurs finies et réelles, c'est-à-dire, res-

tent continues entre les deux limites x et $x+h$; car des accroissements de fonctions qui deviennent infinies ou imaginaires et des moyennes entre les valeurs de ces fonctions n'auraient aucun sens saisissable. Cette condition de continuité peut être considérée comme remplie lorsqu'on n'assigne à x aucune valeur particulière, parce que l'on admet tacitement que l'on reste dans les limites où les fonctions fx et $f'x$ restent continues. Dans ce cas, si on désigne par h' et h'' les valeurs de l'accroissement h, qui font prendre à la dérivée $f'(x+h)$ la plus grande et la plus petite valeur par lesquelles elle passe, tandis que h croît depuis 0 jusqu'à h, il est évident que la valeur moyenne de la dérivée sera comprise entre $f'(x+h')$ et $f'(x+h'')$; or, s'il y a continuité dans la fonction dérivée, ce qu'on peut admettre quand on n'attribue pas à x une valeur particulière, il est visible que, tandis que h croît depuis h' jusqu'à h'', la fonction $f'(x+h)$ doit passer par toutes les valeurs comprises entre $f'(x+h')$ et $f'(x+h'')$; il y a donc une valeur de h comprise entre h' et h'' et conséquemment entre 0 et h, qui rend $f'(x+h)$ égal à cette moyenne, c'est-à-dire, qu'on aura, θ étant un certain coefficient compris entre 0 et 1,

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=f'(x+\theta h).$$

Cette équation qui doit jouer un grand rôle dans tout ce qui va suivre, ne donne pas la valeur exacte de $\frac{f(x+h)-fx}{h}$ mais fait connaître des limites entre lesquelles se trouve compris ce rapport. L'interprétation géométrique de cette valeur est très simple; elle exprime évidemment que si la courbe est continue entre les points M et M' (fig. 3) correspondants aux abscisses x et $x+h$ et si les inclinaisons des tangentes sur l'axe des X varient aussi d'une manière continue, la tangente NN' parallèle à la corde MM' aura son point de contact R placé entre M et M'; car si l'on fait $OP=x$ et $PP'=h$, $\frac{f(x+h)-fx}{h}$ sera la tangente de l'angle M'MS et on a vu (4) que $f'(x+\theta h)$ est la tangente trigonométrique de l'angle que forme avec l'axe des X, une touchante NN' à la courbe, en un point R correspondant à l'abscisse $x+\theta h$, c'est-à-dire, compris entre M et M'.

On tire de l'équation précédente la valeur de $f(x+h)$,

$$f(x+h)=fx+hf'(x+\theta h).$$

6. ***Infiniment petits et infiniment grands des différents ordres. Différentielles.*** — La considération des quantités infiniment petites conduit à une autre définition de la fonction dérivée. On appelle *infiniment petite* une quantité constamment décroissante jusqu'à devenir moindre que toute grandeur assignable sans changer de nature et qui par conséquent est négligeable devant une grandeur finie.

On appelle *infiniment petit du second, troisième ordre*, etc., toute quantité dont le rapport à un infiniment petit proprement dit est lui-même un infiniment petit du premier, du second ordre, etc. Ainsi, si ε et ε' sont infiniment petits, $\varepsilon\varepsilon'$, $\varepsilon^2\varepsilon'$ sont des infiniment petits du second et du troisième ordre, parce que $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon}$ et $\frac{\varepsilon^2\varepsilon'}{\varepsilon}$ sont égaux à ε' et à $\varepsilon\varepsilon'$ qui sont du premier et du second ordre.

De même qu'un infiniment petit du premier ordre est négligeable devant une quantité finie, de même un infiniment petit du second, troisième ordre etc. est négligeable devant un infiniment petit d'un ordre inférieur.

Une quantité *infiniment grande* ou *infinie* est une quantité constamment croissante jusqu'à devenir supérieure à toute grandeur assignable sans changer de nature. Si on la nomme *infini du premier ordre*, toute grandeur dont le rapport à celle-ci est lui-même infini, sera un infini du second ordre et ainsi de suite. Toute grandeur finie est négligeable devant une grandeur infinie et celle-ci est négligeable devant un infini d'un ordre plus élevé.

Cela posé, on a vu que si dans une fonction continue fx on fait prendre à la variable un accroissement infiniment petit Δx ou h, la fonction prend elle-même un accroissement infiniment petit Δy dont le rapport à Δx est donné par

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x + \theta h).$$

θh étant une quantité moindre que Δx ou h, est aussi infiniment petite, et il résulte du principe de continuité que $f'(x + \theta h)$ ne diffère de $f'x$ que d'un infiniment petit; on aura donc en le négligeant,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'x,$$

ou plutôt en désignant par dx et dy ces valeurs particulières de Δx et Δy,

$$\frac{dy}{dx} = f'x.$$

Au point de vue des limites où nous nous sommes d'abord placés, les quantités dx et dy sont rigoureusement nulles, et la fraction $\frac{dy}{dx}$, dont les parties ne peuvent être séparées et qu'il faut lire ainsi : dy sur dx, n'est qu'une notation servant à indiquer la valeur vers laquelle tend sans cesse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\frac{f(x+h)-fx}{h}$, à mesure que h diminue. Lorsqu'on adopte la théorie des infiniment petits, ainsi que l'ont fait les premiers géomètres qui se sont occupés du calcul différentiel, dy et dx cessent d'être de véritables zéros, mais sont des quantités infiniment petites appelées *différentielles*, sur lesquelles on peut effectuer toutes les opérations de l'algèbre et entre lesquelles il existe un rapport déterminé. A ce point de vue, $\frac{dy}{dx}$ est donc une véritable fraction représentant le rapport de l'accroissement d'une fonction à l'accroissement infiniment petit de la variable et on peut tirer de l'équation précédente,

$$dy = f'xdx.$$

La fonction dérivée $f'x$ est ici le coefficient par lequel il faut multiplier l'accroissement dx de la variable indépendante pour avoir l'accroissement dy de la fonction, ce qui a fait donner le nom de *coefficient différentiel* à la quantité désignée par *fonction dérivée* dans la théorie des limites.

Dans ce qui va suivre, nous nous servirons indifféremment de ces deux dénominations, et quoique l'on ait fait à la théorie des infiniment petits le reproche de manquer de rigueur, parce que $f'x$ n'est en apparence que la valeur approchée de $\frac{dy}{dx}$, cependant il nous arrivera souvent par la suite de faire usage de la considération des différentielles et d'écrire, par exemple, une équation sous la forme

$$dy = f'xdx;$$

mais dans ce cas, il faut toujours, par la pensée, la rétablir sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f'x$$

qui permet d'employer, pour démontrer une proposition, la considération plus rigoureuse des limites.

Une première conséquence de l'équation différentielle

$$dy = f'xdx$$

est que, si dx reste toujours positif, dy sera positif ou négatif avec $f'x$ c'est-à-dire, que si l'on conçoit que la variable x d'une fonction soit toujours croissante à partir d'une certaine valeur, la fonction sera elle-même *croissante* ou *décroissante* suivant que la fonction dérivée sera positive ou négative.

On voit aussi que si deux fonctions fx et Fx sont égales pour $x = a$ et que pour toute valeur croissante de x la dérivée $f'x$ reste inférieure à la dérivée $F'x$, la fonction $f(a+h)$ sera pour toute valeur positive de h inférieure à $F(a+h)$, puisque la fonction fx à partir de fa croîtra constamment plus lentement que Fx.

7. *Différentiation et dérivation des fonctions.* — On appelle *différentiation* ou *dérivation*, l'opération par laquelle on cherche la différentielle ou la derivée d'une fonction donnée. Avant de déterminer la valeur des dérivées pour les différentes formes de fonctions, nous démontrerons certaines propriétés générales communes à toutes les dérivées.

Soit une fonction y composée de plusieurs fonctions distinctes de la forme

$$y = fx + Fx - \varphi x.$$

Il est facile de voir *que la dérivée totale est égale à la somme des dérivées de chaque fonction prise avec son signe;* en effet, en donnant à x un accroissement h, y prend un accroissement Δy et il vient

$$y + \Delta y = f(x+h) + F(x+h) - \varphi(x+h);$$

mais, d'après ce qu'on a vu plus haut, on a

$$f(x+h) = fx + hf'(x+\theta h),$$

$$F(x+h) = Fx + hF'(x+\theta' h),$$

$$\varphi(x+h) = \varphi x + h\varphi'(x+\theta'' h);$$

il vient donc en substituant et en remarquant que y est égal à $fx + Fx - \varphi x$,

$$\Delta y = h[f'(x+\theta h) + F'(x+\theta' h) - \varphi'(x+\theta'' h)]$$

d'où l'on tire en divisant par h ou Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x + \theta h) + F'(x + \theta' h) - \varphi'(x + \theta'' h),$$

et en passant à la limite, c'est-à-dire, en faisant h égal à zéro, il vient

$$\frac{dy}{dx} = f'x + F'x - \varphi' x.$$

Si l'on emploie les infiniment petits, on conclut facilement de cette équation *que la différentielle d'une fonction composée de plusieurs fonctions partielles, est égale à la somme des différentielles de ces fonctions partielles prises avec leur signe;* car en multipliant par dx, on a

$$dy = f'xdx + F'xdx - \varphi' xdx,$$

et il est visible que $f'xdx$, $F'xdx$ et $\varphi' xdx$, sont les différentielles de fx, Fx et φx. Il suit de là que la dérivée de

$$y = a + fx$$

est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = f'x$$

qui est la même que si la constante a n'existait pas, car la dérivée du second membre est la somme des dérivées de chaque terme et le premier étant constant, son accroissement et par suite, sa dérivée, sont nuls. On voit par là que *deux fonctions qui ne diffèrent que par un terme constant, ont la même dérivée.*

Si l'on avait à différencier afx, a étant un coefficient constant, en donnant à x un accroissement h il viendrait

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{af(x+h) - afx}{h} = a\frac{f(x+h) - fx}{h},$$

et à la limite,

$$\frac{dy}{dx} = af'x$$

qui apprend que *la dérivée du produit d'une fonction par une constante est égale à la dérivée de cette fonction multipliée par la constante.*

8. *Dérivation des fonctions de fonctions.* — Il arrive souvent qu'une fonction y n'est pas exprimée immédiatement au moyen de la variable indépendante x, quoique y dépende de cette dernière. C'est ce qui arrive lorsque la relation entre y et x est établie au moyen du système des deux équations

$$y = fz, \quad z = \varphi x.$$

On dit alors que y représente une *fonction de fonction* de x. Il est visible qu'un accroissement donné à x en détermine également un dans z, à cause de la seconde équation, et cet accroissement de z en fait prendre un à la variable y par suite de la relation exprimée par la première; il doit donc exister une certaine dépendance entre Δy et Δx d'où dépend la valeur du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et par conséquent, de la valeur limite ou de la dérivée $\frac{dy}{dx}$; cependant la première équation différentiée ne donne que la valeur de $\frac{dy}{dz}$, la seconde fait connaître $\frac{dz}{dx}$; mais aucune des deux ne donne immédiatement $\frac{dy}{dx}$. Pour trouver cette dernière dérivée, il semble qu'il suffit de remplacer z par sa valeur φx dans la première équation, ce qui lui donnerait la forme

$$y = Fx$$

d'où on déduirait immédiatement la dérivée $\frac{dy}{dx}$; mais cette marche est souvent impraticable à cause de la complication des calculs; il importe donc de trouver sa valeur directement. Donnons à x un accroissement h dans la seconde équation; il vient

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \varphi'(x + \theta h),$$

$\varphi' x$ étant la dérivée de φx ou $\frac{dz}{dx}$ et θ une quantité comprise entre 0 et l'unité. La variable z ayant pris un accroissement Δz, déterminera dans fz ou y un accroissement Δy donné par l'équation

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = f'(z + \theta' \Delta z)$$

dans laquelle $f'z$ est la dérivée de fz, c'est-à-dire $\frac{dy}{dz}$, et θ' un facteur compris entre zéro et l'unité. En multipliant les deux équations précédentes membre à membre, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(z + \theta'\Delta z)\varphi'(x + \theta h)$$

équation qui, si l'on passe à la limite, devient

$$\frac{dy}{dx} = f'z \cdot \varphi'x = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx}$$

et nous apprend que *pour avoir la dérivée* $\frac{dy}{dx}$ *d'une fonction de fonction, il faut multiplier les dérivées des deux fonctions, prises chacune par rapport à la variable qu'elle contient.*

On serait arrivé à la même conclusion, mais d'une manière moins rigoureuse, par la considération des infiniment petits; en effet les deux équations différenciées donnent

$$dy = f'zdz, \quad dz = \varphi'xdx$$

et en multipliant membre à membre et supprimant le facteur commun dz, il vient comme plus haut,

$$dy = f'z \cdot \varphi'xdx \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = f'z \cdot \varphi'x = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}.$$

On démontrerait de la même manière que si l'on avait

$$y = fz, \quad z = \varphi u, \quad u = \mathrm{F}x,$$

il viendrait

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{du}\frac{du}{dx},$$

c'est-à-dire que la dérivée de la fonction y par rapport à la variable indépendante x, est donnée par le produit des dérivées de chaque fonction prises par rapport à la variable qu'elle contient.

Si l'on fait usage des différentielles ou des infiniment petits, on multipliera les deux membres par dx et on écrira ainsi :

$$dy = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{du}\frac{du}{dx}dx$$

dans laquelle dy est la différentielle de la fonction de fonction y, ou l'accroissement infiniment petit de y dû à un accroissement dx donné à x.

9. *Dérivation d'une fonction de plusieurs fonctions. Dérivée partielle et dérivée totale.* — Il peut aussi arriver que y, quoique dépendant indirectement d'une variable x, soit cependant donné en fonction de deux variables z et u représentant elles-mêmes des fonctions données de x, comme il arriverait si l'on avait à dériver le système des trois équations

$$y = f(z, u), \quad z = \mathrm{F}x, \quad u = \varphi x.$$

En remplaçant z et u par leur valeur dans la première, y serait exprimé immédiatement en fonction de x et la valeur de $\frac{dy}{dx}$ pourrait s'obtenir directement; mais on la trouve d'une manière ordinairement plus commode sans effectuer cette substitution. En donnant à x un accroissement h, z et u prennent, en vertu des deux dernières relations, des accroissements Δz et Δu, tels que l'on a

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \mathrm{F}'(x + \theta h), \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x + \theta' h),$$

$\mathrm{F}'x$ et $\varphi' x$ étant les dérivées de $\mathrm{F}x$ et φx, et θ, θ' deux facteurs inconnus compris entre 0 et 1. Si dans $f(z, u)$ on donne à z et u les accroissements Δz et Δu déterminés plus haut, y prendra l'accroissement Δy. Cette double opération peut se faire successivement, en donnant d'abord à z seul un accroissement Δz et en remplaçant ensuite u par $u + \Delta u$ dans le résultat. Or, la substitution de $z + \Delta z$ à z dans $f(z, u)$ fait prendre à cette fonction la forme suivante, d'après ce qu'on a vu (N° 5),

$$f(z, u) + \Delta z f_z'(z + \theta_1 \Delta z, u),$$

$f_z'(z, u)$ désignant la dérivée de $f(z, u)$ ou y, prise par rapport à z, c'est-à-dire en traitant z comme seule variable et u comme constant, dérivée qu'on désigne aussi par $\frac{dy}{dz}$; θ_1 est un facteur compris entre 0 et l'unité. Pour compléter ensuite l'accroissement de y, il faudra dans $f(z, u)$ et $f_z'(z + \theta_1 \Delta z, u)$ donner aux u l'accroissement Δu. La substitution de $u + \Delta u$ à u dans la première partie, $f(z, u)$, fait prendre à cette fonction, en vertu de ce qu'on a vu (N° 5), la valeur

$$f(z, u) + \Delta u f_u'(z, u + \theta_1' \Delta u)$$

en désignant, comme plus haut, par $f_u'(z, u)$ la dérivée de $f(z, u)$ prise par rapport à la seule variable u, c'est-à-dire, en considérant u comme variable et z comme constant, dérivée que l'on désigne aussi par $\frac{dy}{du}$. Quant à la seconde partie $f_z'(z + \theta_1\Delta z, u)$, puisque fu devient $fu + \Delta u f'(u + \theta\Delta u)$, ce second terme prend la forme

$$f_z'(z + \theta_1\Delta z, u) + \mathrm{U}\Delta u$$

quand u a pris l'accroissement Δu. Après cette double substitution, la fonction $f(z, u) = y$ devient

$$y + \Delta y = f(z, u) + \Delta u f_u'(z, u + \theta_1'\Delta u) + \Delta z f_z'(z + \theta_1\Delta z, u) + \mathrm{U}\Delta z\Delta u.$$

Si on supprime y et $f(z, u)$ qui sont égaux, qu'on divise ensuite les deux membres par Δx et qu'on remplace $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ par leur valeur trouvée plus haut, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x + \theta' h)\, f_u'(z, u + \theta_1'\Delta u) + \mathrm{F}'(x + \theta h)\, f_z'(z + \theta_1\Delta z, u)$$

$$+ \mathrm{U}\varphi'(x + \theta' h)\mathrm{F}'(x + \theta h)\Delta x,$$

puis passant à la limite et remarquant que h ou Δx, Δu et Δz sont nuls en même temps, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}'x f_z'(z, u) + \varphi' x f_u'(z, u),$$

formule que l'on peut écrire de cette manière :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \cdots\cdots \quad (1).$$

Cette dérivée de $f(z, u)$ se compose de deux parties; la première est, d'après ce qu'on a vu (N° 8), la dérivée de $f(z, u)$ prise par rapport à x, z étant considéré comme fonction de x et u comme constant. La seconde partie est la dérivée prise en considérant u comme fonction de x, z restant constant. Chacune de ces parties se nomme *dérivée partielle* de la fonction de fonctions, et les deux parties réunies forment la *dérivée totale*. Si l'on avait à dériver le système des quatre équations

$$y = f(z, u, v), \quad z = \mathrm{F}x, \quad u = \varphi x, \quad v = \psi x,$$

on démontrerait de la même manière, que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}\;\ldots\ldots(2)$$

ce que l'on exprime d'une manière générale, en disant que la *dérivée totale d'une fonction de fonctions est égale à la somme de ses dérivées partielles.*

En considérant dy et dx comme des quantités infiniment petites, on peut écrire l'équation précédente comme il suit :

$$dy=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}dx+\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}dx+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}dx.$$

Les différents termes du second membre forment les *différentielles partielles* de la fonction $f(z, u, v)$ prises en considérant successivement z, u, v comme fonctions de x; on voit donc que la *différentielle totale d'une fonction de plusienrs fonctions de x est égale à la somme des différentielles partielles relatives à chaque fonction.*

La différentielle de $f(x, u)$, dans laquelle u est une fonction de la variable indépendante x, se déduit de l'équation ci-dessus, en faisant z égal à x; $\frac{dz}{dx}$ est alors égal à l'unité et on trouve

$$dy=\frac{dy}{dx}dx+\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}dx$$

dans laquelle $\frac{dy}{dx}$ du second membre représente la dérivée partielle de $f(x, u)$ prise par rapport à la seule variable x. Pour remonter de cette équation différentielle à l'équation dérivée, on devrait diviser par dx les deux membres de l'équation précédente et écrire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{du}\frac{du}{dx};$$

or, sous cette forme, il y a ambiguité sur la signification de $\frac{dy}{dx}$; car dans le premier membre, il représente la dérivée de y, en y faisant varier tous les x, y compris ceux contenus dans u; tandis que le second n'est que la dérivée de y par rapport aux x contenus explicitement dans la fonction $f(x, u)$, en y regardant u comme constant.

Pour distinguer ces deux quantités essentiellement différentes, nous écrirons la dérivée totale sous la forme $\frac{1}{dx}dy$ au lieu de $\frac{dy}{dx}$, ou bien nous laisserons l'équation sous la forme différentielle et alors dy représentera la différentielle totale de y.

10. *Dérivée d'une variable par rapport à une autre variable, lorsqu'elles sont exprimées toutes deux en fonction d'une troisième.* — Quelquefois les variables x et y, au lieu d'entrer dans une même équation, sont données toutes deux en fonction d'une troisième variable t, de sorte que l'on a

$$y = ft, \quad x = \mathrm{F}t$$

et aucune des deux équations ne peut donner la dérivée de y par rapport à x ou $\frac{dy}{dx}$, quoiqu'il soit visible que y est fonction de x. Pour trouver cette dérivée sans effectuer l'élimination de t entre les deux équations, donnons à celle-ci un accroissement h ou Δt et désignons par Δy et Δx les accroissements correspondants de y et de x. Il viendra

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(t + \theta h), \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mathrm{F}'(t + \theta' h)$$

et en divisant membre à membre,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(t + \theta h)}{\mathrm{F}'(t + \theta' h)}.$$

Si l'on passe à la limite en faisant h nul, les accroissements Δy et Δx s'annulent en même temps et on trouve la valeur suivante de la dérivée cherchée :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f't}{\mathrm{F}'t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

11. *Dérivée du produit de plusieurs fonctions.* — Lorsqu'une fonction y, est formée du produit de plusieurs fonctions de x, telles que u, v, w, z....., c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$y = u.v.w.z,$$

la dérivée de y peut être exprimée fort simplement au moyen des dérivées des fonctions simples u, v, w.....; en effet, on a vu (N° 9) que la dérivée totale d'une fonction de plusieurs fonctions u, v, w..... est égale à la somme des dérivées partielles que l'on obtient en considérant successivement chaque fonction comme variant seule; or si l'on ne fait varier que les x contenus dans u, la dérivée partielle de y est

$$v.w.z\frac{du}{dx}.$$

En faisant varier successivement les x contenus dans v, w, z, on trouve

$$u.w.z\frac{dv}{dx},\quad u.v.z\frac{dw}{dx},\quad u.v.w\frac{dz}{dx}.$$

et la dérivée totale de y devient

$$\frac{dy}{dx}=v.w.z\frac{du}{dx}+u.w.z\frac{dv}{dx}+u.v.z\frac{dw}{dx}+u.v.w\frac{dz}{dx}.$$

On voit par là que *la dérivée du produit de plusieurs fonctions est égale à la somme des produits des dérivées de chaque fonction simple, multipliées respectivement par toutes les autres fonctions.*

12. *Dérivée du quotient de deux fonctions.* — Si la fonction y est le quotient de la division de deux fonctions u et v de x, c'est-à-dire, si l'on a

$$y=\frac{u}{v},$$

on trouve aussi une expression très simple de la dérivée; en effet, en représentant par Δu, Δv, Δy les accroissements de u, v, y correspondant à un accroissement Δx donné à x, il vient

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v^2+v\Delta v},$$

d'où l'on tire en divisant les deux membres par Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Si l'on passe à la limite, en remarquant que lorsque Δx s'évanouit, Δy, Δu et Δv s'évanouissent en même temps, il vient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

c'est-à-dire, que *la dérivée du rapport de deux fonctions est égale à la dérivée du numérateur multipliée par le dénominateur moins la dérivée du dénominateur multipliée par le numérateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.*

En adoptant les infiniment petits, on peut multiplier les deux membres de l'équation par dx et écrire celle-ci de cette manière :

$$dy=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Remarquons que, si deux fonctions fy et Fx sont telles que l'on ait $fy=Fx$, y est une variable dépendante de x et les dérivées de ces deux fonctions par rapport à x sont égales entre elles, car quel que soit l'accroissement donné à x, les accroissements des deux fonctions seront, par hypothèse, égaux entre eux, ainsi que leurs rapports à Δx, lesquels seront les deux dérivées, lorsqu'on passera à la limite. La dérivée de Fx par rapport à x peut être représentée par $F'x$; quant à celle de fy dans laquelle y est une fonction de x, on a vu (N° 8) qu'elle est représentée par $f'y\frac{dy}{dx}$, $f'y$ étant la dérivée de fy prise par rapport à y; on a donc

$$f'y\frac{dy}{dx}=F'x,\quad \text{d'où}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{F'x}{f'y}.$$

13. *Calcul des dérivées. Dérivée de Log x.* — Les dérivées de toutes les fonctions s'obtiennent facilement lorsqu'on connait les dérivées des fonctions de la forme Log x et sin x; nous commencerons donc par nous occuper de ces deux là.

Considérons en premier lieu la fonction logarithmique Log x, x étant positif. En donnant à la variable indépendante x un accroissement h, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{Log}\,(x+h)-\text{Log}\,x}{h}$$

que l'on peut transformer, en se fondant sur les propriétés des logarithmes, de la manière suivante :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Log}\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\text{Log}\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\text{Log}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}.$$

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ serait connue si l'on connaissait la limite de $\text{Log}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$ quand h s'évanouit ou quand $\frac{x}{h}$ devient infini; or si l'on fait $\frac{x}{h}$ égal à p, p sera ou un nombre entier, ou un nombre fractionnaire, ou un nombre incommensurable; on peut donc généralement considérer p comme étant compris entre deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$ et comme $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$ est évidemment compris entre $\left(1+\frac{1}{p}\right)^n$ et $\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n+1}$, la limite de $\text{Log}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$ sera aussi comprise entre les valeurs limites de $\text{Log}\left(1+\frac{1}{p}\right)^n$ et de $\text{Log}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n+1}$.

Puisque n et $n+1$ sont des nombres entiers, on a, en développant au moyen de la formule du binôme de Newton,

$$\text{Log}\left(1+\frac{1}{p}\right)^n = \text{Log}\left\{1+\frac{n}{p}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{p^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{p^3}+\text{etc.}\right.$$

$$= \text{Log}\left\{1+\frac{n}{p}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{n^2}{2p^2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\frac{n^3}{3p^3}\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)\frac{n^4}{4p^4}+\text{etc.}\right\}.$$

On a de même

$$\text{Log}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n+1} = \text{Log}\left\{\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)^n\right\} = \text{Log}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

$$+\ \text{Log}\left\{1+\frac{n}{p}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{n^2}{2p^2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\frac{n^3}{3p^3}\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)\frac{n^4}{4p^4}+\text{etc.}\right\}.$$

Pour avoir la limite de ces deux développements ou pour déterminer ce qu'ils deviennent quand h s'évanouit, remarquons que puisque $\frac{x}{h} = p$, p converge vers l'infini quand h converge vers zéro, et par conséquent $\frac{1}{p}$ devient nul. De même, puisque p diffère de n de moins d'une unité, cette dernière quantité devient infinie en même temps que p, et $\frac{1}{n}$ est nul. Enfin $\frac{n}{p}$ approche d'autant plus de l'unité, que n et p sont plus grands et l'unité est la limite de ce rapport; les deux développements précédents deviennent donc à la limite

$$\text{Log}\left\{1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right\}$$

et par conséquent $\log\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p$, qui reste toujours compris entre eux, se réduit aussi à cette même valeur; on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\text{Log}\left\{1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right\}.$$

La quantité comprise entre parenthèse, quoique composée d'un nombre illimité de termes, a une valeur finie, puisqu'elle est visiblement inférieure à la somme des termes de la progression géométrique décroissante

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots$$

qui est elle-même finie et égale à 3. Cette somme est donc comprise entre 2 et 3. Elle peut du reste être évaluée en nombre avec une exactitude aussi grande que l'on voudra, parce que les termes décroissent très rapidement. En représentant ce nombre par e, on trouve

$$e = 2,71828\ldots\ldots, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\text{Log}\, e.$$

Si l'on fait usage des différentielles, cette équation s'écrit de cette manière

$$dy = \frac{dx}{x}\text{Log}\, e.$$

Telle est donc la valeur de la différentielle de Log x, qui subsiste quand x est négatif ainsi qu'on le reconnaît en reprenant les raisonnements précédents. On le reconnait encore en observant que si x est négatif, Log $(-x)$ se transforme en

$$y = \text{Log}(-1 \cdot x) = \text{Log}\, x + \text{Log}(-1)$$

et comme Log (-1) est invariable, on voit que la différentielle de Log x est la même que celle de Log $(-x)$.

La différentielle du logarithme d'une variable dépend du système dans lequel est pris ce logarithme, puisque Log (2,71828....) change avec la base du système. S'il s'agit d'un logarithme vulgaire, on aura

$$d \cdot \text{Log}\, x = \frac{dx}{x} \text{Log}(2{,}71828) = 0{,}43429 \frac{dx}{x} \cdot$$

Dans le système de logarithmes, qui a pour base e, la différentielle prend une forme très simple. Les logarithmes se nomment alors *logarithmes Népériens* du nom de Néper, inventeur des logarithmes. Comme dans tout système, le logarithme de la base est égal à l'unité, on a, en employant la notation log pour représenter les logarithmes Népériens,

$$\log e = 1 \quad \text{et} \quad dy = d \log x = \frac{dx}{x} \cdot$$

Si l'on avait

$$y = \log(fx),$$

en remplaçant fx par une variable z, on aurait à dériver le système des deux équations

$$y = \log z, \quad z = fx$$

dans lequel y est une fonction de fonction. D'après le N° 8, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\log z)}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} f'x = \frac{f'x}{fx},$$

c'est-à-dire, *que la dérivée du logarithme Népérien d'une fonction est égale à la dérivée de cette fonction divisée par la fonction elle-même.*

On emploie de préférence les logarithmes Népériens dans le calcul différentiel et le calcul intégral, à cause de la simplicité de leur différentielle; c'est pourquoi ce seront toujours ceux-ci que l'on désignera dans la suite, à moins qu'on ne dise expressément le contraire.

14. *Dérivée de sin x.* — Passons à la recherche de la dérivée de sin x. On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

qui se transforme au moyen de la formule

$$\sin a - \sin b = \frac{2}{r}\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b),$$

dans la suivante

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{r}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{r}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right).$$

Avant de passer à la limite de ce rapport, remarquons que l'arc AB (fig. 4) que nous supposerons plus petit qu'un quart de cercle, est toujours compris, quant à sa longueur, entre le sinus BC et la tangente AD. En effet, en menant la corde AB, il est visible que l'aire du secteur OAB est comprise entre les aires des triangles OBA et ODA, ce qui donne lieu aux deux inégalités

$$\frac{\text{OA}.\text{arc BA}}{2} < \frac{\text{OA}.\text{AD}}{2}, \quad \frac{\text{OA}.\text{arc BA}}{2} > \frac{\text{OA}.\text{BC}}{2}$$

ce qui vérifie la proposition, puisqu'on tire de ces inégalités,

$$\text{arc BA} < \text{AD}, \text{ arc BA} > \text{BC}.$$

Il suit de là que, α étant cet arc de cercle, on a toujours

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1, \quad \frac{\tang\alpha}{\alpha} > 1,$$

ou bien, en remplaçant tang α par $r\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ et multipliant par $\cos\alpha$ les deux membres de la seconde inégalité,

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1, \quad \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\cos\alpha}{r}.$$

On voit que pour toute valeur de α, le rapport $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ est compris

entre 1 et $\frac{\cos\alpha}{r}$, et comme pour $\alpha = 0$, $\frac{\cos\alpha}{r}$ devient l'unité, il en résulte que $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ est égal à 1 quand α s'évanouit.

Reprenons la valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si l'on passe à la limite, c'est-à-dire, si l'on fait évanouir h, il résulte de ce qui précède que $\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$ devient égal à l'unité, et on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{r},$$

ou bien quand le rayon est égal à l'unité,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

c'est-à-dire que *la dérivée du sinus de x est égale au cosinus du même arc.*

Si l'on fait usage des infiniment petits ou des différentielles, cette équation peut être écrite sous la forme

$$dy = \cos x dx;$$

$\cos x dx$ est donc la différentielle de $\sin x$.

15. *Dérivée de x^m.* — Les dérivées des autres fonctions se déduisent sans peine des deux que nous venons de déterminer. Soit d'abord $y = x^m$, m étant un nombre réel quelconque. Égalons les logarithmes Népériens des deux membres ainsi que leurs dérivées (fin du N° 12) en observant que y est fonction de x; il vient

$$\log y = m \log x, \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = m\frac{1}{x} \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

en remplaçant y par sa valeur x^m.

On voit par là que *la dérivée de x^m s'obtient en diminuant l'exposant d'une unité et en multipliant par l'exposant.*

Pour introduire les différentielles, on multiplie les deux membres par dx, ce qui donne

$$dy, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad d\cdot(x^m) = mx^{m-1}\,dx.$$

La règle précédente suffit pour dériver toute fonction de la forme

$$\frac{1}{x^3},\quad \frac{1}{\sqrt{x^3}},\quad \sqrt[5]{x^4},\quad \text{ou}\quad x^{-3},\quad x^{-\frac{3}{2}},\quad x^{\frac{4}{5}}.$$

Par exemple, pour $\sqrt{x}$, on trouve

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pour $y=\sqrt{fx}$ qu'on peut transformer en

$$y=\sqrt{z},\quad z=fx,$$

il vient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot f'x=\frac{f'x}{2\sqrt{fx}},$$

c'est-à-dire, que *la dérivée de la racine carrée d'une fonction est égale à la dérivée de cette fonction divisée par le double du radical.*

16. *Dérivée de la fonction exponentielle* a^x. — Proposons-nous de dériver la fonction exponentielle $a^x=y$, dans laquelle a est une constante. En prenant les logarithmes des deux membres et dérivant, il vient

$$\log y=x\log a,\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log a,\quad \frac{dy}{dx}=y\log a=a^x\log a.$$

On tire aussi de là

$$dy,\quad \text{c'est-à-dire,}\quad d\cdot a^x=a^x dx\log a.$$

Pour $y=a^z$, $z=fx$, on trouve de même

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=a^z f'x\log a=a^{fx}f'x\log a.$$

On voit donc que *la dérivée d'une constante élevée à une puissance fonction de x s'obtient en multipliant la fonction exponentielle par la dérivée de l'exposant et par le logarithme népérien de la constante.*

Si a est égal à la base e des logarithmes népériens, la dérivée se simplifie, parce que log e est l'unité et il vient pour $y = e^x$ et $y = e^{fx}$,

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \text{ou} \quad d \cdot e^x = e^x dx, \quad \frac{dy}{dx} = e^{fx} f'x \quad \text{ou} \quad d \cdot e^{fx} = e^{fx} f'x dx.$$

17. *Dérivées des fonctions trigonométriques.* — Revenons aux fonctions trigonométriques. On a déjà vu que la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$. Pour dériver $\cos x$, remarquons que si l'on fait x égal à $1^d - z$, il vient

$$y = \cos(1^d - z) = \sin z, \quad z = 1^d - x;$$

et en dérivant le système de ces deux équations, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \cos z \frac{dz}{dx},$$

qui devient, à cause de $z = 1^d - x$ et $\frac{dz}{dx} = -1$,

$$\frac{dy}{dx} = -\cos(1^d - x) = -\sin x,$$

c'est-à-dire, que *la dérivée du cosinus d'un arc est égale au sinus précédé du signe moins.*

Pour dériver tang x, on remplacera tang x par sa valeur $\frac{\sin x}{\cos x}$ et en se rappelant la forme de la dérivée d'une fraction, on trouve

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

On dérivera de même $\cot x$ en substituant $1^d - z$ à x et on trouvera pour dérivée

$$-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Des transformations du même genre feront connaître les dérivées des autres lignes trigonométriques; ainsi pour $\sec x$, on substituera sa valeur $\frac{1}{\cos x}$ et on trouvera pour dérivée

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Pour cosec x qui est égal à $\frac{1}{\sin x}$, on trouve $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

On désigne par arc sin x, l'arc de cercle dont le sinus est égal à x. Pour dériver cette *fonction trigonométrique inverse*, remarquons qu'il résulte de sa définition même, qu'en la représentant par y, on doit avoir $x = \sin y$. Si on dérive les deux membres, en remarquant que le second est une fonction de fonction de x, il vient

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On trouve de même pour la dérivée de arc tang x,

$$y = \text{arc tang } x, \quad \text{tang } y = x, \quad \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} = 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tang}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Enfin les fonctions

$$y = \sin(fx), \quad y = \text{tang}(fx), \quad y = \text{arc tang}(fx),$$

conduisent aux dérivées suivantes, en se rappelant le théorème sur la dérivation d'une fonction de fonction,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(fx)\cdot f'x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{\cos^2(fx)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f'x}{1+(fx)^2}.$$

18. *Dérivation des fonctions compliquées.* — Ce qui précède suffit pour dériver les fonctions explicites algébriques ou transcendantes compliquées. Ainsi, pour avoir la dérivée de $\sqrt[3]{1+2x-x^2}$, on posera

$$z = 1 + 2x - x^2, \quad y = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}(2-2x) = \frac{2}{3}\frac{1-x}{\sqrt[3]{(1+2x-x^2)^2}}.$$

On trouvera de même les dérivées suivantes, en effectuant les transformations indiquées :

$$y=\log(x+\sqrt{1+x^2})=\log z, \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$y=\log\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}=\log z, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$y=\log\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y=fx^{\varphi x}=u^v, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\log u\frac{dv}{dx}.$$

$$y=a^{b^x}=a^z, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=a^z\log a\,.\,b^x\log b=\log a\log b\,a^{b^x}\,b^x.$$

Si l'on avait

$$y=\cos t, \quad x=\sin t,$$

la dérivée de y par rapport à x se trouverait en posant (N° 10)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\operatorname{tang} t=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

19. *Dérivation des fonctions imaginaires.* — Les fonctions que nous venons de dériver ne contenaient aucune trace d'imaginaires; et en effet, si elles avaient été imaginaires, des accroissements ou des diminutions attribuées à de semblables fonctions n'auraient eu aucun sens intelligible. Cependant, quoiqu'on ne puisse pas plus se rendre compte d'un accroissement d'une quantité imaginaire que de la nature de la quantité imaginaire elle-même, on est souvent conduit à généraliser les transformations effectuées sur des quantités réelles; ainsi si une fonction de x contient soit en coefficient soit en exposant le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$, on dérivera d'après toutes les règles précédentes, en considérant $\sqrt{-1}$ comme une quantité invariable. Les fonctions

$$y=\cos x+\sqrt{-1}\sin x, \quad y=a^{x\sqrt{-1}}$$

donneront donc

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x + \sqrt{-1}\cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{-1}\, a^{x\sqrt{-1}} \log a.$$

On aura de même quand x est négatif dans les fonctions

$$y = \log x \quad \text{et} \quad y = \sqrt{x}$$

qui alors deviennent imaginaires,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

20. *Dérivation des fonctions implicites. Équation dérivée.* — Jusqu'ici on ne s'est occupé que de la dérivation de la fonction explicite $y = fx$. Considérons maintenant l'*équation implicite*

$$f(x, y) = 0$$

dans laquelle la *fonction* y est liée à x par une équation non résolue et est dite *implicite* pour ce motif.

La valeur de la dérivée de la variable dépendante ou $\frac{dy}{dx}$, pourrait quelquefois s'obtenir en résolvant cette équation par rapport à y et en dérivant ensuite d'après les règles précédentes; mais outre que cette résolution est souvent impossible, il importe encore de pouvoir trouver cette dérivée sans passer par cette opération préliminaire. Soit donc k l'accroissement que fait prendre à y un accroissement h donné à x. Ces deux accroissements sont liés entre eux de telle manière que si l'on remplace x par $x + h$ et y par $y + k$, l'équation doit encore être satisfaite, c'est-à-dire, que l'on doit avoir

$$f(x + h, y + k) = 0.$$

Cette double substitution, au lieu d'être faite s multanément, peut se faire successivement de cette manière : donnons aux x l'accroissement h sans toucher aux y; la fonction $f(x, y)$ devient alors

$$f(x, y) + hf_x'(x + \theta h, y),$$

$f_x'(x, y)$ représentant, comme au (N° 9), la dérivée de cette fonction prise par rapport à la lettre x considérée comme seule variable. Donnons ensuite dans ce résultat un accroissement k aux y sans toucher aux x. Le premier terme $f(x, y)$ devient

$$f(x, y) + kf_y'(x, y + \theta' k),$$

en représentant par $f'_y(x, y)$ la dérivée de $f(x, y)$ prise par rapport à la seule variable y. Quant au terme $f'_x(x+\theta h, y)$, représentons par Uk son accroissement; il deviendra

$$f'_x(x+\theta h, y) + Uk$$

comme $f(x, y)$ est devenu

$$f(x, y) + kf'_y(x, y+\theta' k)$$

et le résultat de la double substitution de $x+h$ à x et de $y+k$ à y prendra la forme

$$f(x, y) + kf'_y(x, y+\theta' k) + hf'_x(x+\theta h, y) + Uhk = 0,$$

ou bien, en supprimant le premier terme qui est nul,

$$\frac{k}{h} f'_y(x, y+\theta' k) + f'_x(x+\theta h, y) + Uk = 0.$$

Si l'on passe à la limite en faisant h nul, ce qui fait évanouir k, $\frac{k}{h}$ deviendra $\frac{dy}{dx}$ et on aura

$$\frac{dy}{dx} f'_y(x, y) + f'_x(x, y) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}, \ldots\ldots (1)$$

qui apprend que *pour une fonction de deux variables* (x, y) *égale à zéro, la dérivée de la variable dépendante* y *est représentée par le quotient de la division de la dérivée de la fonction par rapport à* x, *par sa dérivée par rapport à* y, *en changeant le signe du quotient.* Ordinairement on laisse cette équation sous la forme

$$f'_y(x, y)\frac{dy}{dx} + f'_x(x, y) = 0$$

que l'on nomme *équation dérivée* de

$$f(x, y) = 0.$$

Le premier membre de cette équation se compose de deux parties dont la première est visiblement la dérivée de la fonction $f(x, y)$ par

rapport à y considéré comme fonction de x, et la seconde, la dérivée par rapport à x considérée comme variable indépendante. Ces deux parties se nomment *dérivées partielles* et la somme forme la *dérivée totale*. Ainsi, dans l'exemple suivant,

$$y^3 - 5xy^2 - 3x^2y + x^3 + 1 = 0,$$

on trouve

$$f'_x(x, y) = -5y^2 - 6xy + 3x^2, \quad f'_y(x, y) = 3y^2 - 10xy - 3x^2$$

et l'équation dérivée prend la forme

$$(3y^2 - 10xy - 3x^2)\frac{dy}{dx} - (5y^2 + 6xy - 3x^2) = 0.$$

Elle conduit à une valeur de $\frac{dy}{dx}$ exprimée en fonction de x et de y. Pour avoir cette dérivée en fonction de x seul, il faudrait éliminer y entre cette dernière équation et l'équation primitive donnée.

Les dérivées de $f(x, y)$ par rapport à x et y, que nous sommes convenus de désigner par $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$, sont souvent représentées par $\frac{df(x, y)}{dx}$, $\frac{df(x, y)}{dy}$; la valeur de $\frac{dy}{dx}$ prend alors la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df(x, y)}{dx}}{\frac{df(x, y)}{dy}}.$$

Cette équation peut aussi être mise sous la forme suivante, en faisant disparaître les dénominateurs et en traitant dx et dy comme des quantités ordinaires,

$$\frac{df(x, y)}{dy}dy + \frac{df(x, y)}{dx}dx = 0.$$

Telle est *l'équation différentielle* de $f(x, y) = 0$. Le premier membre se compose de deux parties, dont la première est évidemment la différentielle de $f(x, y)$, en traitant y seul comme variable, et la seconde est la différentielle de $f(x, y)$ prise en faisant varier x seul. Chacune de ces parties se nomme *différentielle partielle* de $f(x, y)$, l'une par rapport à y et l'autre par rapport à x. La somme forme

la *différentielle totale*. Connaissant l'équation différentielle totale, on pourra toujours par une simple division remonter à la valeur de $\frac{dy}{dx}$. Soit par exemple $x^y - a = 0$. On trouve

$$\frac{df(x,y)}{dy}dy = x^y \log x.dy, \quad \frac{df(x,y)}{dx}dx = yx^{y-1}\,dx,$$

et en additionnant,

$$x^y \log x.dy + yx^{y-1}\,dx = 0,$$

qui est l'équation différentielle de l'équation donnée. On en tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x\log x} = -\frac{y^2}{x\log a}.$$

Observons que la différentielle d'une équation implicite à deux variables aurait pu se déduire de la règle démontrée (N° 9) pour la différenciation d'une fonction de fonction. Soit en effet $u = f(x, y)$, y étant une fonction de x; on a vu que l'on a

$$du = \frac{df(x,y)}{dx}dx + \frac{df(x,y)}{dy}\frac{dy}{dx}dx$$

et comme u est nul, du l'est aussi; on a donc, en supprimant le facteur commun dx,

$$\frac{df(x,y)}{dx} + \frac{df(x,y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

Si la relation entre (x, y) était donnée au moyen de deux équations

$$f(x, y, t) = 0, \quad F(x, y, t) = 0,$$

et qu'on voulut trouver $\frac{dy}{dx}$, on remarquerait que celles-ci pouvant être conçues résolues par rapport à x et y, ces variables doivent être considérées comme des fonctions de t. Dérivons donc $f(x, y, t)$ par rapport à la variable indépendante t (N° 9). On trouve en désignant cette fonction par f,

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dt} = 0,$$

parce que la fonction $f(x, y, t)$ étant constamment nulle, sa dérivée doit l'être aussi. La seconde équation donne de même

$$\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dF}{dt}=0.$$

Si l'on tire de ces deux équations les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, il suffira de les substituer dans la formule (N° 10)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

21. *Dérivées des ordres supérieurs des fonctions explicites.* — La dérivée $f'x$ d'une fonction donnée de x étant elle-même, en général, une fonction de x, peut être soumise au procédé de la dérivation et a par conséquent une dérivée que nous représenterons par $f''x$. Cette fonction, obtenue par deux dérivations successives, se nomme *dérivée* ou *coefficient différentiel du second ordre de fx*. De même, la dérivée de $f''x$ que nous désignerons par $f'''x$, est la dérivée du troisième ordre, etc.

Les valeurs de ces dérivées successives s'obtiennent par les procédés ordinaires de la dérivation; ainsi pour la fonction x^m, on trouve

$$f'x=mx^{m-1},\quad f''x=m(m-1)x^{m-2},$$
$$f'''x=m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

Pour $y=\frac{a}{x}$, il vient

$$f'x=-\frac{a}{x^2},\quad f''x=\frac{2a}{x^3},\quad f'''x=-\frac{6a}{x^4},\quad f''''x=\frac{24a}{x^5},\ \text{etc.}$$

La considération des infiniment petits conduit à une autre notation simple et commode pour représenter les différentes dérivées. On a vu plus haut (N° 6) que $\frac{dy}{dx}$ doit être considéré, non comme une fraction ordinaire, mais comme une notation ou un signe servant à rappeler clairement l'origine et la signification de cette quantité. Ensuite

on a fait la remarque que l'on pouvait, sans changer les résultats, traiter dy et dx comme des grandeurs infiniment petites, susceptibles de toutes les opérations de l'algèbre, ce qui a permis de considérer $\frac{dy}{dx}$, non plus comme un simple signe, mais comme un véritable rapport entre l'accroissement de la fonction et celui de la variable, ces accroissements étant infiniment petits à la vérité, mais soumis à toutes les règles de la différenciation; ainsi la différentielle de dy est $d(dy)$ que l'on convient d'écrire ainsi d^2y, et qu'on nomme *différentielle seconde de y*. De même la différentielle de d^2y, est $d(d^2y)$, que l'on écrit d^3y, c'est-à-dire, *différentielle troisième de y*. Il en est de même de dx; cependant comme x est la variable indépendante, c'est-à-dire, celle à laquelle on attribue un accroissement facultatif, on peut pour simplifier, admettre que x augmente toujours par intervalles égaux, ce qui rend dx constant et ses différentielles successives nulles. Cela posé, si on prend la différentielle de la fraction $\frac{dy}{dx}$, en supposant le dénominateur constant, on trouve

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d(dy)}{dx}=\frac{d^2y}{dx}$$

et le coefficient différentiel qui s'obtient en divisant par dx, prendra la forme $\frac{d^2y}{dx^2}$. On trouvera de même $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ pour les coefficients différentiels du 3me et du n^{me} ordre.

Ces notations auxquelles nous a conduit la considération en apparence peu rigoureuse des infiniment petits, ont été conservées dans la théorie des limites pour représenter les dérivées des différents ordres, d'abord parce que la notation $\frac{d^ny}{dx^n}$ indique clairement que cette quantité s'obtient par n dérivations successives de y par rapport à x et en second lieu, parce que leur adoption présente cet avantage important que l'on peut à chaque instant transformer les résultats obtenus par la considération des infiniment petits, dans ceux qu'eut donnés la théorie des limites. Par exemple, les dérivées successives de la fonction x^m trouvées plus haut, pourront aussi être obtenues de la manière suivante, en faisant usage des infiniment petits : une première différenciation donne

$$dy=mx^{m-1}\,dx.$$

Si on différencie une seconde fois en traitant dy comme variable et dx comme constant, on trouve

$$d^2y = m(m-1)x^{m-2}dx^2,$$

d'où l'on tirera, quand on le voudra, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et cette valeur sera identiquement la même que si l'on eut pris la dérivée de la dérivée du premier ordre. En différenciant une troisième fois les deux membres de l'équation précédente, il vient

$$d^3y = m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$$

qui servira à déterminer $\frac{d^3y}{dx^3}$, et ainsi de suite.

22. *Dérivées successives d'une fonction de fonction.* — Les dérivées successives $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$....... d'une fonction de fonction donnée par le système des deux équations

$$y = fu, \quad u = Fx,$$

s'obtiennent comme suit : une première dérivation donne (N° 8)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'uF'x,$$

et si l'on prend une seconde fois la dérivée des deux membres par rapport à x, en remarquant 1° que la dérivée de $\frac{dy}{dx}$ est $\frac{d^2y}{dx^2}$, 2° que $\frac{dy}{du}$ est une fonction de u tirée de $y = fu$ et que par conséquent la dérivée de $\frac{dy}{du}$ par rapport à x est

$$\frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx} = f''u\,F'x,$$

et 3° que la dérivée de $\frac{du}{dx}$ par rapport à x est $\frac{d^2u}{dx^2}$, on trouvera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} = f''u(F'x)^2 + f'uF''x.$$

En dérivant une troisième fois, on trouverait de même

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3+3\frac{d^2y}{du^2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3}.$$

Dans l'exemple suivant :

$$y=\log\sin x,\quad \text{ou bien}\quad y=\log u,\quad u=\sin x,$$

on trouve

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u},\quad \frac{d^2y}{du^2}=-\frac{1}{u^2},\quad \frac{d^3y}{du^3}=\frac{2}{u^3}$$

$$\frac{du}{dx}=\cos x,\quad \frac{d^2u}{dx^2}=-\sin x,\quad \frac{d^3u}{dx^3}=-\cos x,$$

et en substituant,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{u}=\cot x,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\cos^2 x}{u^2}-\frac{\sin x}{u}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2\cos^3 x}{u^3}+\frac{3\sin x\cos x}{u^2}-\frac{\cos x}{u}=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$$

23. *Dérivées successives, les deux variables étant données en fonction d'une troisième.* — Supposons les deux variables y et x données en fonction d'une troisième, de manière que l'on ait

$$y=ft,\quad x=Ft.$$

On sait (N° 10) que la dérivée première est donnée par l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f't}{F't}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Pour trouver la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$, dérivons les deux membres de l'équation précédente par rapport à t, en observant que x étant fonction de t, on a

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}=\frac{d^2y}{dx^2}F't.$$

mais la dérivée du second membre est

$$\frac{F't f''t - f't F''t}{(F't)^2};$$

il vient donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F't f''t - f't F''t}{(F't)^3} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Une marche analogue fera connaître la valeur de $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

Prenons pour exemple

$$y = \sin t, \quad x = \cos t.$$

On trouve

$$f't = \cos t, \quad f''t = -\sin t, \quad F't = -\sin t, \quad F''t = -\cos t,$$

et par suite,

$$\frac{dy}{dx} = -\cot t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{(-\sin t)^3} = -\frac{1}{\sin^3 t}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3\cos t}{\sin^5 t}.$$

24. *Dérivées successives des fonctions implicites.* — Passons à la recherche des dérivées des différents ordres dans les équations implicites. On sait (N° 20) que la dérivée du premier ordre de y dans $f(x, y) = 0$, est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Le second membre est en général une fonction de x et de y que nous représenterons par $F(x, y)$; on a donc

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

et si on prend la dérivée des deux membres par rapport à x, en observant que la dérivée du premier membre est $\frac{d^2y}{dx^2}$ et que la dérivée du second est

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}$$

ou, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot F(x, y).$$

Le second membre est encore une fonction de x et y qu'on représentera par $\varphi(x, y)$, de sorte que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x, y)$$

qu'on dérivera de nouveau de la même manière pour avoir $\frac{d^3y}{dx^3}$.

25. *Équations dérivées successives.* — Au lieu de chercher immédiatement les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ......, on préfère souvent suivre la marche suivante : on sait que l'équation dérivée de

$$f(x, y) = 0$$

est, en représentant pour abréger la fonction par f et la dérivée $\frac{dy}{dx}$ par p,

$$pf_y' + f_x' = 0,$$

qui fera connaître $\frac{dy}{dx}$ quand on en aura besoin. Comme f_x' et f_y' con-

tiennent x et y et que p est une certaine fonction de x et y ou plutôt de x seul, puisqu'on peut concevoir y remplacé par sa valeur en x, on considérera le premier membre de cette équation comme étant une fonction de x variable indépendante, de y fonction de x et de p fonction de x. Si donc on convient de représenter par $f''_{x,y}$, $f''_{x,x}$, les dérivées de f'_x par rapport à la lettre y et par rapport à la lettre x, et par $f''_{y,x}$, $f''_{y,y}$, les dérivées de f'_y par rapport à x et y, il viendra en prenant la dérivée totale des deux membres de cette équation par rapport à x,

$$\frac{dp}{dx}f'_y + pf''_{y,x} + p^2 f''_{y,y} + f''_{x,x} + pf''_{x,y} = 0,$$

qui est l'*équation dérivée* seconde de l'équation donnée, d'où l'on tirera la valeur de $\frac{dp}{dx}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$. En représentant $\frac{dp}{dx}$ par q, on considérera de même la fonction qui forme le premier membre de l'équation précédente comme contenant des x, des y fonction de x, des p fonction de x et des q fonction de x, et si l'on prend la dérivée totale, on aura l'*équation dérivée troisième* contenant $\frac{dq}{dx}$ ou $\frac{d^3y}{dx^3} = r$, qui servira à déterminer $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Souvent au lieu de la notation $f''_{x,y}$ qui indique le résultat d'une double dérivation, la première par rapport à la lettre x et la seconde par rapport à la lettre y, on emploie la notation $\frac{d^2f}{dxdy}$ à laquelle on est conduit par la considération des infiniment petits. L'équation précédente devient alors

$$\frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2f}{dydx}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Prenons pour exemple

$$xy - 1 = 0.$$

On tire de là

$$\frac{df}{dx}=y,\quad \frac{df}{dy}=x,\quad \frac{d^2f}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2f}{dy^2}=0,\quad \frac{d^2f}{dydx}=1,\quad \frac{d^2f}{dxdy}=1,$$

$$\frac{d^3f}{dx^3}=0,\ \text{etc.}$$

L'équation dérivée première est donc

$$x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Les équations dérivées seconde, troisième, etc., sont

$$2\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$3\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

26. *Équations différentielles successives d'une fonction implicite.* — Les principes de la différenciation conduisent d'une manière souvent plus commode aux équations dérivées successives d'une équation implicite donnée. La même équation nous servira d'exemple; sa différentielle est

$$xdy+ydx=0.$$

Si on différencie de nouveau en traitant x, y, dy comme variables et dx comme constant, on trouve successivement,

$$xd^2y+2dydx=0,$$

$$xd^3y+3d^2ydx=0,$$

$$xd^4y+4d^3ydx=0,$$

qui sont les équations différentielles seconde, troisième, etc., de l'équation implicite proposée. Elles reproduisent exactement les équations dérivées, en divisant les deux membres de la première par dx^2, et par dx^3, dx^4...... les deux membres de la seconde, de la troisième, etc.

Les mêmes principes peuvent servir à déterminer les dérivées des ordres supérieurs $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$....., quand la relation entre les variables est donnée par un système de deux équations contenant, comme à la fin du N° 20, une troisième variable t,

$$f(x, y, t) = 0,$$

$$F(x, y, t) = 0;$$

car en prenant les équations dérivées successives de ces deux équations par rapport à la variable t, savoir

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dF}{dt} = 0,$$

$$\frac{df}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{d^2f}{dydx}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \text{etc.} = 0, \quad \frac{dF}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} + \text{etc.} = 0,$$

on pourra déduire de ces équations les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$...... pour les substituer dans les formules du N° 23.

27. *Changement de la variable indépendante.* — Les dérivées successives $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$...... tirées des équations

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad y = fx$$

ont été prises jusqu'ici en supposant x variable indépendante, ou, au point de vue de la considération des différentielles, en supposant dx invariable. Si on voulait avoir les dérivées $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$......... pour lesquelles x devient la variable dépendante et y la variable indépendante, il faudrait reprendre les dérivations successives de la fonction donnée, dans cette nouvelle hypothèse; mais il existe entre ces deux espèces de dérivées, des relations telles que, si les premières ont été calculées, on pourra immédiatement connaître les secondes. Pour trouver ces relations, remarquons que l'équation $y = fx$ peut être remplacée par le système des deux équations

$$y = ft, \quad x = t$$

et en prenant la nouvelle variable t pour variable indépendante, on a vu (Nos 10 et 23) que les dérivées $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$ etc., sont données par les formules

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}, \quad \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dy}{dt}\right)^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3}=\text{etc.}$$

Or l'équation $x=t$ donne

$$\frac{dx}{dt}=1, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=0\ldots.$$

et les formules deviennent, en observant que $dt=dx$,

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3}=\text{etc.}$$

qui remplissent évidemment le but qu'on se proposait. En tirant de ces équations les valeurs des anciennes dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$...... et en les substituant dans les équations dérivées totales trouvées plus haut (Nos 20 et 25), on obtiendra les équations dérivées prises dans l'hypothèse de y variable indépendante.

La première de ces équations donne lieu à une remarque importante. Si on dérive l'équation

$$f(x, y)=0$$

en prenant x pour variable indépendante, on a pour équation dérivée,

$$\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dx}=0,$$

et pour équation différentielle, en multipliant par dx,

$$\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dx}dx=0.$$

En changeant $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, on a pour équation dérivée, dans l'hypothèse de y variable indépendante,

$$\frac{df}{dy}\frac{1}{\frac{dx}{dy}}+\frac{df}{dx}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dy}+\frac{df}{dx}\frac{dx}{dy}=0$$

et pour équation différentielle, en multipliant par dy,

$$\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dx}dx=0.$$

On voit donc que l'*équation différentielle première d'une équation à deux variables reste la même quelle que soit celle des deux que l'on prenne pour variable indépendante.* Cette remarque ne s'applique qu'aux équations différentielles premières.

CHAPITRE II.

Applications analytiques du calcul différentiel. Détermination de la vraie valeur des fonctions qui deviennent $\frac{0}{0}$ pour une certaine valeur attribuée à la variable. — Fonctions qui deviennent $\frac{\infty}{\infty}$. — Fonctions qui deviennent 0^0, ∞^0. — Fonctions qui deviennent 1^∞. Développement d'une fonction. — Développement de Taylor. — Formule de Maclaurin. — Utilité des développements des fonctions en série. — Convergence des séries. — Terme sommatoire de la série de Taylor. — Limite de la série de Taylor. — Conséquences relatives à la convergence de la série de Taylor. — Limite de la série de Maclaurin. — Conséquences relatives à la convergence de la série de Maclaurin. — Série de Taylor en défaut. — Développement d'une fonction suivant les puissances entières d'une fonction donnée de la variable. — Formule pour le retour des suites. — Formule pour la résolution des équations numériques. — Maximum et minimum des fonctions d'une seule variable. — Valeurs imaginaires des sinus et cosinus. Logarithmes de l'unité. — Racines de l'unité. Racines des équations à deux termes. — Développement de $\cos^m x$, $\sin^m x$. — Formule de Moivre. Développement de $\cos mx$ et $\sin mx$. — Quelques valeurs symboliques remarquables.

28. ***Détermination de la vraie valeur des fonctions qui deviennent $\frac{0}{0}$ pour une certaine valeur attribuée à la variable.*** — Proposons-nous, pour première application analytique du calcul différentiel, de trouver la limite vers laquelle converge la fraction $\frac{P}{Q}$, lorsqu'en faisant converger x vers une valeur constante a, les deux termes P et Q qui sont des fonctions de x, convergent à la fois vers zéro, ou lorsque la fraction se présente à la limite sous la forme $\frac{0}{0}$. Remarquons d'abord que lorsqu'une fonction P de x s'évanouit pour $x = a$, on doit en conclure que a est une des racines de l'équation $P = 0$ et par suite

du théorème fondamental de la théorie des équations, P doit être divisible exactement, une ou plusieurs fois, par $x - a$, du moins si cette fonction est rationnelle et algébrique; en sorte que P pourra être mis sous la forme $P'(x-a)^m$, dans laquelle P' ne s'évanouit plus pour $x = a$. On reconnaît de même que Q doit être de la forme $Q'(x-a)^n$ et par conséquent

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'(x-a)^m}{Q'(x-a)^n}.$$

On voit par cette décomposition, pour quel motif les deux termes de la fraction $\frac{P}{Q}$ s'évanouissent à la fois pour $x = a$; on voit aussi qu'en supprimant le facteur commun $x - a$, on connaîtra la vraie valeur de la fraction $\frac{P}{Q}$. Ainsi, si $m = n$, la vraie valeur est $\frac{P'}{Q'}$ dans laquelle x doit être remplacé par a. Si $m > n$, la fraction est réductible à la forme $\frac{P'(x-a)^{m-n}}{Q'}$ qui devient zéro pour $x = a$. Enfin si $n > m$, elle est réductible à la forme $\frac{P'}{Q'(x-a)^{n-m}}$ et pour $x = a$, il vient $\frac{P'}{0}$ ou l'infini.

Il résulte de ce qu'on vient de voir, que si l'on pouvait découvrir le facteur commun de ces deux termes, on connaîtrait immédiatement la vraie valeur de la fraction; mais cette recherche est souvent fort longue, surtout pour les fonctions irrationnelles ou transcendantes. Le calcul différentiel conduit à une solution très simple et générale de la question; en effet si a est la valeur de x qui fait évanouir les deux termes, en remplaçant x par $a + h$, la fraction deviendra $\frac{F(a+h)}{f(a+h)}$ et il suffira de faire h nul pour retrouver la valeur cherchée; or en désignant par θ et θ' deux facteurs inconnus compris entre 0 et 1, on sait (N° 5) que les deux termes de cette fraction se transforment de la manière suivante :

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{Fa + hF'(a+\theta h)}{fa + hf'(a+\theta' h)},$$

qui se réduit à

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F'(a+\theta h)}{f'(a+\theta' h)},$$

parce que Fa et fa sont nuls par hypothèse. Si on fait converger h vers zéro, cette égalité devient

$$\frac{Fa}{fa} = \frac{F'a}{f'a},$$

d'où résulte ce théorème : *le rapport de deux fonctions qui s'évanouissent à la fois quand on attribue à la variable une certaine valeur, est égal au rapport des dérivées de ces deux fonctions.*

Si les deux dérivées premières s'évanouissent elles-mêmes pour la valeur attribuée à la variable, il est visible qu'en opérant sur celles-ci comme on l'a fait sur les fonctions primitives, on sera conduit à cette conclusion, que le rapport cherché est représenté par le rapport des dérivées secondes et qu'en général, il est représenté par le rapport des deux dérivées de même ordre les moins élevées qui ne s'évanouissent pas simultanément.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{1-x}{1-x^2}$ qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=1$. On trouve, en prenant les dérivées des deux termes,

$$\frac{-1}{-2x} = \frac{1}{2}$$

pour la valeur cherchée. La fraction

$$\frac{3x^2 - a^2 - 2ax}{x^2 - 5ax + 4a^2}$$

qui, pour $x=a$, devient $\frac{0}{0}$, donne en prenant les dérivées des deux termes,

$$\frac{6x-2a}{2x-5a} = -\frac{4}{3}.$$

On trouve de la même manière, p ur $x=0$,

$$\frac{a^x - b^x}{x^n} = 0, \quad = \log a - \log b, \quad = \infty$$

selon que l'on a $n < 1$, $n = 1$ ou $n > 1$. On trouve encore pour

$x=0$, en dérivant plusieurs fois le numérateur et le dénominateur,

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=2,\quad \frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

29. *Fonctions qui deviennent* $\frac{\infty}{\infty}$. — Si les deux termes de la fraction $\frac{Fx}{fx}$ deviennent à la fois infinis pour une valeur a de la variable, on trouvera la vraie valeur en effectuant les opérations indiquées plus haut, sur la fraction mise sous la forme

$$\frac{\frac{1}{fx}}{\frac{1}{Fx}},$$

qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$. En prenant la dérivée des deux termes de cette fraction, on trouve

$$\frac{-\frac{f'x}{f^2x}}{-\frac{F'x}{F^2x}}=\left(\frac{Fx}{fx}\right)^2\frac{f'x}{F'x},$$

et par conséquent, en représentant par A ce que devient la fraction donnée $\frac{Fx}{fx}$ quand $x=a$,

$$A=A^2\frac{f'a}{F'a},\quad \text{d'où}\quad A=\frac{F'a}{f'a}.$$

On voit par là que la règle indiquée plus haut est commune aux cas où les deux termes deviennent à la fois nuls ou infinis.

Prenons pour exemple la fraction

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}$$

qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=0$, quand m est positif. Si on y applique la règle précédente, il se présente une difficulté que l'on évite en faisant

$$x^2=\frac{1}{y},$$

ce qui transforme la fraction donnée dans celle-ci

$$\frac{y^{\frac{m}{2}}}{e^y}$$

dont les deux termes sont infinis pour $y = \infty$ c'est-à-dire, pour $x = 0$; la vraie valeur est donc la même que celle de

$$\frac{m}{2}\frac{y^{\frac{m}{2}-1}}{e^y}.$$

Celle-ci devenant aussi $\frac{\infty}{\infty}$ pour $y = \infty$, a pour valeur

$$\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\frac{y^{\frac{m}{2}-2}}{e^y},$$

et ainsi de suite. Or, si m est un nombre entier et pair, après un nombre $\frac{m}{2}$ de dérivations successives, on trouvera la fraction

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots\ldots\frac{m}{2}\;\;\frac{1}{e^y},$$

dont le dénominateur seul devient infini pour $y = \infty$; la vraie valeur cherchée est donc zéro. Si, au contraire, m est impair ou fractionnaire, il est visible qu'après un nombre n de dérivations immédiatement supérieur à $\frac{m}{2}$, l'exposant de y deviendra négatif de la forme $\frac{m}{2} - n$; on pourra donc, en faisant descendre y au dénominateur faire en sorte que le numérateur soit un nombre constant, positif et fini $\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)\ldots\ldots$, tandis que le dénominateur prendra la forme $y^{n-\frac{m}{2}}e^y$ et sera, par conséquent encore infini; la fraction

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}$$

est donc nulle pour $x = 0$ quand m est positif.

La méthode précédente serait évidemment en défaut si toutes

les dérivées successives du numérateur et du dénominateur étaient nulles ou infinies pour la valeur donnée à la variable, comme cela a lieu pour les fractions

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\log \sin x}{\log \operatorname{tang} x}$$

dont les deux termes sont nuls et infinis et ont des dérivées successives toutes infinies pour $x=a$ et $x=0$. Il faut dans ce cas, chercher à découvrir directement le facteur commun qui fait évanouir les deux termes de la fraction ou leurs dérivées. En décomposant la première fraction de cette manière

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+2\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}}{\sqrt{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+2\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\sqrt{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}}$$

on reconnait que $\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ est facteur commun et on trouve $\sqrt{\frac{2}{a}}$ pour vraie valeur. Quant à l'autre, sa vraie valeur est l'unité.

Si les deux termes de la fraction étaient fonctions de deux variables (x, y) liées entre elles par l'équation

$$f(x, y)=0$$

et que ces deux termes devinssent nuls pour certaines valeurs (a, b) de (x, y) satisfaisant à cette dernière équation, la vraie valeur de la fraction s'obtiendrait encore en prenant les dérivées des deux termes par rapport à x, pourvu que l'on considérât y comme fonction de x, puisqu'on peut concevoir y remplacé par sa valeur en x tirée de $f(x, y)=0$. Ainsi pour $\frac{F(x, y)}{\varphi(x, y)}$, la vraie valeur est

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}, \quad \frac{\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}}=\frac{\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{df}{dx}}$$

après qu'on aura remplacé (x, y) par (a, b). Cette seconde valeur résulte de ce que dans $f(x, y) = 0$, $\frac{dy}{dx}$ est égal à $-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$. Ainsi, si on cherche ce que devient pour $x = 0$ la dérivée $\frac{dy}{dx}$ tirée de

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

on trouve $y = 0$ et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x(x^2 + y^2)}{a^2y + 2y(x^2 + y^2)}.$$

En dérivant les deux termes, puis faisant $(x = 0,\ y = 0)$ et désignant par A la valeur correspondante de $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$A = \frac{a^2}{a^2 A} \quad \text{d'où} \quad A = \pm 1.$$

50. *Fonctions qui deviennent* 0^0, ∞^0. — Cherchons encore la vraie valeur de Fx^{fx}, lorsque Fx et fx deviennent nuls pour une même valeur a de la variable. En représentant cette fonction par u, il vient

$$u = Fx^{fx}, \quad \log u = fx \log Fx = \frac{\log Fx}{\frac{1}{fx}}.$$

Cette dernière expression prend la forme $-\frac{\infty}{\infty}$ pour $x = a$, puisque log 0 est égal à l'infini négatif; sa vraie valeur est donc

$$\frac{-\frac{F'a}{Fa}}{-\frac{f'a}{f^2a}} = +\frac{f^2aF'a}{Faf'a}$$

qui se réduit à $+fa$ ou à zéro, parce que les fonctions fa et Fa étant nulles, leur rapport est égal à celui de leurs dérivées. Le log de u étant zéro, on en conclut que généralement la valeur limite d'une fonction qui prend la forme 0^0 est l'unité.

Si Fx, au lieu de devenir zéro devenait infini, c'est-à-dire, si la fonction donnée prenait la forme ∞^0, les deux termes de la fraction $\frac{\log Fa}{\frac{1}{fa}}$ seraient infinis et la vraie valeur de log u serait encore donnée par

$$\log u = -\frac{fa^2 F'a}{Fa f'a};$$

mais les deux termes de la fraction $\frac{Fa}{\frac{1}{fa}}$ étant infinis en même temps, on a

$$\frac{Fa}{\frac{1}{fa}} = \frac{F'a}{-\frac{f'a}{fa^2}} = -\frac{fa^2 F'a}{f'a};$$

la valeur de log u se réduit donc à fa ou à zéro, d'où l'on conclut que ∞^0 est aussi égal à l'unité.

31. *Fonctions qui deviennent* 1^∞. — Enfin si pour $x = a$, Fx convergeait vers l'unité et fx vers l'infini, en opérant comme plus haut, il est visible que $\frac{\log Fx}{\frac{1}{fx}}$ convergerait vers $\frac{0}{0}$ et par suite, que l'on aurait aussi

$$\log u = -\frac{f^2 a F'a}{Fa f'a};$$

mais Fx convergeant vers l'unité, la fraction $\frac{Fx-1}{\frac{1}{fx}}$ converge vers $\frac{0}{0}$ et l'on a

$$\frac{Fa-1}{\frac{1}{fa}} = -\frac{F'a}{\frac{f'a}{fa^2}};$$

la valeur de log u devient donc

$$\log u = \frac{(Fa-1)fa}{Fa} = \frac{fa}{\frac{Fa}{Fa-1}}$$

et comme cette dernière se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, elle devient enfin

$$\log u = -\frac{f'a}{F'a}(Fa-1)^2 \quad \text{d'où} \quad u = e^{-\frac{f'a}{F'a}(Fa-1)^2}.$$

On trouve ainsi $\cos x^{\cot x} = 1$ pour $x = 0$; $\tang x^{\tang 2x} = \frac{1}{e}$ pour $x = \frac{\pi}{4}$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ pour $x = 0$, sinver $x^{\tang x} = \frac{1}{e}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$ et enfin pour $x = 0$, $(1+x^m)^{\frac{1}{x^n}} = e^{\frac{n}{m}x^{m-n}}$. Cette dernière fonction devient e, 1 ou ∞ selon que m positif est égal, supérieur ou inférieur à n positif.

32. *Développement d'une fonction.* — On dit qu'une fonction fx est développée suivant les puissances ascendantes de la variable x, lorsqu'on a transformé identiquement fx en une autre fonction de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.}$$

dans laquelle les coefficients A, B, C, D..... et les exposants α, β, γ..... sont finis et indépendants de x. Remarquons d'abord que, de quelque manière que l'on arrive à ce développement, que nous supposerons toujours ordonné suivant les puissances croissantes α, β, γ.... de x, le résultat doit toujours être le même, pourvu que l'on n'assigne à x aucune valeur particulière, ou en d'autres termes, qu'une même fonction ne peut donner lieu à deux développements différents suivant les puissances ascendantes de la même variable; en effet, si

$$A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \text{etc.}$$

pouvait être un second développement, on aurait pour toute valeur de x,

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + \text{etc.} = A'x^{\alpha'} + B'x^{\beta'} + \text{etc......} \quad (1)$$

Observons d'abord que s'il y avait de part ou d'autre des exposants négatifs, en multipliant les deux membres par x élevé à une puissance supérieure au plus grand exposant négatif, ils deviendraient tous positifs et que par conséquent il suffit de démontrer l'identité en supposant tous les exposants positifs. Or, si on suppose α' plus grand que α, il vient en divisant par x^α,

$$A + Bx^{\beta-\alpha} + Cx^{\gamma-\alpha} + \text{etc.} = A'x^{\alpha'-\alpha} + B'x^{\beta'-\alpha} + C'x^{\gamma'-\alpha} + \text{etc.}$$

Pour $x = 0$ le premier membre se réduit à la constante A; il doit donc être de même du second membre, ce qui ne pourrait arriver si α' était supérieur à α, puisque tous les termes disparaîtraient, tandis que pour $\alpha' = \alpha$ l'équation se réduit à

$$A = A'.$$

Si dans les deux membres de l'équation (1) on supprime les deux termes égaux Ax^α et $A'x^{\alpha'}$, celle-ci devient

$$Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.} = B'x^{\beta'} + C'x^{\gamma'} + \text{etc.}$$

et on démontrera de la même manière l'égalité des autres termes; d'où l'on conclura que les deux développements sont identiques.

33. *Développement de Taylor.* — Avant de nous occuper du développement de fx suivant les puissances ascendantes de x, nous chercherons un développement plus général et qui renferme le premier comme cas particulier. Si dans fx on donne à x un accroissement h, la fonction devient $f(x+h)$ et proposons-nous de développer cette dernière suivant les puissances ascendantes de h, c'est-à-dire, sous la forme

$$Ah^\alpha + Bh^\beta + Ch^\gamma + \text{etc.}$$

A, B, C..... α, β, γ..... étant indépendants de h. On a vu (N° 5) que $f(x+h)$ peut toujours se décomposer de cette manière

$$f(x+h) = fx + hf'(x+\theta h)$$

quand x reste variable. Mettons cette équation sous la forme

$$f(x+h) = fx + hR,$$

en faisant

$$R = f'(x+\theta h).$$

Comme cette égalité doit subsister pour toute valeur de h, les dérivées successives des deux membres par rapport à cette lettre seront aussi égales; or, on sait qu'en représentant $x+h$ par x', la dérivée de fx' par rapport à h est (N° 8)

$$\frac{d(fx')}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dh} = f'x' \cdot \frac{dx'}{dh} = f'x' = f'(x+h),$$

c'est-à-dire, que cette dérivée s'obtient en prenant la dérivée de fx par

rapport à x et en remplaçant ensuite x par $x + h$. On reconnait de même que les dérivées seconde, troisième, etc. de $f(x+h)$ par rapport à h sont $f''(x+h)$, $f'''(x+h)$.......; on a donc cette suite d'égalités

$$f(x+h) = fx + hR,$$

$$f'(x+h) = R + h\frac{dR}{dh},$$

$$f''(x+h) = 2\frac{dR}{dh} + h\frac{d^2R}{dh^2}$$

$$f'''(x+h) = 3\frac{d^2R}{dh^2} + h\frac{d^3R}{dh^3}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$f^{(n)}(x+h) = n\frac{d^{(n-1)}R}{dh^{n-1}} + h\frac{d^nR}{dh^n},$$

d'où l'on tire, en additionnant, après avoir multiplié les deux membres de la deuxième par $-h$, de la troisième par $+\frac{h^2}{1.2}$, de la quatrième par $\frac{-h^3}{1.2.3}$ et ainsi de suite,

$$f(x+h) - hf'(x+h) + \frac{h^2}{1.2}f''(x+h) - \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x+h)......$$

$$\pm\frac{h^n}{1.2.....n}f^{(n)}(x+h) = fx \pm \frac{h^{n+1}}{1.2.3.....n}\,\frac{d^nR}{dh^n}.$$

Si on change $x+h$ en x' et par conséquent x en $x'-h$ et qu'ensuite on substitue $-h'$ à $+h$, il viendra, en supprimant tous les accents,

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2}f''x\cdots + \frac{h^n}{1.2....n}f^{(n)}x + \frac{h^{n+1}}{1.2.3....n}\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right).$$

Il est à remarquer que ces transformations doivent aussi être faites dans la valeur de $\frac{d^nR}{dh^n}$, dont il sera question plus loin et que nous mettons entre parenthèses pour rappeler ce changement.

Le second membre de cette équation donne le développement de $f(x+h)$ jusqu'au terme multiplié par h^n; car, bien que $\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)$ soit une fonction inconnue de h, il est cependant visible que si on développe par un moyen quelconque $\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)$ en série suivant les puissances de h, il en résultera un nouveau développement dont le premier terme prendra rang après $\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}x$ et que, par conséquent, les premiers termes du développement de $f(x+h)$ ne changeront plus; en effet pour que $\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)$ put donner des termes contenant le facteur h à des puissances inférieures à $n+1$, il faudrait que le développement de $\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)$ contînt des termes divisés par h^α et par conséquent que $\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)$ devînt infini pour $h=0$, ce qui ne peut arriver; car si de l'équation précédente on tire

$$\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)=1.2.3\ldots n\frac{f(x+h)-fx-hf'x-\frac{h^2}{1.2}f''x\cdots-\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x)}{h^{n+1}}$$

et qu'on cherche ce que devient le second membre pour $h=0$, on trouve qu'il se réduit à $\frac{0}{0}$ égal à $\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}x$.

Comme l'indice n peut croître indéfiniment, on posera en général

$$f(x+h)=fx+hf'x+\frac{h^2}{1.2}f''x+\frac{h^3}{1.2.3}f'''x+\text{etc.}$$

pourvu que l'on suppose illimité le nombre de termes de cette série dont la loi est évidente. Elle ne sera limitée que si la fonction fx est telle que les dérivées successives sont toutes nulles à partir d'un certain rang, ce qui évidemment n'aura lieu que si fx est de la forme ax^m+bx^n+ etc, m et n étant des nombres entiers et positifs.

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Taylor*. En représentant fx par y, on la met aussi sous la forme

$$f(x+h)=y+h\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$

Si l'on admet *à priori* la possibilité de développer $f(x+h)$ suivant les puissances entières et positives de h, on démontre la formule de Taylor d'une manière très-simple par la méthode des coefficients indéterminés; supposons en effet $f(x+h)$ développé de cette manière

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{etc.}$$

$A, B, C, D\ldots\ldots$ étant des coefficients inconnus et indépendants de h. Cette équation devant subsister pour toute valeur de h, les dérivées des deux membres par rapport à h, seront aussi égales; on a donc cette suite d'égalités, en se rappelant la dérivée trouvée au numéro précédent pour $f(x+h)$ par rapport à h,

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{etc.}$$
$$f'(x+h) = B + 2Ch + 3Dh^2 + 4Eh^3 + \text{etc.}$$
$$f''(x+h) = 2C + 2.3Dh + 3.4Eh^2 + \text{etc.}$$
$$f'''(x+h) = 1.2.3D + 2.3.4Eh + \text{etc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces égalités doivent être vérifiées pour toute valeur de h, et pour $h=0$, on trouve

$$A = fx,\quad B = f'x,\quad C = \frac{1}{1.2}f''x,\quad D = \frac{1}{1.2.3}f'''x,$$

$$E = \frac{1}{1.2.3.4}f''''x, \text{ etc.}$$

En substituant ces valeurs dans le développement de $f(x+h)$, on obtient la formule de Taylor.

Appliquons cette formule à quelques exemples. Supposons

$$fx = x^m;$$

il vient

$$fx = x^m,\quad f'x = mx^{m-1},\quad f''x = m(m-1)x^{m-2},$$
$$f'''x = m(m-1)(m-2)x^{m-3},\ldots\ldots$$

et par conséquent,

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}h^3 + \text{etc.}$$

On voit par là, que la formule du binôme de Newton, que nous n'avons supposée au N° 13 démontrée que pour le cas d'un exposant entier et positif, est encore vraie pour un exposant quelconque.

Pour la fonction $\frac{1}{x}$, il vient

$$fx=\frac{1}{x},\quad f'x=-\frac{1}{x^2},\quad f''x=\frac{2}{x^3},\quad f'''x=-\frac{2.3}{x^4},\ \text{etc.}$$

et l'on trouve en substituant,

$$\frac{1}{x+h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}-\frac{h^3}{x^4}+\frac{h^4}{x^5}-\text{etc.}$$

Il est visible qu'on serait arrivé au même résultat en effectuant directement la division de 1 par $x+h$.

Pour $\sin x$, on a

$$fx=\sin x,\quad f'x=\cos x,\quad f''x=-\sin x,\quad f'''x=-\cos x,\ \text{etc.}$$

et par conséquent

$$\sin(x+h)=\sin x+\frac{h\cos x}{1}-\frac{h^2}{1.2}\sin x-\frac{h^3}{1.2.3}\cos x+\text{etc.}$$

On trouve de même

$$\cos(x+h)=\cos x-\frac{h\sin x}{1}-\frac{h^2}{1.2}\cos x+\frac{h^3}{1.2.3}\sin x+\text{etc.}$$

Il est à remarquer que si dans $\sin x$, $\sin h$, $\sin(x+h)$, les arcs de cercle x, h, $x+h$ peuvent être exprimés en degrés, minutes et secondes, cependant les arcs x et h placés en dehors des lignes trigonométriques sont toujours des nombres abstraits, représentant les longueurs de ces mêmes arcs comptés sur la circonférence qui a l'unité pour rayon et par conséquent estimés à raison de $\frac{\pi}{180}$ pour chaque degré.

La fonction a^x donne

$$fx=a^x,\quad f'x=a^x\log a,\quad f''x=a^x\log^2 a,\quad f'''x=a^x\log^3 a,\ \text{etc.}$$

d'où il résulte que

$$a^{x+h}=a^x+a^x\frac{h\log a}{1}+a^x\frac{h^2\log^2 a}{1.2}+a^x\frac{h^3\log^3 a}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si on suppose

$$y = fx = \text{Log}\, x,$$

on trouve

$$f'x = \frac{1}{x}\,\text{Log}\, e,\quad f''x = -\frac{1}{x^2}\,\text{Log}\, e,\quad f'''x = \frac{2}{x^3}\,\text{Log}\, e,\ \text{etc.}$$

et par conséquent

$$\text{Log}\,(x + h) = \text{Log}\, x + \left(\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} - \frac{1}{4}\frac{h^4}{x^4} + \text{etc.}\right)\text{Log}\, e.$$

34. *Formule de Maclaurin.* — La formule de Taylor conduit au développement d'une fonction fx suivant les puissances ascendantes de sa variable; en effet, si on fait x égal à zéro et qu'on représente par $f0$, $f'0$, $f''0$..... ce que deviennent fx, $f'x$, $f''x$..... quand on y fait x nul, et qu'ensuite on remplace h par x, il vient

$$fx = f0 + xf'0 + \frac{x^2}{1.2}f''0 + \frac{x^3}{1.2.3}f'''0 + \text{etc.}$$

Cette formule est celle de *Maclaurin*. Il est visible qu'elle donne le développement cherché, car les coefficients $f0$, $f'0$, $f''0$..... sont des constantes que l'on pourra déterminer dans chaque cas. Il résulte de cette équation, qu'une fonction peut *en général* être développée suivant les puissances *entières* et *positives* de la variable; mais comme on n'obtient ce développement qu'en donnant à la variable x la valeur particulière zéro, il n'a pas le même degré de généralité que le développement de Taylor. Aussi verrons-nous plus loin que la série de Maclaurin est souvent en défaut.

La série de Maclaurin se met aussi sous une autre forme. Si dans la série de Taylor on remplace x par α et h par $x - \alpha$, en désignant par $f\alpha$, $f'\alpha$..... ce que deviennent fx, $f'x$....., on trouve le développement

$$fx = f\alpha + f'\alpha\frac{(x-\alpha)}{1} + f''\alpha\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + f'''\alpha\frac{(x-\alpha)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

qui sert à développer fx suivant les puissances entières et positives de $x - \alpha$. Il doit être employé toutes les fois que fx est tel que l'une de ses dérivées devient infinie pour $x = 0$. Il est à remarquer que la présence d'une constante α d'une valeur arbitraire dans le second mem-

bre de cette équation n'est qu'apparente, car si on y effectuait tous les calculs indiqués, cette quantité disparaîtrait. Cela résulte d'ailleurs de la remarque que le premier membre étant indépendant de α, cette lettre doit disparaître du second qui est identique au premier.

Pour première application, considérons la fonction $\sqrt[n]{a^n+z^n}$ que nous mettrons sous la forme

$$a\sqrt[n]{1+\frac{z^n}{a^n}}=a\sqrt[n]{1+x}.$$

On trouve

$$fx=a\sqrt[n]{1+x},\quad f'x=a\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}},\quad f''x=a\frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}},\text{ etc.}$$

et par conséquent,

$$f0=a,\quad f'0=a\frac{1}{n},\quad f''0=a\frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{n},\quad f'''0=a\frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{n}\cdot\frac{1-2n}{n}.$$

La formule de Maclaurin donne donc

$$\sqrt[n]{a^n+z^n}=a\left(1+\frac{z^n}{a^n}\frac{1}{n}-\frac{z^{2n}}{a^{2n}}\frac{n-1}{1.2.n^2}+\frac{z^{3n}}{a^{3n}}\frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3.n^3}-\text{etc.}\right).$$

On trouvera pour les fonctions a^x, arc sin x, arc tang x, sin x, cos x, les développements suivants :

$$a^x=1+\frac{x\log a}{1}+\frac{x^2\log^2 a}{1.2}+\frac{x^3\log^3 a}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$\text{arc sin}\,x=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{3.3x^5}{1.2.3.4.5}+\frac{3.3.5.5x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$$

$$\text{arc tang}\,x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\text{etc.}$$

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc.}$$

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{etc.}$$

Si dans la première équation on fait a égal à la base e des logarithmes népériens, et x égal à l'unité, on trouve pour e la valeur

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

à laquelle on a déjà été conduit. En faisant x égal à l'unité dans la troisième équation et observant que $\frac{\pi}{4}$ est l'arc dont la tangente est égale à l'unité, on est conduit à cette expression remarquable d'un huitième de la circonférence,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

35. *Utilité des développements des fonctions en série.* — La principale utilité des développements des fonctions suivant les puissances ascendantes de la variable, est de fournir un moyen de calculer la valeur approchée d'une fonction donnée pour chaque valeur attribuée à la variable. Ainsi le développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

conduit assez promptement à la valeur des sinus de tous les arcs; car il est visible que les termes diminuent très rapidement de valeur, surtout si l'arc x est petit, et quelques-uns des premiers suffiront pour donner une valeur approchée du sinus.

Le développement de $\sqrt[n]{a^n + x^n}$ que nous mettrons sous la forme

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{a^n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{x^2}{a^{2n}} \right.$$
$$\left. + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{3n} \cdot \frac{x^3}{a^{3n}} - \text{etc.}\right)$$

peut servir à calculer la racine $n^{ième}$ d'un nombre A; car si a est la racine approchée de A et x le reste, il est visible que les termes de la série décroîtront, en général, assez rapidement pour qu'on puisse se borner aux premiers termes, du moins lorsque le reste x est petit relativement à a^n.

Un semblable usage des développements des fonctions exige évidemment que les termes diminuent assez rapidement pour qu'on puisse les négliger tous à partir d'un certain rang. Il faut donc rejeter comme inutiles et comme pouvant même donner des résultats fautifs, ainsi qu'on le verra bientôt, les développements qui ne décroissent que lentement et à plus forte raison, ceux dont les termes au lieu de décroître, vont en augmentant. Ainsi, il ne faudrait pas, pour calculer les logarithmes des nombres, employer la formule

$$\text{Log}\,(h+1)=\left(\frac{h}{1}-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}+\text{etc.}\right)\text{Log}\,e$$

que l'on obtient en faisant $x=1$ dans le développement de $\text{Log}(x+h)$; car il est visible que pour une valeur de h supérieure à l'unité, les termes vont en croissant. On ne peut donc l'employer que lorsque h est plus petit que l'unité; mais on le rend propre au calcul des logarithmes des nombres supérieurs en lui faisant subir certaines transformations; ainsi h étant plus petit que l'unité, si on change $+h$ en $-h$, il vient

$$\text{Log}\,(1-h)=\left(-\frac{h}{1}-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}-\text{etc.}\right)\text{Log}\,e$$

et en retranchant l'un de l'autre les deux développements et remarquant que

$$\text{Log}\,(1+h)-\text{Log}\,(1-h)=\text{Log}\left(\frac{1+h}{1-h}\right),$$

on trouve

$$\text{Log}\left(\frac{1+h}{1-h}\right)=2\left(\frac{h}{1}+\frac{h^3}{3}+\frac{h^5}{5}+\frac{h^7}{7}+\text{etc.}\right)\text{Log}\,e.$$

Faisons

$$\frac{1+h}{1-h}=\frac{n+1}{n},\quad \text{d'où}\quad h=\frac{1}{2n+1};$$

il vient enfin en substituant,

$$\text{Log}\,(n+1)=\text{Log}\,n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5}+\text{etc.}\right)\text{Log}\,e.$$

Dans ce développement, les termes décroissent en général très-rapidement, puisque pour $n = 20$, le premier est $\frac{1}{41}$ et le second $\frac{1}{206763}$; on pourra donc s'en servir pour former une table de logarithmes, car ayant trouvé le logarithme d'un nombre n, la formule donne le logarithme du nombre suivant $n + 1$.

36. *Convergence des séries.* — Pour que l'on puisse faire d'un développement l'usage indiqué plus haut, il ne suffit pas que les termes aillent en décroissant; il faut encore que la loi de ce décroissement soit telle que la somme de tous les termes que l'on néglige, à partir d'un certain rang, soit une quantité finie négligeable devant la somme des termes dont on tient compte. Ainsi, s'il s'agit du développement

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

on ne pourra pas considérer la somme d'un nombre quelconque des premiers termes, comme une valeur approchée de la somme totale; en effet en faisant h égal à l'unité dans le développement de $\text{Log}(1 - h)$, on retrouve la suite précédente; la somme totale est donc infinie, puisque $\text{Log}(1 - 1)$ ou $\text{Log}\, o$ est l'infini négatif; et il doit en être de même de la somme des termes depuis un rang quelconque jusqu'à l'infini, puisqu'un nombre limité des premiers termes ne forme évidemment qu'une quantité finie.

On voit par cet exemple combien il importe d'avoir un moyen de s'assurer que la somme des termes à partir d'un certain rang est négligeable devant ceux dont on tient compte. C'est cette recherche qui va faire l'objet des paragraphes suivants.

Nous appellerons en général *série* une suite infinie de quantités se déduisant les unes des autres d'après une loi uniforme et déterminée. Si on désigne par s_n la somme des n premiers termes de la série, s_n sera évidemment une fonction du nombre n et la série est dite *convergente* si la somme s_n converge vers une limite finie et déterminée, lorsque le nombre ou l'indice n converge vers l'infini. Cette limite se nomme *somme* de la série. Si la somme totale converge vers une valeur indéterminée ou vers l'infini, la série est dite *divergente* et n'a plus de somme.

La comparaison d'un développement donné, avec celui formé par une progression géométrique, fournit quelques principes propres à

faire reconnaître la convergence d'une série. Remarquons d'abord que si la série donnée forme une progression géométrique

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad aq^3, \ldots \quad aq^n, \ldots,$$

la somme des n premiers termes est

$$a\frac{1-q^n}{1-q}$$

et il est visible qu'elle converge vers l'infini avec l'indice n, si q est un nombre supérieur à l'unité, puisque dans ce cas q^n est infini; tandis que si q est plus petit que l'unité, elle se réduit à une valeur finie et déterminée $\frac{a}{1-q}$. Il suit de là que la progression géométrique forme une série divergente ou convergente, selon que le coefficient constant q est plus grand ou plus petit que l'unité.

Soit maintenant une série quelconque dont nous supposerons tous les termes positifs,

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n + \text{etc.}$$

dans laquelle u_n est *le terme général*. Je dis que *si l'on représente par q la plus grande valeur numérique que prend $\sqrt[n]{u_n}$ quand on fait croître n depuis un jusqu'à l'infini, la série sera convergente si q est plus petit que l'unité;* en effet l'inégalité

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

ayant lieu par hypothèse, pour toute valeur croissante de n, on en déduit en donnant à n toutes les valeurs possibles et en élevant les deux membres à la puissance n,

$$u_1 < q, \quad u_2 < q^2 \ldots\ldots u_n < q^n$$

et par conséquent

$$u_1 + u_2 + u_3 \cdots + u_n < q + q^2 \cdots + q^n \quad \text{ou} \quad < q\frac{1-q^n}{1-q};$$

or si q est inférieur à l'unité, le second membre converge vers la limite finie $\frac{q}{1-q}$, quand n converge vers l'infini; la somme des termes reste donc inférieure à la quantité finie $\frac{q}{1-q}$. Si quelques

uns des termes de la série étaient négatifs, la convergence existerait à plus forte raison, lorsque la série, en prenant tous les termes positivement, remplit les conditions de convergence. Il suit de là que les séries

$$a \cos x + a^2 \cos 2x + a^3 \cos 3x + a^4 \cos 4x + \text{etc.}$$

$$a \sin x + a^2 \sin 2x + a^3 \sin 3x + a^4 \sin 4x + \text{etc.}$$

sont convergentes quels que soient les signes des différents termes, pourvu que a soit plus petit que l'unité, car on a

$$\sqrt[n]{a^n \cos nx} = a\sqrt[n]{\cos nx}, \quad \sqrt[n]{a^n \sin nx} = a\sqrt[n]{\sin nx}$$

et comme $\cos nx$ et $\sin nx$ sont tout au plus égaux à l'unité, $a\sqrt[n]{\cos nx}$ et $a\sqrt[n]{\sin nx}$ seront pour toute valeur de n plus petits que l'unité.

En général la série

$$u_1 \cos x + u_2 \cos 2x + u_3 \cos 3x + \cdots\cdots + u_n \cos nx + \text{etc.}$$

sera convergente, si cette autre série

$$u_1 + u_2 + u_3 \cdots\cdots + u_n + \text{etc.}$$

l'est elle-même, c'est-à-dire si l'on a $\sqrt[n]{u_n} < 1$ pour toute valeur de n; car la condition de convergence est

$$\sqrt[n]{u_n \cos nx} < 1 \quad \text{ou bien} \quad \sqrt[n]{u_n} < \frac{1}{\sqrt[n]{\cos nx}},$$

condition qui est remplie si $\sqrt[n]{u_n}$ est moindre que l'unité, puisque $\sqrt[n]{\cos nx}$ reste inférieur à l'unité et la fraction du second membre reste supérieure à l'unité.

Il en serait de même si $\cos x$ était remplacé par $\sin x$ et si la progression x, $2x$, $3x$..... était remplacée par toute autre.

La série est encore convergente si la plus grande valeur numérique du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, *quand on fait croître n indéfiniment, reste inférieure à l'unité;* car en représentant cette plus grande valeur par q, on aura par hypothèse,

$$\frac{u_2}{u_1} < q, \quad \frac{u_3}{u_2} < q \cdots\cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} < q$$

d'où l'on tire en multipliant membre à membre les deux, puis les trois, etc. premières inégalités,

$$u_2 < qu_1, \quad u_3 < q^2 u_1, \quad u_4 < q^3 u_1, \ldots\ldots u_n < q^{n-1} u_1$$

et par conséquent en additionnant, on est conduit à l'inégalité

$$u_1 + u_2 + u_3 \cdots + u_n < u_1(1 + q + q^2 + q^3 \cdots + q^{n-1}), \quad \text{ou} \quad < u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Le second membre converge vers la quantité finie $\frac{u_1}{1-q}$ si q est moindre que l'unité, puisque q^n devient nul quand n devient infini.

Enfin *lorsque dans une série les termes sont alternativement positifs et négatifs, il y a convergence quand la valeur absolue des termes va constamment en décroissant;* en effet en écrivant la série de cette manière

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) \cdots + (u_{n-1} - u_n),$$

il est visible que chaque binôme sera positif et que, par conséquent la somme totale est positive ou supérieure à zéro, tandis qu'en écrivant la série comme il suit

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \cdots\cdots$$

tous les binômes auront encore des valeurs absolues positives et comme ils doivent être retranchés de u_1, on voit que la somme de la série est inférieure à u_1. Elle est donc comprise entre zéro et u_1, c'est-à-dire qu'elle est finie.

Il suit de là que la série

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$$

est convergente, tandis que

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

ne satisfait pas à la condition de convergence, attendu que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ est ici $\frac{n}{n+1}$ qui converge vers l'unité quand n tend vers l'infini.

Souvent dans une suite donnée, les conditions de convergence ne se vérifient pas dès les premiers termes, mais à partir d'un certain rang m jusqu'à la fin. Dans ce cas la série est encore dite convergente, parce qu'on conçoit la somme totale composée de deux parties, la première comprenant les m premiers termes qui forment une somme finie, et la seconde comprenant le reste de la suite et obéissant en entier à la loi de convergence, c'est-à-dire ayant aussi une somme finie.

Remarquons que lorsqu'une série est convergente, la somme des n premiers termes représente d'une manière approchée, la somme totale d'autant plus exactement que n est plus grand, puisque la partie que l'on néglige n'est autre que l'excès de la somme totale finie, sur ces n premiers termes.

Considérons en particulier la série de Taylor

$$fx + \frac{h}{1}f'x + \frac{h^2}{1.2}f''x + \frac{h^3}{1.2.3}f'''x + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots.n}f^n x + \cdots.$$

Il résulte de ce qui précède qu'elle sera convergente si l'on a pour toutes les valeurs croissantes de n,

$$\frac{h^{n+1}\dfrac{f^{(n+1)}x}{1.2.3\ldots.(n+1)}}{h^n\dfrac{f^{(n)}x}{1.2.3\ldots.n}} < 1 \quad \text{ou} \quad h < \frac{(n+1)f^{(n)}x}{f^{(n+1)}x}.$$

Cette condition est visiblement remplie à partir d'un certain rang, pour toute valeur de h et pour toute valeur de x, lorsque les dérivées ne sont ni nulles ni infinies, puisque le numérateur $n+1$ peut être pris aussi grand que l'on veut. On voit donc que la série de Taylor est convergente pour toute valeur de h, lorsque toutes les dérivées successives de la fonction sont comprises entre zéro et l'infini, ou plutôt *lorsque le rapport de deux dérivées consécutives est constamment une quantité finie.*

Dans le développement de $(x+h)^m$, le rapport $\dfrac{f^{(n+1)}x}{f^{(n)}x}$ est égal à $\dfrac{m-n}{x}$ qui devient infini avec n; mais la condition de convergence du développement du binôme de Newton est

$$h < \frac{n+1}{m-n}x$$

pour toute valeur de n et pour n infini, elle devient en faisant abstraction du signe, $h < x$. La convergence de *ce développement n'est donc assurée que si le second terme h est plus petit que le premier* x. On trouve la même condition pour la convergence du développement de Log $(x + h)$ du N° 33. Les valeurs de $\sin(x + h)$ et de $\cos(x + h)$ sont convergentes pour toute valeur de h, lorsque x est compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

Puisque la série de Maclaurin se déduit de celle de Taylor en faisant $x = 0$ et en changeant h en x, on conclut de ce qui précède que la série de Maclaurin est convergente quelle que soit la valeur de x, toutes les fois que les dérivées successives conservent des valeurs finies pour $x = 0$. Ainsi le développement

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

est toujours convergent, puisque les dérivées successives sont toutes égales à e^x qui pour $x = 0$ devient l'unité. Quant au dévelopement de arc tang x, savoir

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

comme les dérivées croissent jusqu'à l'infini, sa convergence n'est pas assurée pour toute valeur de x. On a ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2} x^2.$$

La condition de convergence est donc

$$\frac{n}{n+2} x^2 < 1 \quad \text{ou} \quad x^2 < \frac{n+2}{n}$$

pour toute valeur croissante de n. Le second membre tendant vers l'unité pour $n = \infty$, la convergence de la série est assurée pour des valeurs de x plus petites que l'unité. On est conduit au même résultat pour le développement de $\log(1 + x)$ et on reconnaît que les développements de $\sin x$ et de $\cos x$ sont convergents pour toute valeur de x.

37. *Terme sommatoire de la série de Taylor.* — Après avoir

déterminé les $n+1$ premiers termes de la série de Taylor, on peut trouver une fonction de x et h qui complète la valeur de $f(x+h)$; il suffit pour cela de calculer le *terme sommatoire* $\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)\cdot\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n}$, que l'on obtient en dérivant n fois par rapport à h, la valeur de R, c'est-à-dire,

$$R=\frac{f(x+h)-fx}{h},$$

en remplaçant x par $x+h$ et en changeant dans le résultat le signe de h, comme on l'a vu (N° 33).

Eclaircissons ceci par un exemple. Soit la fonction

$$\frac{x^2-1}{x}.$$

Il vient

$$f(x+h)=\frac{(x+h)^2-1}{x+h}.$$

Proposons-nous de développer cette fonction suivant les puissances croissantes de h, en arrêtant le développement aux cinq premiers termes. On aura

$$fx=\frac{x^2-1}{x},\quad f'x=\frac{x^2+1}{x^2},\quad f''x=-\frac{2}{x^3},\quad f'''x=\frac{6}{x^4},$$

$$f''''x=-\frac{24}{x^5}, \text{ etc.}$$

et en substituant ces valeurs dans le développement de Taylor, on trouve

$$\frac{(x+h)^2-1}{x+h}=\frac{x^2-1}{x}+\frac{x^2+1}{x^2}\,h-\frac{h^2}{x^3}+\frac{h^3}{x^4}-\frac{h^4}{x^5}+\left(\frac{d^4R}{dh^4}\right)\frac{h^5}{1.2.3.4}.$$

Pour calculer le terme sommatoire, observons que

$$R=\frac{f(x+h)-fx}{h}=\frac{\dfrac{(x+h)^2-1}{x+h}-\dfrac{x^2-1}{x}}{h}=1+\frac{1}{x(x+h)},$$

et en dérivant par rapport à h,

$$\frac{d^4R}{dh^4} = \frac{1.2.3.4}{(h+x)^5 x}.$$

En y faisant les changements indiqués ci-dessus, il vient

$$\left(\frac{d^4R}{dh^4}\right) \cdot \frac{h^5}{1.2.3.4} = \frac{h^5}{(x+h)x^5};$$

on a donc exactement

$$\frac{(x+h)^2-1}{x+h} = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2+1}{x^2}h - \frac{h^2}{x^3} + \frac{h^3}{x^4} - \frac{h^4}{x^5} + \frac{h^5}{(x+h)x^5},$$

ou en général,

$$\frac{(x+h)^2-1}{x+h} = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2+1}{x^2}h + \cdots\cdots \pm \frac{h^{n+1}}{(x+h)x^{n+1}}.$$

Si on développait $\frac{h^{n+1}}{(x+h)x^{n+1}}$ suivant les puissances de h, soit par la division, soit au moyen du théorème de Maclaurin, on trouverait les termes en h^{n+1}, h^{n+2}, etc., qui font suite à la série obtenue plus haut.

38. *Limites de la série de Taylor.* — La connaissance de la forme du terme sommatoire est utile, parce qu'elle permet souvent d'apprécier le degré d'approximation avec lequel les premiers termes de la série de Taylor donnent la valeur développée de $f(x+h)$ et qu'il fait connaître souvent les conditions de convergence de ce développement. Ainsi dans l'exemple précédent, il y aura convergence pour des valeurs particulières de x et de h, si $\frac{h^{n+1}}{(x+h)x^{n+1}}$ ou $\frac{1}{x+h}\left(\frac{h}{x}\right)^{n+1}$, qui représente la somme des termes depuis celui du rang $n+1$ jusqu'à l'infini, reste fini et converge vers zéro quand n converge vers l'infini, ce qui aura lieu visiblement, quel que soit h, si on donne à x une valeur supérieure à h. Mais le plus souvent les opérations qu'il faut effectuer sont tellement longues et la valeur finale à laquelle on arrive est tellement compliquée, qu'elle ne remplit que fort imparfaitement ce but; aussi se borne-t-on ordinairement à déterminer, ainsi qu'il suit, deux limites entre lesquelles se trouve comprise la valeur de ce terme sommatoire. $\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)$ étant fonction de h, change de valeur avec lui; si

donc on représente par C une limite supérieure et par c une limite inférieure des valeurs par lesquelles il passe, tandis que h va en décroissant jusqu'à zéro, on aura pour toute valeur de h,

$$f(x+h) - fx - f'x \cdot h - f''x \cdot \frac{h^2}{1.2} \cdots - f^{(n)}x \frac{h^n}{1.2.....n} < C \frac{h^{n+1}}{1.2.....n},$$

$$f(x+h) - fx - f'x \cdot h - f''x \cdot \frac{h^2}{1.2} \cdots - f^{(n)}x \frac{h^n}{1.2.....n} > c \frac{h^{n+1}}{1.2.....n}.$$

Or, pour que la première inégalité subsiste quel que soit h, il suffit que la dérivée du premier membre soit, pour toute valeur de h, plus petite que la dérivée du second membre. En effet, pour $h = 0$, les deux membres sont nuls et si la dérivée du premier est toujours plus petite que celle du second, le premier croîtra à partir de zéro, moins rapidement que le second et lui restera par conséquent inférieur. Pour le même motif, il suffit que la dérivée du premier membre soit plus grande que celle du second, pour assurer l'existence de la seconde inégalité pour toute valeur de h. Dérivons donc par rapport à h, en observant que fx, $f'x$, $f''x$,.... ne renferment pas h, et que, d'après ce qu'on a vu (N° 33), $\frac{df(x+h)}{dh}$ est égal à $f'(x+h)$. C et c devront satisfaire à ces nouvelles inégalités,

$$f'(x+h) - f'x - f''x \cdot h \cdots - f^{(n)}x \frac{h^{n-1}}{1.2....(n-1)} < C(n+1) \frac{h^n}{1.2....n},$$

$$f'(x+h) - f'x - f''x \cdot h \cdots - f^{(n)}x \frac{h^{n-1}}{1.2....(n-1)} > c(n+1) \frac{h^n}{1.2....n}.$$

On prouvera par un raisonnement semblable, que ces inégalités sont assurées si l'on a les deux suivantes :

$$f''(x+h) - f''x \cdots - f^{(n)}x \frac{h^{n-2}}{1.2.....(n-2)} < C(n+1) \frac{h^{n-1}}{1.2.....(n-1)},$$

$$f''(x+h) - f''x \cdots - f^{(n)}x \frac{h^{n-2}}{1.2.....(n-2)} > c(n+1) \frac{h^{n-1}}{1.2.....(n-1)}.$$

En continuant les dérivations, on trouve enfin pour condition finale suffisante,

$$f^{(n+1)}(x+h) < C(n+1), \quad f^{(n+1)}(x+h) > c(n+1),$$

d'où l'on tire

$$C > \frac{1}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(x+h), \quad c < \frac{1}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(x+h),$$

conditions qui seront satisfaites, si en désignant par h' et h'' les valeurs de h qui correspondent à la plus petite et à la plus grande valeur que prend $f^{(n+1)}(x+h)$ quand on fait décroître h jusqu'à zéro, on fait

$$C = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x+h''), \quad c = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x+h').$$

La véritable valeur de $\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)$ est donc toujours comprise entre ces deux quantités; or si l'on suppose que la fonction $f^{(n+1)}(x+h)$ reste finie et continue pour toute valeur de la variable comprise entre x et $x+h$, ce qu'on peut toujours admettre tant que l'on ne donne pas à x une valeur particulière, il résulte du principe de continuité des fonctions, qu'en faisant croître h par degrés insensibles, la fonction $f^{(n+1)}(x+h)$ passe par toutes les valeurs comprises entre

$$f^{(n+1)}(x+h') \quad \text{et} \quad f^{(n+1)}(x+h''),$$

pendant que h passe de la valeur h' à la valeur h''; il existe donc une valeur de h comprise entre h' et h'' qui rend $\frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x+h)$ égal à $\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right)$, et cette valeur étant comprise elle-même entre 0 et h, puisque h' et h'' sont compris entre ces limites, elle peut être représentée par θh, θ désignant un certain facteur inconnu compris entre 0 et 1, de sorte que l'on a l'égalité

$$\left(\frac{d^nR}{dh^n}\right) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

La formule de Taylor devient donc

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2} f''x + \frac{h^3}{1.2.3} f'''x \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots.n} f^{(n)}x$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h),$$

ou bien en représentant fx par y,

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{d^ny}{dx^n}\frac{h^n}{1.2.....n}$$

$$+\frac{d^{n+1}f(x+\theta h)}{dx^{n+1}}\frac{h^{n+1}}{1.2.....(n+1)}.$$

Observons que ce dernier terme, ou le *terme limite*, s'obtient en déterminant la valeur de $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ ou $f^{(n+1)}x$ et en changeant x en $x+\theta h$.

Si la fonction $f^{(n+1)}x$ était constamment croissante ou décroissante, depuis $x+0$ jusqu'à $x+h$, les quantités h' et h'' mentionnées plus haut seraient égales à 0 et à h, de sorte que le terme limite ou le reste de la série depuis le terme en h^n exclusivement, serait compris entre

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)}f^{(n+1)}x \quad \text{et} \quad \frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)}f^{(n+1)}(x+h).$$

En général, le reste de la série de Taylor est compris entre la plus grande et la plus petite valeur par lesquelles passe

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)}f^{(n+1)}x,$$

tandis que la variable x va en croissant depuis une valeur particulière x jusqu'à $x+h$. Cette remarque suffit le plus souvent pour faire apprécier le degré d'approximation avec lequel les $n+1$ premiers termes de la série donnent la valeur de $f(x+h)$; ainsi pour la fonction e^x, on trouve

$$e^{x+h}=e^x+e^xh+e^x\frac{h^2}{1.2}\ldots\ldots+e^x\frac{h^n}{1.2.....n}+e^{x+\theta h}\frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)}$$

et l'erreur commise en prenant les $n+1$ premiers termes pour valeur de e^{x+h} se trouve limitée entre la plus grande et la plus petite valeur par lesquelles passe

$$e^x\frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)},$$

tandis que x augmente jusqu'à $x + h$, ou plutôt, comme cette fonction est toujours croissante, l'erreur est comprise entre

$$e^x \frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)} \quad \text{et} \quad e^{x+h} \frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)}.$$

39. *Conséquences relatives à la convergence de la série de Taylor.* — Le théorème que l'on vient de démontrer sur les limites de la série de Taylor, conduit à plusieurs conséquences importantes relatives à la convergence de ces séries. D'abord quelle que soit la fonction primitive fx, en prenant h assez petit, on peut faire en sorte que la somme des termes, à partir de celui du rang n, soit aussi petite que l'on veut, pourvu que toutes les dérivées restent finies, car le terme limite

$$f^{(n+1)}(x + \theta h) \frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)}$$

qui représente cette somme, se compose de deux facteurs, dont le second peut diminuer évidemment avec h jusqu'à zéro, tandis que le premier reste fini, attendu que si x reste variable indéterminé, $x + \theta h$ est aussi indéterminé; le reste de la série peut donc être rendu aussi petit que l'on veut. Cette proposition n'est plus généralement vraie si on donne à x une valeur particulière, à moins que l'on se soit assuré que $f^{(n+1)}(x + \theta h)$ ne prend pas alors une valeur infinie, ce que l'on reconnait en s'assurant que $f^{(n+1)}(x + h)$ reste fini et continu depuis $f^{(n+1)}(x + o)$ jusqu'à $f^{(n+1)}(x + h)$.

En second lieu, si on diminue suffisamment la valeur de h, on peut en général faire en sorte que l'un quelconque des termes de rang n soit supérieur à la somme de tous ceux qui le suivent; il suffit en effet pour cela de prendre h de manière que

$$f^{(n)}x \frac{h^n}{1.2.3.....n} > f^{(n+1)}(x + \theta h) \frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)},$$

ce qui aura lieu si, C étant la plus grande valeur comprise entre $f^{(n+1)}(x + o)$ et $f^{(n+1)}(x + h)$, on a

$$f^{(n)}x > C \frac{h}{n+1}, \quad \text{d'où} \quad h < f^{(n)}x \frac{n+1}{C}.$$

Il est visible que h aura une valeur numérique supérieure à zéro, toutes les fois que C n'est pas infini, ce dont on sera cer-

tain si $f^{(n+1)}x$ reste fini et continu depuis $f^{(n+1)}(x+o)$ jusqu'à $f^{(n+1)}(x+h)$.

40. *Limite de la série de Maclaurin.* — Si dans le développement de Taylor on fait $x = o$ et qu'on y remplace ensuite la lettre h par la lettre x, on trouve

$$fx = fo + f'o \cdot x + f''o \cdot \frac{x^2}{1.2} + f'''o \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + f^{(n)}o \cdot \frac{x^n}{1.2.....n}$$

$$+ f^{(n+1)}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{1.2.....(n+1)},$$

θ étant compris entre o et 1. Le dernier terme de cette suite forme le *terme limite* de la série de Maclaurin, lequel représente la somme de la série infinie, depuis le terme du rang $n+1$, pourvu que $f^{(n+1)}(\theta x)$ soit une quantité finie, ce dont on ne peut s'assurer qu'en vérifiant que $f^{(n+1)}x$ reste fini et continu depuis $f^{(n+1)}(o)$ jusqu'à $f^{(n+1)}(x)$.

Si on applique cette formule aux exemples traités plus haut (N° 33), on trouve, en arrêtant le développement au terme en x^3 inclusivement,

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2 \log^2 a}{1.2} + \frac{a^{\theta x} x^3 \log^3 a}{1.2.3},$$

$$\text{arc} \sin x = x + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{1+2(\theta x)^2}{[1-(\theta x)^2]^{\frac{5}{2}}},$$

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3}\frac{3(\theta x)^2 - 1}{[1+(\theta x)^2]^3},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\cos \theta x,$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} - \frac{3+12(\theta x)^2}{[1-(\theta x)^2]^{\frac{7}{2}}}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4}.$$

41. *Conséquences relatives à la convergence de la série de Maclaurin.* — Les propositions relatives à la convergence de la série de Taylor démontrées au N° 39, sont aussi applicables à la série de Maclaurin. Ainsi, 1° on peut en général, rendre la série aussi convergente que l'on veut en diminuant suffisamment la valeur de la variable x, c'est-à-dire, faire en sorte que la somme des termes à partir d'un certain rang jusqu'à l'infini soit aussi petite que l'on veut. 2° On peut, en géné-

ral, en prenant x assez petit, faire en sorte que l'un des termes soit supérieur à la somme de tous ceux qui le suivent. Dans l'un et l'autre cas, la fonction est supposée telle que toutes ses dérivées successives restent finies et continues pour toute valeur de la variable comprise entre zéro et x.

Puisque le développement de Taylor ou celui de Maclaurin, quand ils sont convergents, représentent $f(x+h)$ et fx d'autant plus exactement que l'on en prend un plus grand nombre de termes, il faut en conclure que les développements entiers ont rigoureusement ces fonctions pour limites, s'ils sont convergents, et peuvent par conséquent leur être identiquement substitués. Il n'en serait pas de même si la série était divergente. Comme dans ce cas la somme des termes que l'on néglige ne converge pas vers zéro, mais vers le terme sommatoire, il est évident que la série, quel que soit le nombre de termes que l'on considère, ne représentera jamais, même d'une manière approchée, la fonction proposée.

En appliquant le théorème de Maclaurin aux fonctions

$$e^{-\frac{1}{x}},\quad e^{-\frac{1}{x^2}}$$

et à quelques autres de forme analogue, il se présente une circonstance remarquable. Si l'on en prend les dérivées successives et que l'on y fasse x nul, pour avoir les valeurs de $f0$, $f'0$, $f''0$, etc., on trouve que tous ces coefficients se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ et on reconnaît que les vraies valeurs sont toutes indéfiniment nulles; de sorte que les développements entiers de ces fonctions semblent égaux à zéro. Cette anomalie s'explique en observant que rien ne prouve que ces développements, dont tous les termes sont nuls, sont convergents et que par conséquent on ne peut rien conclure de cette circonstance, pour la valeur de la somme de tous les termes, si ce n'est que ces fonctions ne sont pas développables suivant les puissances positives de la variable, ce qui du reste est évident, puisque pour x infiniment petit, le développement de Maclaurin procédant suivant les puissances positives croissantes de la variable, doit représenter un infiniment petit d'un ordre limité, tandis que la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ devient un infiniment petit d'un ordre infini, puisqu'on a vu (N° 29) que le rapport $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}$ est nul pour toute valeur de m, quand on fait x nul ou infiniment petit.

Il suit de là que les fonctions $fx + e^{-\frac{1}{x^2}}$ et fx ont en apparence le même développement qui, s'il est convergent, ne représente que fx. On voit par cet exemple, qu'un développement donné ne représente que la partie de la fonction primitive, qui est susceptible d'être développée suivant les puissances entières et positives de la variable. L'autre partie ne laisse de trace que dans le terme sommatoire ou dans le terme limite.

42. *Série de Taylor en défaut.* — La série de Taylor est dite *en défaut* lorsque l'un des coefficients de h dans le développement est infini, ce qui ne peut arriver que si l'une des dérivées successives $f'x$, $f''x$,.... est elle-même infinie. Tant que l'on traite x comme variable ou qu'on ne lui donne pas une valeur déterminée, aucune de ces dérivées ne peut être infinie, du moins aucune dérivée d'un ordre fini; car en supposant que $f^{(n)}x$ soit la première qui prenne cette valeur, la précédente, c'est-à-dire, $f^{(n-1)}x$ serait une certaine fonction finie de la variable x dont la dérivée est infinie, ce qui ne peut arriver, d'après ce qu'on a vu (N° 5); mais quand on donne à x une valeur déterminée, il peut se faire que celle-ci, combinée avec les constantes de la fonction, rende un dénominateur nul, et par suite, la dérivée infinie. Supposons par exemple, que l'une des dérivées successives renferme un terme de la forme $\frac{X}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, X étant quelconque. Il est évident qu'aussi longtemps que x reste arbitraire, le dénominateur $\sqrt{x^2 - a^2}$ devra subsister; mais si l'on donne à x la valeur particulière a, $x^2 - a^2$ deviendra nul et la dérivée sera infinie. On reconnait aussi par cet exemple que si une des dérivées est infinie pour une certaine valeur de la variable, toutes les suivantes devront l'être aussi; car si l'une d'elles prend la forme $\frac{X}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, on sait que toutes les suivantes renfermeront $\sqrt{x^2 - a^2}$ au dénominateur. Cette proposition peut du reste être démontrée d'une manière générale, et en outre on reconnait que lorsqu'une dérivée devient infinie, cette circonstance indique qu'il y a impossibilité de développer $f(x + h)$ suivant les puissances *entières* de h, et que, pour que les coefficients cessent d'être infinis, il faut que l'exposant de h devienne fractionnaire à partir du terme où la dérivée devient infinie. Pour le faire voir, reprenons la démonstration de la formule de Taylor, au moyen des coefficients indéterminés. Supposons $f(x + h)$

développé suivant les puissances ascendantes entières ou fractionnaires de h, et posons

$$f(x+h) = fx + Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} \dots\dots + Nh^{\nu} + Ph^{\pi} + \text{etc.}$$

les coefficients A, B, C..... étant des quantités *finies* et inconnues. Pour déterminer A, B, C..... et les exposants α, β, γ....., remarquons que les deux membres de cette équation étant identiques pour toute valeur de h, les dérivées d'un ordre quelconque des deux membres doivent aussi être égales pour toute valeur de h et par conséquent pour $h = 0$. Or, si l'on égale les dérivées premières, en remarquant que la dérivée de $f(x+h)$ par rapport à h est $f'(x+h)$, c'est-à-dire, est la dérivée de fx en y changeant x en $x+h$ (N° 33), il vient

$$f'(x+h) = \alpha A h^{\alpha-1} + \text{etc.}$$

et comme pour $h = 0$, le premier membre se réduit à $f'x$, le second devra aussi se réduire à une quantité équivalente. Si cette dérivée $f'x$ n'est ni nulle ni infinie, le second membre devra donc aussi se réduire à une quantité comprise entre zéro et l'infini, ce qui ne peut avoir lieu que quand α est entier et égal à l'unité; car s'il était inférieur, $\alpha - 1$ serait négatif et le premier terme, mis sous la forme $\frac{\alpha A}{h^{1-\alpha}}$, deviendrait infini pour h nul; tandis que si α était supérieur à l'unité, $\alpha - 1$ serait positif et ce premier terme serait nul pour h nul, ainsi que tous les termes suivants. α étant donc égal à l'unité, l'équation précédente devient

$$f'(x+h) = A + \beta B h^{\beta-1} + \text{etc.}$$

et pour $h = 0$, il vient

$$A = f'x.$$

En dérivant une seconde fois par rapport à h, on trouve

$$f''(x+h) = \beta(\beta - 1)Bh^{\beta-2} + \text{etc.}$$

et si on suppose que $f''x$ ait une valeur qui n'est ni nulle ni infinie, on fera voir, comme plus haut, que β ne peut être que 2 et on en conclut, en faisant $h = 0$,

$$B = \frac{1}{1.2} f''x.$$

On trouvera de la même manière

$$\gamma = 3, \quad \delta = 4, \ldots.$$

$$C = \frac{1}{1.2.3} f'''x, \quad D = \frac{1}{1.2.3.4} f''''x, \ldots. \quad N = \frac{1}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}x.$$

Ce raisonnement, qui fait connaître les différents termes de la série de Taylor, pourra être continué indéfiniment, tant que les dérivées successives $f^{(n)}x$ conserveront des valeurs comprises entre zéro et l'infini; mais supposons que pour une certaine valeur attribuée à x, la dérivée $f^{(n+1)}x$ devienne infinie; alors le raisonnement précédent se trouve en défaut, lorsqu'on arrive à l'équation

$$f^{(n+1)}(x + h) = \pi(\pi - 1)(\pi - 2)\ldots.. Ph^{\pi-n-1} + \text{etc.};$$

en effet, pour $h = 0$, le premier membre se réduit par hypothèse à une quantité infinie $f^{(n+1)}x$. Or, si π était un nombre entier, le second membre ne pourrait pas devenir infini comme le premier; car l'exposant π étant plus grand que l'exposant n du terme précédent, $\pi - n - 1$ ne pourrait être que zéro ou un nombre entier positif et pour $h = 0$ le second membre se réduirait, dans le premier cas, à la valeur finie

$$\pi(\pi - 1)\ldots..3.2.1.P$$

et dans le second, à zéro; tandis que si π est fractionnaire et compris entre n et $n + 1$, $\pi - n - 1$ sera négatif et ce terme mis sous la forme

$$\pi(\pi - 1)(\pi - 2)\ldots..P\frac{1}{h^{n+1-\pi}}$$

deviendra infini pour $h = 0$ comme le premier membre. On voit donc que, lorsque la dérivée de l'ordre $n + 1$ devient infinie pour une certaine valeur de la variable, le développement de $f(x + h)$ contient nécessairement h avec un exposant fractionnaire compris entre n et $n + 1$, dans le terme qui suit h^n. Réciproquement, si dans le développement de $f(x + h)$ obtenu d'une manière quelconque, il se trouve un exposant fractionnaire compris entre les nombres entiers n et $n + 1$, on reconnait que la dérivée $f^{(n+1)}x$ doit être infinie, puisque en faisant h nul dans l'équation

$$f^{(n+1)}(x + h) = \pi(\pi - 1)(\pi - 2)\ldots..Ph^{\pi-n-1} + \text{etc.},$$

mise sous la forme

$$f^{(n+1)}(x+h) = \pi(\pi-1)(\pi-2)\ldots\ldots P\,\frac{1}{h^{n+1-\pi}} + \text{etc.},$$

le second membre devient infini. On conclut aussi de là que toutes les dérivées suivantes sont infinies; car on a

$$f^{(n+2)}(x+h) = \pi(\pi-1)(\pi-2)\ldots\ldots(\pi-n-1)\,Ph^{\pi-n-2} + \text{etc.}$$

$$f^{(n+3)}(x+h) = \pi(\pi-1)(\pi-2)\ldots\ldots(\pi-n-2)\,Ph^{\pi-n-3} + \text{etc.}$$

dont les premiers membres deviennent $f^{(n+2)}x$, $f^{(n+3)}x$ quand on fait $h=0$ et dont les seconds membres sont tous infinis, puisque $\pi-n-2$, $\pi-n-3$, etc., sont des exposants négatifs.

Si $f^{(n)}x$ est la dernière dérivée qui conserve une valeur finie pour une valeur particulière de x, la série de Taylor pourra être employée jusqu'à ce terme; mais comme tous les suivants deviennent infinis quand on conserve pour h des exposants entiers, il serait inutile de pousser le développement plus loin, à moins d'employer des exposants fractionnaires, et l'on se borne alors à déterminer le terme sommatoire qui suit $f^{(n)}x$. C'est pour ce motif que *la série est dite en défaut.* Dans l'exemple suivant

$$fx = x^3 + (x-b)(x-a)^{\frac{5}{2}},$$

on trouve

$$f'x = 3x^2 + (x-a)^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}(x-b)(x-a)^{\frac{3}{2}}, \quad f''x = 6x + 5(x-a)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{15}{4}(x-b)(x-a)^{\frac{1}{2}}, \quad f'''x = 6 + \frac{45}{4}(x-a)^{\frac{1}{2}} + \frac{15}{8}\,\frac{(x-b)}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}, \text{ etc.}$$

On voit que pour x égal à a, $f'''x$ devient infini ainsi que toutes les dérivées suivantes; il faut donc se borner aux trois premiers termes de la série et employer le terme sommatoire pour le reste. En le développant ensuite, on trouve

$$f(a+h) = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + (a-b)\,h^{\frac{5}{2}} + h^3 + h^{\frac{7}{2}}.$$

Si au lieu d'employer le terme sommatoire, on emploie le terme limite, en supposant que $f^{(n+1)}x$ soit la première dérivée qui devienne

infinie, on ne pourra pas représenter en général le reste de la série par

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3.....(n+1)} f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

parce que $f^{(n+1)}(a+\theta h)$ n'est plus fini et continu depuis $x=a$ jusqu'à $x=a+h$, attendu que $f^{(n+1)}a$ est infini. Il faut dans ce cas se borner à développer $f(x+h)$ jusqu'à la dérivée $f^n x$ et prendre

$$\frac{h^n}{1.2.3.....n} f^{(n)}(a+\theta h)$$

pour terme limite. Ainsi, dans l'exemple précédent, il vient

$$f(a+h)=a^3+3a^2h+\frac{h^2}{1.2}\left(6a+\frac{15}{4}(a-b)(\theta h)^{\frac{1}{2}}+6(\theta h)+\frac{35}{4}(\theta h)^{\frac{3}{2}}\right).$$

43. *Développement d'une fonction suivant les puissances entières d'une fonction donnée de la variable.* — Au lieu de développer une fonction donnée fx suivant les puissances entières et positives de la variable x, on peut se proposer de la développer suivant les puissances entières et positives d'une fonction donnée φx de cette variable, c'est-à-dire, de manière à avoir

$$Fx = A + B(\varphi x) + C(\varphi x)^2 + D(\varphi x)^3 + E(\varphi x)^4 + \text{etc.}$$

A, B, C,.... étant des coefficients constants à déterminer. Pour cela, prenons les dérivées successives des deux membres de cette équation. En représentant par $(\varphi^2 x)'$, $(\varphi^3 x)''$ etc. les dérivées successives de $\varphi^2 x$, $\varphi^3 x$, etc., on aura

$$F'x = B\varphi' x + C(\varphi^2 x)' + D(\varphi^3 x)' + E(\varphi^4 x)' + \text{etc.}$$

$$F''x = B\varphi'' x + C(\varphi^2 x)'' + D(\varphi^3 x)'' + E(\varphi^4 x)'' + \text{etc.}$$

$$F'''x = B\varphi''' x + C(\varphi^2 x)''' + D(\varphi^3 x)''' + E(\varphi^4 x)''' + \text{etc.}$$

. . . .

$$F^{(n)}x = B\varphi^{(n)} x + C(\varphi^2 x)^{(n)} + D(\varphi^3 x)^{(n)} + E(\varphi^4 x)^{(n)} + \text{etc.}$$

Si on représente par α une valeur de x qui rend φx nul, c'est-à-dire, une des racines de l'équation

$$\varphi x = 0,$$

il vient, en développant les dérivées successives de $(\varphi x)^n$ et en remplaçant x par α, ce qui rend φx nul,

$$F\alpha = A,$$
$$F'\alpha = B\varphi'\alpha,$$
$$F''\alpha = B\varphi''\alpha + 1.2\,C\varphi'^2\alpha,$$
$$F'''\alpha = B\varphi'''\alpha + 1.2.3\,C\varphi'\alpha\varphi''\alpha + 1.2.3\,D\varphi'^3\alpha,$$
$$F''''\alpha = B\varphi''''\alpha + 1.2\,C(3\varphi''^2\alpha + 4\varphi'\alpha\varphi'''\alpha) + 1.2.3.6\,D\varphi'^2\alpha\varphi''\alpha + 1.2.3.4\,E\varphi'^4\alpha,$$

. . . .

d'où l'on tire

$$A = F\alpha, \quad B = \frac{F'\alpha}{\varphi'\alpha}, \quad C = \frac{F''\alpha\varphi'\alpha - \varphi''\alpha F'\alpha}{1.2\varphi'^3\alpha},$$

$$D = \frac{F'''\alpha\varphi'^2\alpha - 3F''\alpha\varphi'\alpha\varphi''\alpha + 3F'\alpha\varphi''^2\alpha - F'\alpha\varphi'\alpha\varphi'''\alpha}{1.2.3\varphi'^5\alpha}, \text{ etc.}$$

ou bien

$$A = F\alpha, \quad B = \frac{\frac{dA}{d\alpha}}{\varphi'\alpha}, \quad C = \frac{\frac{dB}{d\alpha}}{2\varphi'\alpha}, \quad D = \frac{\frac{dC}{d\alpha}}{3\varphi'\alpha}, \quad E = \frac{\frac{dD}{d\alpha}}{4\varphi'\alpha}, \quad F = \frac{\frac{dE}{d\alpha}}{5\varphi'\alpha}, \text{ etc.}$$

qui font connaître la loi de la formation des coefficients. Cette formule serait en défaut si la valeur α, qui rend nulle la fonction φx, faisait aussi évanouir $\varphi' x$.

On trouve ainsi pour le développement de $e^{-\frac{1}{x}}$ en fonction de $\log x$,

$$e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}\left(1 + \log x - \frac{1}{1.2.3}\log^3 x + \frac{1}{1.2.3.4}\log^4 x - \frac{2}{1.2.3.4.5}\log^5 x + \text{etc.}\right).$$

Si dans la formule générale, on fait φx égal à x, α est alors zéro et on trouve

$$A = F0, \quad B = F'0, \quad C = \frac{1}{1.2}F''0, \quad D = \frac{1}{1.2.3}F'''0, \quad \text{etc.}$$

et elle devient

$$Fx = F0 + F'0 . x + F''0 \cdot \frac{x^2}{1.2} + F'''0 \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

qui est la formule de Maclaurin.

44. *Formule pour le retour des suites.* — Si dans la même formule générale on fait $Fx = x$, on trouve

$$A = \alpha, \quad B = \frac{1}{\varphi'\alpha}, \quad C = -\frac{\varphi''\alpha}{2\varphi'^3\alpha}, \quad D = \frac{1}{2.3} \cdot \frac{3\varphi''^2\alpha - \varphi'\alpha\varphi'''\alpha}{\varphi'^5\alpha}, \quad E = \text{etc.}$$

et par suite,

$$x = \alpha + \frac{1}{\varphi'\alpha}\varphi x - \frac{1}{2}\frac{\varphi''\alpha}{\varphi'^3\alpha}\varphi^2 x + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{3\varphi''^2\alpha - \varphi'\alpha\varphi'''\alpha}{\varphi'^5\alpha}\varphi^3 x - \text{etc.} \ldots\ldots (1)$$

Cette formule est inverse de celle de Maclaurin. Cette dernière donnait le développement d'une fonction suivant les puissances entières et positives de la variable, tandis que la nouvelle donne le développement d'une variable suivant les puissances de la fonction.

Ainsi, le développement de Maclaurin a donné

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

et si l'on prend $\log(1 + x)$ pour φx, la valeur α de x qui rend φx nul, est zéro, le nouveau développement devient donc

$$x = \log(1 + x) + \frac{1}{1.2}\log^2(1 + x) + \frac{1}{1.2.3}\log^3(1 + x) + \text{etc.}$$

et en général, si l'on a

$$y = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.} = \varphi x,$$

on en déduit

$$y = \varphi x = bx + cx^2 + ex^3 + \text{etc.}, \quad \varphi' x = b + 2cx + 3ex^2 + \text{etc.}$$

et comme pour $x = 0$, φx est nul, on voit que α est zéro et il vient

$$x = \frac{1}{b}y - \frac{c}{b^3}y^2 + \frac{2c^2 - be}{b^5}y^3 - \text{etc.}$$

Telle est la formule générale pour le *retour des suites.*

45. *Formule pour la résolution des équations numériques.* — Comme α doit rendre φx nul, si on remplace φx par $\varphi x - \varphi \alpha$ dans

la formule générale du numéro précédent, α sera quelconque, les coefficients A, B, C, D..... deviendront

$$A = F\alpha, \quad B = \frac{F'\alpha}{\varphi'\alpha}, \quad C = \frac{\frac{dB}{d\alpha}}{2\varphi'\alpha}, \quad D = \frac{\frac{dC}{d\alpha}}{3\varphi'\alpha} \dots\dots$$

et la formule prendra la forme

$$Fx = F\alpha + \frac{F'\alpha}{\varphi'\alpha}(\varphi x - \varphi\alpha) + C(\varphi x - \varphi\alpha)^2 + D(\varphi x - \varphi\alpha)^3 + \text{etc.}$$

dans laquelle α, x, φ et F sont quelconques. Quand x est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, elle se réduit à

$$Fx = F\alpha - \frac{F'\alpha}{\varphi'\alpha}\varphi\alpha + C\varphi^2\alpha - D\varphi^3\alpha + \text{etc.}$$

qui donne la valeur d'une fonction quelconque F d'une racine de l'équation $\varphi x = 0$. Si on remplace Fx par x, cette équation devient

$$x = \alpha - \frac{\varphi\alpha}{\varphi'\alpha} - \frac{1}{1.2}\frac{\varphi''\alpha\varphi^2\alpha}{\varphi'^3\alpha} - \frac{1}{1.2.3}\frac{3\varphi''^2\alpha - \varphi'\alpha\varphi'''\alpha}{\varphi'^5\alpha}\varphi^3\alpha - \text{etc.}$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante, en représentant $-\frac{1}{\varphi'\alpha}$ par ψ, par ψ' la dérivée par rapport à α, par $(\psi\psi')'$ la dérivée du produit $\psi\psi'$ et ainsi de suite,

$$x = \alpha + \psi\varphi\alpha + \psi\psi'\frac{\varphi^2\alpha}{1.2} + \psi(\psi\psi')'\frac{\varphi^3\alpha}{1.2.3} + \psi[\psi(\psi\psi')']'\frac{\varphi^4\alpha}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

dans laquelle α est quelconque, pourvu que la série soit convergente. Cette expression est utile pour la résolution des équations numériques; car si α est une valeur suffisamment approchée d'une racine réelle de l'équation

$$\varphi x = 0,$$

la quantité $\varphi\alpha$ suivant laquelle la série est développée, aura une valeur très petite, la série sera convergente et donnera la valeur de la racine x. Cette racine est celle qui est la plus rapprochée de α, puisque $x - \alpha$ a visiblement une valeur unique et très petite si $\varphi\alpha$ est très petit.

Soit par exemple à résoudre l'équation

$$x^3 - 2x - 20 = 0;$$

comme il est visible que x diffère peu de 3, on fera α égal à ce nombre et on aura

$$\varphi\alpha = \alpha^3 - 2\alpha - 20 = 1,$$
$$\varphi'\alpha = 3\alpha^2 - 2 = 25,$$
$$\varphi''\alpha = 18,\quad \varphi'''\alpha = 6,\quad \varphi''''\alpha = 0,\quad \varphi'''''\alpha = 0, \text{ etc.}$$

En substituant, on trouve

$$x = 3 - \frac{1}{25} - \frac{9}{15625} - \frac{137}{9765625} - \text{etc.} = 2{,}95940997$$

valeur exacte à moins d'un dix-millionième près.

La formule de Maclaurin peut aussi servir à démontrer un théorème important d'algèbre. Considérons une fonction quelconque imaginaire, c'est-à-dire, contenant d'une manière quelconque le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$, que nous désignerons par ε. La fonction proposée pourra être désignée par $f\varepsilon$. Or, quelle que soit la signification de ε, on peut concevoir cette fonction développée suivant les puissances croissantes de ε et mise sous la forme suivante, $f0$, $f'0$, $f''0$,.... désignant ce que deviennent $f\varepsilon$, $\frac{df}{d\varepsilon}$, $\frac{d^2f}{d\varepsilon^2}$, etc. quand on y fait $\varepsilon = 0$,

$$f\varepsilon = f0 + \varepsilon f'0 + \frac{\varepsilon^2}{1.2} f''0 + \ldots\ldots$$

Si on remplace ε par sa valeur $\sqrt{-1}$, on trouve

$$f\varepsilon = f0 - \frac{f''0}{1.2} + \frac{f''''0}{1.2.3.4} - \text{etc.} + \sqrt{-1}\left(f'0 - \frac{f'''0}{1.2.3} + \frac{f'''''0}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)$$

dans laquelle le second membre est visiblement de la forme $P + Q\sqrt{-1}$. Il suit de là que toute fonction imaginaire peut être mise sous la forme $P + Q\sqrt{-1}$ et l'équation précédente fait connaître la valeur des deux fonctions réelles P et Q, du moins lorsqu'elles remplissent les conditions de convergence.

46. *Maximum et minimum des fonctions d'une seule variable.* — Pour troisième application, occupons-nous de la théorie des maximum et minimum des fonctions d'une seule variable. Si l'on fait croître x d'une manière continue, fx variera elle-même, en général, d'une manière continue et il arrivera le plus souvent que cette fonction, après

avoir été en croissant dans un certain intervalle, finira par diminuer si l'on continue à faire croître x. L'état de la fonction au moment où elle cesse de croître pour commencer à décroître se nomme *maximum*, et on donne le nom de *minimum* à l'état de la fonction, lorsqu'après avoir été en diminuant dans un certain intervalle, elle commence ensuite à croître. La théorie des maximum et minimum a pour objet de déterminer la valeur qu'il faut donner à x pour que la fonction devienne *maximum* ou *minimum*. En donnant à x un accroissement et une diminution h, on trouve

$$f(x+h)=fx+hf'x+\frac{h^2}{1.2}f''x\cdots\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h),$$

$$f(x-h)=fx-hf'x+\frac{h^2}{1.2}f''x\cdots\cdots\pm\frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n}f^{(n)}(x-\theta' h).$$

Pour que x corresponde à un *maximum* ou un *minimum* de la fonction fx, il faut évidemment que $f(x+h)$ et $f(x-h)$ soient tous deux plus petits ou tous deux plus grands que fx, quel que petit que soit h, c'est-à-dire, que $f(x+h)-fx$ et $f(x-h)-fx$ et par conséquent les valeurs suivantes

$$hf'x+\frac{h^2}{1.2}f''x\cdots\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)$$

$$-hf'x+\frac{h^2}{1.2}f''x\cdots\cdots\pm\frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n}f^{(n)}(x-\theta' h)$$

aient le même signe, ce qui ne peut avoir lieu que si $f'x$ est nul, puisque ces deux valeurs commencent par un terme de signe différent et qu'on a vu (N° 39) qu'on peut toujours, en prenant h assez petit, faire en sorte que ce terme l'emporte sur la somme de tous les suivants et par conséquent, donne son signe à la série. $f'x$ étant nul, les deux différences $f(x+h)-fx$ et $f(x-h)-fx$ seront de même signe, car leurs valeurs se réduisent aux suivantes

$$+\frac{h^2}{1.2}f''x+\frac{h^3}{1.2.3}f'''x\cdots\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)$$

$$+\frac{h^2}{1.2}f''x-\frac{h^3}{1.2.3}f'''x\cdots\cdots\pm\frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n}f^{(n)}(x-\theta' h)$$

dans lesquelles les premiers termes sont tous deux de même signe et

peuvent être rendus supérieurs à la somme des termes qui suivent. Il résulte de ce qu'on vient de voir, qu'en résolvant l'équation

$$f'x = 0,$$

les racines sont les valeurs de x qui rendent fx *maximum* ou *minimum*. Remarquons que dans le cas du *maximum*, ces deux différences doivent être toutes deux négatives, ce qui ne peut arriver que si $\frac{h^2}{1.2} f''x$ est négatif quel que soit h, c'est-à-dire, si $f''x$ est négatif. On trouvera de même que dans le cas du *minimum*, il faut que $f''x$ soit positif. Ainsi, après avoir déterminé les valeurs de x correspondant à un *maximum* ou à un *minimum*, on substituera ces valeurs dans $f''x$ et on aura un *maximum* ou un *minimum* suivant que le résultat de la substitution sera négatif ou positif.

Cette règle est en défaut lorsque $f''x$ est nul en même temps que $f'x$. Alors les valeurs trouvées pour x ne correspondent pas nécessairement à des *maximum* ou des *minimum*; car il vient dans ce cas

$$f(x+h) - fx = + \frac{h^3}{1.2.3} f'''x \cdots\cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n} f^{(n)}(x + \theta h),$$

$$f(x-h) - fx = - \frac{h^3}{1.2.3} f'''x \cdots\cdots \pm \frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n} f^{(n)}(x - \theta' h),$$

et on fera voir, comme on l'a fait plus haut, que les deux seconds membres, qui commencent avec des signes différents, ne peuvent être tous deux positifs ou tous deux négatifs que si $f'''x$ est nul; de sorte que cette condition devra être jointe aux deux précédentes pour qu'il y ait *maximum* ou *minimum*, qu'on distinguera ensuite par le signe que prendra la dérivée suivante $f''''x$. Si celle-ci était aussi nulle, on prouverait que $f'''''x$ doit être nul, et ainsi de suite. On énonce donc la règle générale de cette manière : *Pour avoir la valeur de x correspondant à un* MAXIMUM *ou à un* MINIMUM *d'une fonction, on égalera à zéro la dérivée du premier ordre; on en tirera les valeurs de x, que l'on substituera dans $f''x$; il y aura* MAXIMUM *ou* MINIMUM *suivant que le résultat de la substitution sera négatif ou positif. Si le résultat est nul, on substituera les valeurs de x dans $f'''x$ et il n'y aura* MAXIMUM *ou* MINIMUM *que si cette dérivée est égale à zéro; dans ce cas, on distinguera le* MAXIMUM *du* MINIMUM *par le signe que prendra $f''''x$ après la substitution, et ainsi de suite.*

Cette théorie est insuffisante lorsque, pour la valeur particulière de la variable qui répond au maximum, le développement de Taylor est en défaut dès le premier terme, c'est-à-dire, lorsque la dérivée première $f'x$ prend une valeur infinie. On évite ce cas d'exception en présentant cette théorie comme il suit : ce qui caractérise le maximum, c'est cette circonstance que, en faisant varier x, fx cesse de croître pour aller en décroissant. Or, on a vu (N° 6) qu'une fonction est croissante ou décroissante selon que sa dérivée est positive ou négative; d'où il suit que pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut que la dérivée change de signe, ce qui, quand la fonction reste réelle, a lieu en passant par zéro ou par l'infini. D'où il suit que les valeurs cherchées de la variable ne peuvent être que les racines de l'une ou l'autre des deux équations

$$f'x=0,\quad f'x=\infty.$$

La théorie précédente n'avait conduit qu'à la première équation de condition. Comme une fonction qui passe par zéro ou par l'infini ne change pas nécessairement de signe, les racines de ces équations ne répondent pas toujours à un maximum ou un minimum et il est nécessaire de s'assurer que la fonction primitive fx est à la fois croissante ou à la fois décroissante quand on remplace x par $x+h$ et $x-h$, h restant très petit.

Appliquons cette théorie à quelques exemples. Soit la fonction $a-bx+x^2=fx$. On en tire

$$f'x=-b+2x=0,\quad x=\frac{b}{2},\quad f''x=2.$$

$x=\frac{b}{2}$ correspond donc à un *minimum*. Pour $\frac{x}{1+x^2}$, on trouve

$$f'x=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0,\ \text{ou}\ 1-x^2=0\ \text{et}\ x=\pm 1,\ f''x=-2x\frac{3-x^2}{(1+x^2)^3}.$$

La première racine donne $-\frac{1}{2}$ pour $f''x$ et correspond à un *maximum*. La seconde donne $\frac{1}{2}$ et correspond à un *minimum*. Pour l'équation

$$x^2-2\,axy-y^2+1=0,$$

on fera

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-ay}{y+ax}=0,\quad x-ay=0,\quad y=\frac{x}{a}.$$

Si l'on substitue cette valeur de y dans l'équation primitive, il vient

$$x^2 - 2x^2 - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0 \quad \text{d'où} \quad x = \pm \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{et} \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

On a ensuite

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1 + a^2)\frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{(ax + y)^2}$$

qui, pour les deux valeurs de x devient, en remarquant que $\frac{dy}{dx}$ est nul,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{+1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

La première racine correspond donc à un *minimum* de la fonction y et la seconde à un *maximum*. Pour $\frac{a^x}{x}$, on trouve sans peine que $x = \frac{1}{\log a}$ donne un minimum ou un maximum suivant que a est plus grand ou plus petit que l'unité.

Nous terminerons ces applications, en résolvant quelques problèmes d'analyse et de géométrie dont la solution dépend de la théorie des *maximum* et *minimum*.

Trouver un nombre x tel que sa racine $x^{\text{ième}}$ soit la plus grande possible. Le problème posé en équation donne

$$y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}},$$

et on trouve

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x) = x^{\frac{1}{x}}\frac{1 - \log x}{x^2},$$

et par conséquent

$$1 - \log x = 0, \quad \text{d'où} \quad x = e = 2{,}71828\ldots\ldots$$

On peut s'assurer que la solution correspond à un *maximum*.

Partager un nombre donné a en deux parties telles que le produit de la $n^{\text{ième}}$ puissance de l'une par la $m^{\text{ième}}$ puissance de l'autre, soit un MAXIMUM. En représentant le produit par y et l'une des divisions par x, il vient

$$y = x^n(a - x)^m \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = (a - x)^m n x^{n-1} - x^n m (a - x)^{m-1}$$

$$= x^{n-1}\{na - (m + n)x\}(a - x)^{m-1} = 0.$$

On trouve que

$$x = \frac{an}{m+n}$$

répond à un *maximum*. $x=0$ donne un *minimum* si n est un nombre entier pair et $x=a$ donne aussi un minimum quand m est pair.

Si $m=n=1$, il vient $x=\frac{a}{2}$, ce qui apprend que le produit des deux parties d'une droite donnée est un *maximum* quand les deux parties sont égales.

Trouver parmi les cylindres droits d'un volume donné, celui dont la surface totale, y compris les bases, est la plus petite possible.

v étant le volume donné, si on représente par y la surface totale, par x le rayon de la base et par x' la hauteur, on trouve pour la surface des deux bases $2\pi x^2$, pour la surface convexe, $2\pi xx'$ et pour la surface totale $2\pi x^2 + 2\pi xx'$. Mais le volume est $\pi x^2 x'$; on a donc

$$v = \pi x^2 x' \quad \text{d'ou} \quad x' = \frac{v}{\pi x^2}, \quad y = 2\pi x^2 + \frac{2v}{x},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = 4\pi x - \frac{2v}{x^2} = 0, \quad 4\pi x^3 - 2v = 0, \quad x = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}, \quad x' = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}.$$

Mener d'un point donné, à une courbe donnée, la droite la plus longue et la plus courte possibles. Soient (x', y') les coordonnées du point donné, $y=\varphi x$ l'équation de la courbe, (x, y) les coordonnées du point de la courbe où la droite doit aboutir et l la longueur de cette droite. Il vient

$$l^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2,$$

et en remplaçant y par sa valeur,

$$l^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + (\varphi x)^2 - 2y'\varphi x + y'^2,$$

d'où

$$l \cdot \frac{dl}{dx} = x - x' + \varphi' x(\varphi x - y'),$$

et par conséquent les points cherchés sont donnés par les racines de l'équation (*)

$$x - x' + \varphi' x (\varphi x - y') = 0.$$

Il y a quelquefois certaines précautions à prendre dans le choix de la variable indépendante pour pouvoir déterminer le *maximum* ou le *minimum* d'une fonction au moyen de la théorie générale. Le problème suivant offre un exemple de ce cas. Proposons-nous de chercher la droite la plus longue et la plus courte qu'on puisse mener d'un point A (fig. 5) à un cercle. (x, y) étant les coordonnées d'un point de la circonférence et $(x = a,\ y = 0)$ les coordonnées du point A. La distance l de A à un point de la circonférence est donnée par

$$l = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

et comme l'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

(*) Comme l'équation de la normale à la courbe $y = \varphi x$ au point (xy) est (N° 52)

$$X - x = -\frac{dy}{dx}(Y - y),$$

en la faisant passer par le point (x', y') il vient

$$x' - x = -\frac{dy}{dx}(y' - y) \quad \text{ou} \quad x - x' + \varphi' x(\varphi x - y') = 0.$$

on voit donc que ces droites minimum ou maximum sont des normales abaissées du point (x', y') sur la courbe.

Pour distinguer le maximum du minimum, il faut remonter à la dérivée de l et on reconnait qu'il y a maximum ou minimum suivant que

$$1 + \varphi'^2 x + \varphi'' x(\varphi x - y')$$

est négatif ou positif.

Si on désigne par (α, β) les coordonnées du centre de courbure au point (x, y), comme on a (N° 55)

$$y - \beta = \varphi x - \beta = -\frac{1 + \varphi'^2 x}{\varphi'' x},$$

on reconnait en substituant, qu'il y a maximum ou minimum suivant que $\varphi'' x(\beta - y')$ est négatif ou positif. Quand la courbe tourne sa concavité vers l'axe des X, $\varphi'' x$ est positif (N° 63) et il y a maximum ou minimum suivant que y' est supérieur ou inférieur à β, c'est-à-dire, suivant que le point donné est plus éloigné ou plus rapproché de l'axe des X que le centre de courbure. Dans le cas de la convexité, c'est l'inverse. Il suit de là que *si le point donné est placé dans la partie convexe de la courbe, la normale est toujours un minimum*, tandis que *si le point est placé du côté concave, il y a maximum ou minimum selon que la normale est plus grande ou plus petite que le rayon de courbure, ou suivant que la distance à la courbe, du point donné est plus grande ou plus petite que le rayon de courbure.*

il vient en éliminant y,

$$l = \sqrt{(x-a)^2 + r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ax},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dl}{dx} = \frac{-a}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ax}}.$$

Il est visible que cette valeur de $\frac{dl}{dx}$ ne peut pas être égalée à zéro quelque valeur que l'on donne à x. Cette difficulté cesse d'exister si, au lieu d'éliminer y, on élimine x; car on trouve alors

$$l = \sqrt{y^2 + x^2 + a^2 - 2ax} = \sqrt{r^2 + a^2 - 2a\sqrt{r^2 - y^2}}$$

et il vient, en élevant les deux membres au carré et en dérivant ensuite,

$$l\frac{dl}{dy} = \frac{ay}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

d'où l'on tire pour le *maximum* ou le *minimum*,

$$y = 0, \quad l = \sqrt{r^2 + a^2 \mp 2ar} = a \pm r.$$

47. *Valeurs imaginaires des sinus et cosinus. Logarithmes de l'unité.* — Pour quatrième application analytique du calcul différentiel, nous chercherons les expressions imaginaires des sinus et cosinus. Reprenons le développement trouvé pour e^x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

série qui, comme on l'a vu, est convergente quelle que soit la valeur réelle de x. Remplaçons successivement x par $x\sqrt{-1}$ et $-x\sqrt{-1}$. Il viendra

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$+ \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right),$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$
$$-\sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right).$$

Comme les seconds membres se composent de deux séries convergentes pour toute valeur de x, ceux-ci sont eux-mêmes convergents et en les rapprochant des séries trouvées pour $\cos x$ et $\sin x$, ces égalités deviennent

$$\left.\begin{aligned} e^{x\sqrt{-1}} &= \cos x + \sqrt{-1}\sin x \\ e^{-x\sqrt{-1}} &= \cos x - \sqrt{-1}\sin x, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

d'où l'on tire en les additionnant et en les retranchant successivement,

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces relations dues à Euler, entre les lignes trigonométriques et les fonctions exponentielles imaginaires $e^{x\sqrt{-1}}$, $e^{-x\sqrt{-1}}$ ne sauraient évidemment servir à calculer les valeurs numériques de $\cos x$ et de $\sin x$; mais elles doivent être considérées comme des symboles qui résument toutes les propriétés des lignes trigonométriques et qui peuvent même servir à les démontrer au moyen des propriétés des quantités exponentielles. En prenant les logarithmes népériens des deux membres de la première équation (1), il vient

$$\log(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) = x\sqrt{-1}.$$

Soit π la demi circonférence d'un cercle ayant son rayon égal à l'unité, et n un nombre entier quelconque. Il vient en faisant $x = n\pi$,

$$\log(\cos n\pi + \sqrt{-1}\sin n\pi) = n\pi\sqrt{-1}.$$

Or, si n est un nombre pair, $n\pi$ sera un nombre entier de circonférences et l'on aura

$$\cos n\pi = 1, \quad \sin n\pi = 0;$$

et par suite

$$\log 1 = n\pi\sqrt{-1},$$

qui apprend que l'unité a un nombre infini de logarithmes, puisqu'on peut donner à n toutes les valeurs paires 0, 2, 4, 6, 8, etc. Les logarithmes correspondants sont $0, 2\pi\sqrt{-1}$, $4\pi\sqrt{-1}$, $8\pi\sqrt{-1}$, etc. Le premier est seul réel; c'est celui que donnent les tables. Les autres logarithmes sont tous imaginaires.

Si n est un nombre impair, on trouve

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = -1$$

et par suite

$$\log(-1) = n\pi\sqrt{-1}$$

c'est-à-dire, que l'unité négative a un nombre infini de logarithmes qui sont $\pi\sqrt{-1}$, $3\pi\sqrt{-1}$, $5\pi\sqrt{-1}$, $7\pi\sqrt{-1}$, etc. Ils sont tous imaginaires. On conclut de là qu'*un nombre positif quelconque a un nombre infini de logarithmes dont un seul est réel et que ceux des nombres négatifs, aussi en nombre infini, sont tous imaginaires*, car on a

$$\log a = \log(a \times 1) = \log a + n\pi\sqrt{-1}$$

$$\log(-a) = \log(a \times -1) = \log a + n\pi\sqrt{-1},$$

n étant pair dans la première équation et impair dans la seconde.

48. *Racines de l'unité. Racines des équations à deux termes.* — Les formules précédentes font connaître les différentes racines de l'unité, c'est-à-dire, les différentes valeurs de $\sqrt[m]{1}$; en effet, la théorie des logarithmes donne

$$\log\sqrt[m]{1} = \frac{1}{m}\log 1,$$

ou bien, en substituant la valeur précédente de log 1 dans laquelle n est un nombre pair quelconque,

$$\log\sqrt[m]{1} = \frac{n\pi\sqrt{-1}}{m}$$

et en passant des logarithmes aux nombres,

$$\sqrt[m]{1} = e^{\frac{n\pi\sqrt{-1}}{m}},$$

équation qui donne toutes les racines de l'unité, en remplaçant successivement n par tous les nombres entiers pairs. Ces valeurs de $\sqrt[m]{1}$ peuvent être mises sous une forme plus commode pour les calculs, en remplaçant x par $\frac{n\pi}{m}$ dans (1) du N° 47, ce qui donne

$$\sqrt[m]{1} = \cos\frac{n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{m}.$$

La première valeur de $\sqrt[m]{1}$ est 1 correspondant à $n = 0$. C'est la seule racine réelle, si m est un nombre impair; mais s'il est pair, en faisant passer n par toutes ses valeurs paires croissantes, l'une d'elles sera égale à m; $\frac{n\pi}{m}$ se réduit alors à π et comme $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$, l'une des valeurs de $\sqrt[m]{1}$ sera -1. Les autres racines sont toutes imaginaires. Il est à remarquer que quoique le nombre des valeurs qu'on peut attribuer à n soit infini, le nombre de valeurs distinctes qui en résultent pour $\sqrt[m]{1}$ est limité et égal au nombre m, conformément à la théorie des équations; car il est visible que dans

$$\sqrt[m]{1} = e^{\frac{n\pi\sqrt{-1}}{m}},$$

toute valeur paire de n inférieure ou égale à $2m$, donne pour $\sqrt[m]{1}$ des valeurs distinctes, dont le nombre est égal à m, tandis que pour des valeurs croissantes de n, qui dépassent $2m$, on retombe nécessairement sur les valeurs déjà obtenues et dans l'ordre où celles-ci se sont présentées; en effet si on remplace n par $2m + n$, il vient

$$\sqrt[m]{1} = e^{\frac{(2m+n)\pi\sqrt{-1}}{m}} = e^{2\pi\sqrt{-1}}\, e^{\frac{n\pi\sqrt{-1}}{m}},$$

ou bien en remarquant que $e^{2\pi\sqrt{-1}} = +1$,

$$\sqrt[m]{1} = e^{\frac{n\pi\sqrt{-1}}{m}}.$$

On retrouve donc toutes les racines précédentes.

Par un moyen semblable, on trouvera les différentes valeurs de $\sqrt[m]{-1}$; il suffira de donner à n un nombre n de valeurs impaires à partir de $n = 1$.

On voit aussi que toutes les valeurs de $\sqrt[m]{1}$ et $\sqrt[m]{-1}$ sont exprimées par $e^{\frac{2i\pi\sqrt{-1}}{m}}$ et $e^{\frac{(2i+1)\pi\sqrt{-1}}{m}}$, en donnant à i toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $m - 1$.

Ce qui précède conduit à la résolution générale des équations à deux termes

$$y^m - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y^m + 1 = 0;$$

car on en tire

$$y = \sqrt[m]{1}, \quad y = \sqrt[m]{-1}$$

et les valeurs de $\sqrt[m]{1}$ et de $\sqrt[m]{-1}$ trouvées plus haut font connaître les différentes racines des deux équations. Si l'on avait

$$y^m - a = 0,$$

en représentant par r la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique de a, on poserait

$$y = rz$$

et l'équation deviendrait

$$r^m z^m - a = 0 \quad \text{ou} \quad z^m - 1 = 0,$$

en remarquant que r^m est égal à a. On tire de cette dernière,

$$z = \sqrt[m]{1} \quad \text{et} \quad y = r\sqrt[m]{1}$$

dans laquelle on remplacera $\sqrt[m]{1}$ par toutes ses valeurs.

On obtient aussi toutes les racines d'une équation de la forme

$$y^{2m} + py^m = q;$$

on trouve d'abord

$$y^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

ou, en représentant par p' et p'' les deux valeurs du second membre supposées réelles,

$$y^m = p', \quad y^m = p''.$$

r' et r'' étant les racines $m^{\text{ièmes}}$ arithmétiques de p' et p'', il vient comme plus haut,

$$y = r'\sqrt[m]{1}, \quad y = r''\sqrt[m]{1}.$$

Si le second membre était imaginaire et de la forme $a + b\sqrt{-1}$, on poserait

$$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha).$$

Les valeurs de ρ et de α sont déterminées par les conditions

$$a = \rho\cos\alpha, \quad b = \rho\sin\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a},$$

et ces valeurs font prendre à y^m la forme suivante :

$$y^m = \rho(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha) = e^{\alpha\sqrt{-1}} \times \rho \times 1,$$

d'où l'on tire

$$y = e^{\frac{\alpha}{m}\sqrt{-1}} \times \sqrt[m]{\rho}\sqrt[m]{1} = \sqrt[m]{\rho}\, e^{\frac{(\alpha + n\pi)}{m}\sqrt{-1}}$$

$$= \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\alpha + n\pi}{m}\right),$$

dans laquelle $\sqrt[m]{\rho}$ est la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique de ρ, n un nombre pair quelconque et α le plus petit arc qui a $\frac{b}{a}$ pour tangente.

Cette équation fait connaître toutes les racines $m^{\text{ièmes}}$ de $a + b\sqrt{-1}$ en donnant à n toutes les valeurs entières et paires depuis 0 jusqu'à $2m$, et par suite, les racines de l'équation

$$y^{2m} + py^m = q$$

en remplaçant a et b par $-\frac{p}{2}$ et $\pm\sqrt{-q - \frac{p^2}{4}}$.

49. *Développement de* $\sin^m x$ *et* $\cos^m x$. — Les expressions imaginaires trouvées pour $\sin x$ et $\cos x$ conduisent très simplement au développement des puissances entières des sinus et cosinus en fonction

des sinus et cosinus des arcs multiples, c'est-à-dire aux valeurs de $\sin^m x$ et $\cos^m x$ en fonction de $\sin mx$, $\sin (m-2)x$, $\sin (m-4)x$, etc., m étant entier et positif; en effet, de l'équation

$$2 \cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}},$$

on tire en élevant les deux membres à la puissance m,

$$2^m \cos^m x = e^{mx\sqrt{-1}} + m e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} e^{(m-4)x\sqrt{-1}} + \text{etc.}$$

et, si on remarque que x étant quelconque dans les équations symboliques, peut y être remplacé par mx, $(m-2)x$, etc., et que par conséquent on a

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \cos mx + \sqrt{-1} \sin mx$$

$$e^{(m-2)x\sqrt{-1}} = \cos (m-2)x + \sqrt{-1} \sin (m-2)x$$

. . . .

la valeur de $\cos^m x$ deviendra

$$2^m \cos^m x = \cos mx + m \cos (m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2} \cos (m-4)x$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos (m-6)x + \ldots\ldots$$

$$+ \sqrt{-1} \left[\sin mx + m \sin (m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2} \sin (m-4)x + \text{etc.}\right]$$

Comme le premier membre de l'équation est réel, le second doit l'être aussi et par conséquent le coefficient de $\sqrt{-1}$ doit nécessairement être nul, ce qu'il est du reste facile de vérifier directement, quand m est entier, en observant que la parenthèse contient la suite des sinus

$$\sin mx, \quad \sin (m-2)x, \quad \sin (m-4)x \ldots. \quad \sin (4-m)x,$$

$$\sin (2-m)x, \quad \sin (-m)x$$

qui sont égaux deux à deux et de signes contraires, ainsi que les coefficients $m, \frac{m(m-1)}{1.2}$, etc. placés à égale distance des deux extrémités;

tous les termes se détruisent donc deux à deux et la valeur de $\cos^m x$ se réduit à

$$2^m \cos^m x = \cos mx + m \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \text{etc.}$$

qu'on simplifie encore par la remarque que les termes placés à égale distance des deux extrémités sont aussi égaux, et qu'il suffit par conséquent de doubler ceux de la première moitié. Une marche analogue donnera la valeur de $\sin^m x$. On trouve ainsi, si m est pair, en écrivant $2m$ au lieu de m,

$$2^{2m}(-1)^m \sin^{2m} x = \cos 2mx - 2m\cos(2m-2)x$$
$$+ \frac{2m(2m-1)}{1.2}\cos(2m-4)x - \text{etc.}$$

et si m est impair,

$$2^m(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin^m x = \sin mx - m\sin(m-2)x$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x - \text{etc.}$$

Ces développements doivent être prolongés jusqu'à $\cos(-2m)x$ et $\sin(-m)x$; mais ils se simplifient comme plus haut, en remarquant que les termes de la seconde moitié ne font que reproduire ceux de la première.

50. *Formules de Moivre. Développement de $\cos mx$ et $\sin mx$.* — Si l'on élève à la puissance m les deux membres des équations

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

il vient

$$e^{mx\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m,$$
$$e^{-mx\sqrt{-1}} = (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^m.$$

D'un autre côté, en remplaçant x par mx dans les premières équations, on trouve

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx$$
$$e^{-mx\sqrt{-1}} = \cos mx - \sqrt{-1}\sin mx;$$

on a donc, quelle que soit la valeur de x, les relations

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx,$$

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx - \sqrt{-1}\sin mx,$$

qui ont été données pour la première fois par Moivre. On en tire

$$\cos mx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m + (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m}{2},$$

$$\sin mx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m - (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}.$$

Si on développe les puissances $m^{ièmes}$ par la formule du binôme, les imaginaires disparaissent et l'on a les expressions suivantes de $\cos mx$ et $\sin mx$ en fonction des puissances de $\cos x$ et $\sin x$,

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2} x \sin^2 x$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4} x \sin^4 x + \text{etc.}$$

$$\sin mx = m\cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} x \sin^3 x + \text{etc.}$$

Ces deux développements qui s'arrêtent lorsque m est un nombre entier, sont inverses de ceux qui ont été démontrés au numéro précédent.

51. *Quelques valeurs symboliques remarquables.* — Nous terminerons ces applications analytiques, en faisant connaître plusieurs formules symboliques remarquables. Si par la règle du N° 34 on cherche la limite vers laquelle converge l'expression $\left(1 + \frac{h}{n}\right)^{\frac{n}{h}}$, quand n converge vers l'infini, on trouve

$$\text{limite de} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^{\frac{n}{h}} = e, \text{ d'où } \lim \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n = e^h,$$

e désignant, à l'ordinaire, la base des logarithmes Népériens. En faisant h égal à $\log a$, il vient

$$a = \lim \left(1 + \frac{\log a}{n}\right)^n,$$

d'où l'on tire pour l'expression symbolique d'un logarithme,

$$\log a = \lim n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \infty\left(\sqrt[\infty]{a} - 1\right).$$

On a vu plus haut que les différentes valeurs du logarithme de l'unité négative sont données par la formule

$$\log(-1) = n\pi\sqrt{-1},$$

n étant un nombre entier impair quelconque. En faisant n égal à l'unité, on trouve pour expression symbolique de la demi circonférence du cercle,

$$\pi = \frac{\log(-1)}{\sqrt{-1}} = 2\frac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -2\log\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}},$$

d'où l'ou tire, en passant des logarithmes aux nombres,

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = \left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}.$$

CHAPITRE III.

Applications géométriques du calcul différentiel. Tangentes et normales aux courbes planes. Sous-tangentes. Sous-normales. — Courbes osculatrices. — Propriétés des courbes osculatrices. — Cercle osculateur. — Rayon de courbure. — Centre de courbure. — Courbure d'une courbe en un point donné. — Équation d'une développée. — Propriétés des rayons de courbure. — Dérivée de l'arc d'une courbe. — Propriétés des développées. — Équation et propriétés de la cycloïde. — Épicycloïde. — Analyse d'une courbe. Points singuliers. — Point multiple. — Point de rebroussement. — Point saillant. — Point d'arrêt. Point conjugué. — Théorème sur les points singuliers. — Point d'inflexion. — Coordonnées polaires. — Rayons de courbure et développées dans les courbes polaires. — Sous-tangentes et sous-normales polaires. — Application aux spirales. — Courbes enveloppes. — Caustiques. — Inverse du problème des courbes enveloppes.

52. *Applications géométriques du calcul différentiel. Tangentes et normales aux courbes planes. Sous-tangentes. Sous-normales.* — Pour première application géométrique du calcul différentiel, occupons-nous de la détermination des tangentes aux courbes planes. Soit

$$y = fx$$

l'équation d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires des X et des Y. On a vu (N° 4) que si en un point (x, y), on mène une touchante, celle-ci fait avec l'axe des X un angle dont la tangente trigonométrique est égale à la dérivée de la variable dépendante y, ou $\frac{dy}{dx}$.

Cette proposition renferme toute la théorie des tangentes et suffit pour déterminer de grandeur et de position, les droites qui en dépendent,

telles que sous-tangentes, normales, sous-normales, etc. Représentons par (x', y') les coordonnées courantes de la tangente. Puisque celle-ci passe par le point de contact (x, y) de la courbe et qu'elle fait avec l'axe des X un angle dont la tangente est $\frac{dy}{dx}$, son équation est de la forme

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

Le point T ou la tangente Tt (fig. 2) rencontre l'axe des X, s'obtient en faisant $y' = 0$ dans l'équation précédente et en tirant la valeur de x' qui est

$$x' = x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

Telle est la valeur de AT. Pour avoir la sous-tangente PT, il faut de AP ou x retrancher AT, et il vient

$$\text{sous-tangente PT} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

La longueur de la tangente MT se tire du triangle rectangle MPT. Il vient

$$\text{MT} = \sqrt{\text{MP}^2 + \text{PT}^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}}.$$

La normale MQ passant par le point M dont les coordonnées sont (x, y), a une équation de la forme

$$y' - y = \operatorname{tang}\alpha\,(x' - x),$$

(x', y') étant les coordonnées courantes de MQ et α l'angle que fait MQ avec l'axe des X; mais comme cette droite est perpendiculaire sur MT, on a pour condition

$$1 + \operatorname{tang}\alpha\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}};$$

l'équation de la normale est donc

$$x'-x=-\frac{dy}{dx}\left(y'-y\right).$$

La distance AQ s'obtient en faisant $y'=0$ et en tirant la valeur de x'. On trouve

$$\mathrm{AQ}=y\frac{dy}{dx}+x.$$

On déduit de là pour la sous-normale PQ,

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}-\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}-x=y\frac{dy}{dx}.$$

On trouvera de même pour la longueur MQ de la normale,

$$\mathrm{MQ}=\sqrt{\overline{\mathrm{MP}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2}=\sqrt{y^2+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Prenons pour exemple la courbe qui a pour équation

$$y^2x-2yx^2+x^3-1=0.$$

On en tire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2+4xy-3x^2}{2xy-2x^2}=\frac{3x-y}{2x}.$$

Les équations de la tangente et de la normale à cette courbe au point (x, y) sont donc

$$y'-y=\frac{3x-y}{2x}(x'-x)$$

$$y'-y=\frac{2x}{y-3x}(x'-x).$$

Les valeurs de la sous-tangente, de la sous-normale, etc., s'obtiendront tout aussi facilement.

Ce qu'on vient de voir, conduit à la solution de tous les problèmes relatifs aux tangentes ou aux normales des courbes. Proposons-nous, par exemple, de mener par un point extérieur ou intérieur une normale à une courbe donnée. Si (x', y'), (a, b), (x, y) sont les coordonnées courantes, celles du point donné et celles du point de

rencontre, et si $y = fx$ est l'équation de la courbe, l'équation de la normale sera de la forme

$$x' - x = -\frac{dy}{dx}(y' - y),$$

et comme cette droite doit passer par le point (a, b), il en résultera

$$a - x = -\frac{dy}{dx}(b - y),$$

ou bien

$$a - x = -f'x\,(b - fx)$$

dans laquelle x appartient au pied de la normale. Les racines réelles de cette équation fixeront donc la position des différentes normales. Comme cette équation est la même que celle que nous avons trouvée en cherchant les droites les plus longues et les plus courtes qu'on peut mener d'un point (a, b) à une courbe $y = fx$ (fin du N° 46), on en a conclu que les normales se confondent avec ces dernières droites.

55. *Courbes osculatrices.* — Une des principales applications géométriques du calcul différentiel est celle qui a pour objet la théorie des *courbes osculatrices*. Convenons de représenter par

$$y = fx \text{ et } y = \varphi x$$

les équations de deux courbes rapportées aux mêmes axes et dont la première désignée par f est entièrement déterminée et invariable, tandis que la seconde φ est susceptible de prendre une infinité de formes et de positions différentes par rapport à la première, par suite de l'indétermination d'un certain nombre de coefficients ou paramètres littéraux a, b, c, d....... contenus dans φx. Si on dispose de quelques-unes des indéterminées a, b, c.... de manière à rendre la seconde courbe tangente en un point donné de la première et qu'on donne aux autres les valeurs qui rendent le contact le plus intime possible, c'est-à-dire, celles qui rapprochent le plus possible la courbe variable de la courbe fixe, dans le voisinage du point de contact, cette courbe variable ainsi déterminée est alors appelée *osculatrice* de la courbe fixe.

En désignant par x, y les coordonnées du point de contact, on doit avoir pour ce point

$$y = fx, \quad y = \varphi x$$

et l'équation

$$fx = \varphi x$$

exprime que les deux courbes ont un point commun.

De même, pour rendre les courbes tangentes ou pour leur donner une touchante commune en ce point, il faut évidemment que a, b, c.... satisfassent à l'équation de condition

$$f'x = \varphi' x,$$

$f'x$ et $\varphi' x$ étant les dérivées premières de fx et de φx. Quant aux autres indéterminées a, b, c.... que nous supposerons en nombre n, leur valeur s'obtient en égalant les dérivées successives des fonctions fx et φx, c'est-à-dire que ces valeurs sont les racines des équations suivantes : (1)

$$fx = \varphi x, \quad f'x = \varphi' x, \quad f''x = \varphi'' x, \quad f'''x = \varphi''' x \ldots f^{(n-1)} x = \varphi^{(n-1)} x$$

leur nombre étant égal à n ou au nombre des indéterminées a, b, c.... Pour démontrer que la courbe ainsi obtenue, est en effet l'osculatrice cherchée, c'est-à-dire celle de toutes les courbes variables qui se rapproche le plus de la courbe fixe dans le voisinage du point de contact, il faut faire voir qu'à une distance très petite de ce point, l'intervalle entre la courbe fixe f et la courbe φ telle que nous venons de la déterminer, est moindre que l'intervalle, pris à la même distance, entre la courbe fixe f et l'une quelconque des courbes variables obtenues en attribuant à a, b, c.... des valeurs autres que celles qui satisfont aux équations précédentes. Soit M (fig. 6) le point de contact, Mf la courbe fixe, $M\varphi$ la courbe qu'on vient de déterminer et h un intervalle PP' très petit. Il est visible que les ordonnées M'P' et N'P' sont données par les développements de $f(x+h)$ et $\varphi(x+h)$, et que, par conséquent, l'intervalle M'N' des deux courbes est la différence de ces développements, c'est-à-dire, que l'on a, en supprimant les termes égaux,

$$\text{M'N'} = (f^{(n)} x - \varphi^{(n)} x) \frac{h^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n} + \text{etc.}$$

tandis que, si on compare la courbe Mf à une des autres courbes $M\psi$, pour laquelle les équations (1) ne sont pas toutes satisfaites, en désignant l'équation de celle-ci par

$$y = \psi x,$$

l'intervalle M'N'' sera encore donné par la différence de $f(x+h)$ et de $\psi(x+h)$, et comme quelques-unes des équations (1) n'ont pas lieu, la différence des deux développements ne commencera pas au

terme en h^n, mais à un terme en $h^{n'}$, n' étant inférieur à n, de sorte que l'on aura

$$M'N'' = (f^{(n')}x - \psi^{(n')}x)\frac{h^{n'}}{1.2.3....n'} + \text{etc.}$$

En prenant le rapport et supprimant le facteur commun $h^{n'}$, il vient

$$\frac{M'N'}{M'N''} = \frac{(f^n x - \varphi^n x)\,\dfrac{h^{n-n'}}{1.2.3....n} + \text{etc.}}{(f^{(n')}x - \psi^{(n')}x)\dfrac{1}{1.2.3....n'} + \text{etc.}}$$

et il est visible qu'en faisant h très petit, $M'N'$ sera moindre que $M'N''$; car le numérateur peut être diminué autant que l'on veut, puisqu'il converge vers zéro, en diminuant le facteur commun h, tandis que le dénominateur se réduira au terme fini

$$(f^{(n')}x - \psi^{(n')}x)\frac{1}{1.2.3....n'};$$

$M\psi$ est donc plus éloigné de Mf que $M\varphi$, qui est par conséquent une osculatrice, et cette osculatrice est dite de *l'ordre* $n-1$, parce que les $n-1$ premières dérivées sont égales à celles tirées de l'équation de la courbe fixe. *Le nombre de constantes arbitraires contenues dans l'équation de la courbe variable, diminué d'une unité, indique donc l'ordre de l'osculatrice ou l'ordre du contact des deux courbes.*

54. *Propriétés des courbes osculatrices.* — Les courbes osculatrices jouissent de plusieurs propriétés générales indépendantes de la forme de l'équation choisie pour les représenter, ou ce qui est la même chose, indépendante de la nature de la courbe variable. Remarquons d'abord que si dans la valeur de $M'N'$ on fait h très petit, le premier terme devant lequel les autres sont négligeables, contenant le facteur h^n, est un infiniment petit de l'ordre n. Il résulte de là que *lorsque deux courbes sont osculatrices de l'ordre $n-1$, leur intervalle pris à une distance infiniment petite du premier ordre du point de contact est un infiniment petit de l'ordre n.* Comme la direction des axes auxquels on rapporte les deux courbes est entièrement arbitraire, il est visible que cette propriété subsiste, quelle que soit la direction suivant laquelle on mesure la distance des deux courbes. Une seconde propriété consiste en ce que *de deux osculatrices quelconques d'un*

ordre différent, tracées en un même point d'une courbe fixe donnée, celle qui a un contact de l'ordre le plus élevé se rapproche le plus de la courbe fixe. La démonstration de ce théorème résulte immédiatement de ce qui a été dit plus haut; en effet, si

$$y = fx, \quad y = \varphi x, \quad y = \psi x$$

sont les équations de la courbe fixe et des deux osculatrices contenant, la première, un nombre n de constantes arbitraires et la seconde, un nombre n' moindre que n, on trouvera comme précédemment, que l'intervalle entre la courbe fixe et chacune des deux osculatrices est

$$(f^{(n)}x - \varphi^{(n)}x)\frac{h^n}{1.2.3.....n} + \text{etc.}; \quad (f^{(n')}x - \psi^{(n')}x)\frac{h^{n'}}{1.2.3.....n'} + \text{etc.}$$

et on prouvera en cherchant le rapport de ces deux valeurs, comme on l'a déjà fait, que la première différence tend à devenir moindre que la seconde à mesure que h diminue.

Il résulte aussi de la valeur qu'on vient de trouver pour la différence M'N' des ordonnées dans la courbe et dans l'osculatrice, savoir :

$$\text{M'N'} = \text{M'P'} - \text{N'P'} = (f^{(n)}x - \varphi^{(n)}x)\frac{h^n}{1.2.3.....n} + \text{etc.}$$

que, *lorsqu'une osculatrice est d'ordre impair, elle ne fait que toucher la courbe, tandis qu'une osculatrice d'ordre pair la traverse au point de contact;* car dans le premier cas,

$$(f^{(n)}x - \psi^{(n)}x)\frac{h^n}{1.2.3...n}$$

conserve le même signe quand on rend h négatif, tandis qu'il change de signe dans le second cas, et comme en prenant h très petit, ce terme donne son signe à la série qui représente la valeur de M'N', on en conclut que pour un ordre impair, la différence M'N' conserve le même signe des deux côtés du point M et qu'il en change quand l'ordre est pair, c'est-à-dire, que les deux branches de l'osculatrice sont placées du même côté de la courbe dans le premier cas et de côtés différents dans le second.

La considération des infiniment petits conduit fort simplement à une théorie des courbes osculatrices un peu différente de la précédente. A ce nouveau point de vue, on donne le nom d'osculatrice de l'ordre $n-1$ à une courbe qui a $n-1$ éléments consécutifs communs avec une courbe donnée, ou, ce qui revient au même, qui a n points communs,

ces points étant infiniment rapprochés. En désignant par x l'abscisse de l'extrémité du premier élément, par $x + dx, x + dx' \ldots . x + dx^{(n-1)}$ celles des points suivants, et représentant par $y = fx$, $y = \varphi x$ les équations des deux courbes, cette coïncidence est déterminée par les égalités suivantes :

$$fx = \varphi x, \quad f(x + dx) = \varphi(x + dx), \quad f(x + dx') = \varphi(x + dx') \ldots .. \\ f(x + dx^{(n-1)}) = \varphi(x + dx^{(n-1)}),$$

si on développe chacune de ces fonctions au moyen de la formule de Taylor, en ne conservant que les deux premiers termes dans la seconde équation, les trois premiers dans la troisième, etc., et en supprimant dans les deux membres de chacune d'elles, les termes égaux, on retrouve les équations de condition auxquelles on était parvenu plus haut.

55. *Cercle osculateur.* — Les courbes osculatrices offrent un moyen facile et commode pour reconnaître la forme qu'affecte en chacun de ses points, une courbe qui n'est donnée que par son équation; car si l'on choisit pour osculatrice une certaine courbe dont la forme est bien connue, et que l'on détermine, comme on vient de le voir, les constantes qui entrent dans son équation, un petit arc pris sur l'osculatrice dans le voisinage du point de contact se confondra sensiblement avec l'arc correspondant pris sur la courbe proposée, et cette identité sera d'autant plus parfaite que l'osculatrice sera d'un ordre plus élevé.

La courbe qui présente le plus d'avantages comme osculatrice, est incontestablement le cercle. L'uniformité de sa courbure et la simplicité de sa construction le rendent éminemment propre à cet usage. Concevons que l'on mène une suite de cercles tangents à une courbe donnée, en un certain point et qu'on détermine celui de tous ces cercles qui se rapproche le plus de la courbe; un arc de ce cercle se confondra sensiblement dans une petite étendue, avec un arc de la courbe donnée et en fera connaître la courbure au point de contact. Appliquons donc au cercle en particulier ce que nous avons dit des osculatrices en général. En désignant par α et β les coordonnées du centre et par γ le rayon, l'équation du cercle est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2,$$

qui tiendra lieu de l'équation générale des osculatrices

$$y = \varphi x.$$

Elle renferme trois constantes α, β et γ dont on peut disposer; le cercle ne peut donc être qu'une osculatrice du deuxième ordre. Pour déterminer ces trois constantes, représentons par x, y les coordonnées du point de contact et posons les trois équations de condition,

$$fx = \varphi x, \quad f'x = \varphi' x, \quad f''x = \varphi'' x.$$

Celles-ci deviennent

$$fx = \beta \pm \sqrt{\gamma^2 - (x-\alpha)^2}, \quad f'x = \mp \frac{x-\alpha}{\sqrt{\gamma^2 - (x-\alpha)^2}}$$

$$f''x = \mp \frac{\gamma^2}{[\gamma^2 - (x-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

qu'il faut résoudre par rapport à α, β et γ. A cet effet, on éliminera γ entre la première et les deux autres, et l'on aura d'abord

$$f'x = -\frac{x-\alpha}{fx-\beta}, \quad f''x(fx-\beta) = -1 - \frac{(x-\alpha)^2}{(fx-\beta)^2};$$

d'où l'on tire

$$fx - \beta = -\frac{1+(f'x)^2}{f''x} \ldots\ldots (1)$$

$$x - \alpha = \frac{1+(f'x)^2}{f''x} f'x \ldots\ldots (2)$$

En substituant ces valeurs dans la première, on en tire

$$\gamma = \pm \frac{[1+(f'x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''x} \ldots\ldots (3)$$

Si l'on convient de représenter par $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ les dérivées tirées de l'équation de la courbe fixe, les trois équations peuvent aussi s'écrire ainsi :

$$x - \alpha = \frac{dy}{dx} \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\gamma = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Le cercle osculateur étant une osculatrice du second ordre, il résulte de ce qu'on a vu à la fin du N° 54 qu'il coupe *en général* la courbe donnée au point de contact.

56. *Rayon de courbure. Centre de courbure. Courbure d'une courbe en un point donné.* — Les trois équations (1), (2) et (3) donnent les valeurs de α, β et γ nécessaires pour que le cercle soit une osculatrice du second ordre; la troisième en fait connaître le rayon. Comme cette longueur suffit pour faire apprécier la courbure du cercle et par conséquent de la courbe au point de contact, on donne à γ le nom de *rayon de courbure*. Les valeurs de α et de β fixent la position du centre du cercle osculateur, point auquel on a donné le nom de *centre de courbure*. Le rayon d'un cercle osculateur étant une quantité essentiellement positive, on conserve celui des deux signes qui rend la valeur de γ positive; ainsi, si $f''x$ est négatif, on emploie le signe moins.

Prenons pour exemple l'ellipse dont l'équation est

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

On en tire

$$A^2y\frac{dy}{dx} + B^2x = 0,\quad A^2y\frac{d^2y}{dx^2} + A^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B^2x}{A^2y},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{A^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B^2}{A^2y} = -\frac{B^2 + \frac{B^4x^2}{A^2y^2}}{A^2y} = -\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{B^2}{y^3},$$

et en substituant, il vient

$$\gamma = \frac{(A^4y^2 + B^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{A^4B^4} = \frac{[A^4 - (A^2 - B^2)x^2]^{\frac{3}{2}}}{A^4B},$$

à cause de

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Aux sommets de l'ellipse, on a $x = 0$ ou $x = A$, et γ y devient

$$\gamma = \frac{A^2}{B}\quad \text{et}\quad \gamma = \frac{B^2}{A}.$$

Pour la parabole, qui a pour équation

$$y^2 = 2px\,;$$

on trouve

$$\gamma = \sqrt{\frac{(2x+p)^3}{p}}.$$

La courbure d'un arc de cercle étant dans le rapport inverse de son rayon, on convient de prendre pour mesure de la courbure, le rapport $\frac{1}{r}$, r étant le rayon. Pour une courbe quelconque, la courbure en un point donné se confond avec celle du cercle osculateur relatif à ce point. Il suit de là que si γ est le rayon de courbure au point donné, la courbure de la courbe sera représentée par $\frac{1}{\gamma}$.

57. *Équation d'une développée.* — Les équations (1) et (2) du N° 55 donnent les valeurs des coordonnées α et β du centre de courbure pour un point quelconque (x, y) d'une courbe donnée. Supposons que l'on construise ce centre et que l'on en fasse autant pour tous les points de cette courbe, l'ensemble de tous ces centres de courbure constituera une nouvelle courbe dont la forme et la position seront intimement liées à celles de la courbe primitive. Ce lieu géométrique des centres de courbure a été appelé *développée* de la courbe donnée. Cette dernière, comparée à la développée, se nomme *développante*. L'équation de la développée d'une courbe est facile à trouver, car après avoir déterminé les valeurs de α et de β en fonction de x et de y, on aura trois équations contenant x, y, α, β, savoir : la valeur de α, la valeur de β et l'équation de la courbe, entre lesquelles on peut éliminer x et y. — L'équation finale ne contiendra plus que α et β et sera par conséquent l'équation de la développée.

Prenons pour exemple l'ellipse dont on s'est occupé (N° 56); on trouve, en substituant les valeurs de $f'x$ et $f''x$ dans (1) et (2) du N° 55,

$$\alpha = x - \frac{1 + \frac{B^4 x^2}{A^4 y^2}}{\frac{B^2}{A^2}\frac{B^2}{y^3}} \cdot \frac{B^2 x}{A^2 y} = x\left(\frac{A^4 B^2 - A^4 y^2 - B^4 x^2}{A^4 B^2}\right),$$

$$\beta = y - \frac{1 + \frac{B^4 x^2}{A^4 y^2}}{\frac{B^2}{A^2}\frac{B^2}{y^3}} = y\left(\frac{A^2 B^4 - A^4 y^2 - B^4 x^2}{A^2 B^4}\right).$$

En tenant compte de l'équation de la courbe

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

on trouve

$$x = \frac{A^{\frac{4}{3}}}{(A^2 - B^2)^{\frac{1}{3}}}\alpha^{\frac{1}{3}}, \quad y = \frac{B^{\frac{4}{3}}}{(A^2 - B^2)^{\frac{1}{3}}}\beta^{\frac{1}{3}}$$

et en substituant dans l'équation de l'ellipse, il vient pour équation de la développée,

$$A^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} + B^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} = (A^2 - B^2)^{\frac{2}{3}}.$$

58. *Propriétés des rayons de courbure.* — Remarquons d'abord que le rayon de courbure en un point d'une courbe est dirigé suivant la normale à la courbe, puisque la tangente est commune à la courbe et au cercle osculateur et qu'un rayon est perpendiculaire à la tangente au cercle. En désignant par (x', y') les coordonnées courantes, l'équation de cette normale est

$$y' - y = -\frac{1}{f'x}(x' - x),$$

et comme cette droite indéfinie renferme le rayon de courbure, cette équation doit être satisfaite par les coordonnées α, β; on a donc

$$\beta - y = -\frac{1}{f'x}(\alpha - x)$$

qui exprime une relation entre les coordonnées x, y d'un point de la courbe et les coordonnées α, β du centre de courbure correspondant. On peut, dans cette équation, considérer x comme une variable indépendante ; alors y est une fonction de x donnée par l'équation de la courbe, α est une fonction de x donnée par l'équation (2) du (N° 55) et β est une fonction de α donnée par l'équation de la développée et par conséquent, une fonction de fonction de x. Si donc on dérive l'équation précédente par rapport à x, il vient

$$\frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx} - \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f'x}\left(\frac{d\alpha}{dx} - 1\right) + \frac{f''x}{f'^2x}(\alpha - x),$$

ou bien, en remplaçant $\alpha - x$ par sa valeur tirée de (2) (N° 55) et remarquant que $f'x$ n'est autre chose que $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{ou} \quad \frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Or, si on mène au centre de courbure une touchante à la développée, elle fera avec l'axe des X un angle dont la tangente trigonométrique est $\frac{d\beta}{d\alpha}$; cette dernière équation exprime donc que la touchante à la courbe donnée et la touchante à la développée au point correspondant, sont perpendiculaires entre elles. Comme les rayons de courbure sont aussi perpendiculaires aux touchantes de la courbe donnée, on conclut de là que *les normales d'une courbe sont partout tangentes à la développée et que la partie de la normale comprise entre la courbe donnée et la développée représente le rayon de courbure.* Cette propriété permet de considérer la développée d'une courbe comme formée par l'intersection deux à deux des normales menées aux différents points de cette courbe.

59. *Dérivée de l'arc d'une courbe.* — La propriété des développées qui reste à démontrer, supposant connue la dérivée d'un arc de courbe par rapport à l'abscisse, c'est-à-dire, la limite du rapport de l'accroissement d'un arc de courbe à l'accroissement de l'abscisse, nous nous occuperons d'abord de cette recherche. Soit s la longueur d'un arc de courbe CM (fig. 7), compté depuis un point fixe C jusqu'en un point M, ayant x, y pour coordonnées. Il est visible que s varie avec x et est par conséquent une fonction de cette variable; si donc on augmente x de $\Delta x = PP'$, s augmentera de Δs ou MM', et c'est la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ qu'on se propose de trouver; pour cela remarquons qu'en prenant h assez petit, on peut toujours faire en sorte que l'arc MM' soit concave ou convexe dans toute son étendue, par rapport à l'axe des X et on sait qu'alors la longueur de cet arc est comprise entre la corde MM' et un polygone quelconque enveloppant tel que MNM' construit ici en menant la tangente MN à l'extrémité M de l'arc. En remarquant que M'Q est Δy, que le cosinus de l'angle NMQ est

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 \mathrm{NMQ}}} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2x}},$$

et que

$$\mathrm{MN} = \frac{\mathrm{MQ}}{\cos \mathrm{NMQ}} = \Delta x\sqrt{1+f'^2x}, \quad \mathrm{NM'} = \mathrm{NQ} - \mathrm{M'Q}$$

$$= \mathrm{MQ}\operatorname{tang}\mathrm{NMQ} - \mathrm{M'Q} = \Delta x f'x - \Delta y,$$

on trouve

$$\Delta s > \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \Delta s < \Delta x \sqrt{1 + f'^2 x} + \Delta x f'x - \Delta y,$$

et par conséquent

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{1 + f'^2 x} + f'x - \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

On voit donc que le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ est compris entre les valeurs des seconds membres de ces deux inégalités; or, si pour passer à la limite, on fait converger Δx vers zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ convergera vers $\frac{dy}{dx}$ ou $f'x$, de sorte que les deux valeurs entre lesquelles se trouve compris $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ tendent à se réduire à $\sqrt{1 + f'^2 x}$ qui est par conséquent la limite de ce rapport, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2 x} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

pour la dérivée cherchée. Le radical du second membre est précédé du double signe, et il est visible qu'il faut prendre le signe plus ou le signe moins, suivant qu'un accroissement donné à x fera croître ou diminuer l'arc s.

La considération des infiniment petits conduit fort simplement à ce résultat; car si MQ est infiniment petit, l'arc MM′ le sera aussi et se confondra avec sa corde; le triangle rectangle MM′Q donnera donc

$$\text{MM}' \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{\text{MQ}^2 + \text{M}'\text{Q}^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

et en divisant par dx, on retrouve l'équation obtenue plus haut.

60. *Propriété des développées.* — Revenons maintenant aux développées et reprenons l'équation trouvée plus haut,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2.$$

On a vu au N° 58 que y et α sont des fonctions de x et que β est fonction de α; en outre, il est évident que γ change de valeur avec la position du centre de courbure, et est par conséquent fonction de α; si donc on dérive l'équation précédente par rapport à x, il vient

$$(x - \alpha)\left(1 - \frac{d\alpha}{dx}\right) + (y - \beta)\left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}\right) = \gamma\frac{d\gamma}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}.$$

En substituant les valeurs de $x-\alpha$, $y-\beta$ et γ obtenues au N° 55 et celle de $f'x$ ou $\frac{dy}{dx}$ trouvée au N° 58, il vient

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}=\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}.$$

Pour interpréter ce résultat, représentons par s une certaine portion de la développée, comptée depuis un point quelconque fixe jusqu'au point (α, β); on sait que l'on a pour la dérivée d'un arc de courbe rapportée à des axes rectangulaires,

$$\frac{ds}{d\alpha}=\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}.$$

Il suit de là que

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}=\frac{ds}{d\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{d\gamma-ds}{d\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{d(\gamma-s)}{d\alpha}=0$$

c'est-à-dire, que la dérivée de $\gamma-s$ est constamment nulle, et par conséquent que $\gamma-s$ est invariable. On a donc, C étant une certaine constante,

$$\gamma-s=C.$$

Appelons γ' et s' ce que deviennent γ et s en un autre point de la courbe, on aura de même

$$\gamma'-s'=C \quad \text{d'où} \quad \gamma-\gamma'=s-s',$$

ce qui apprend que *l'accroissement du rayon de courbure, depuis un certain point de la développée jusqu'à un autre, est égal à l'arc de la développée compris entre ces points.*

On conclut de cette propriété des développées, combinée avec celle des rayons de courbure d'être tangents à la développée, une conséquence importante. Si l'on enroule un fil AMM'M''M''' (fig. 8) sur la développée MM'M'', en fixant une extrémité en un point quelconque M''' et en maintenant ce fil tendu, la partie libre AM sera rectiligne et tangente en M à la développée et si l'on fait glisser l'extrémité A de manière à dérouler le fil de la courbe MM''', cette extrémité décrira une courbe ABC qui n'est autre que la développante de MM''', c'est-à-dire la courbe qui a celle-ci pour développée; en effet, supposons que ABC puisse être distinct de la développante AC' et que ces deux

courbes coïncident en un certain point A. Pour un point B', le rayon de courbure ne peut être que la tangente B'M' à la développée MM'''; mais on vient de voir que B'M' = AM + MM'. D'un autre côté, le fil AM ayant pris en se déroulant la position BM' sans changer de longueur, il est visible que l'on doit avoir aussi BM' = AM + MM'; d'où il suit que les longueurs BM' et B'M' sont égales et que par conséquent tous les points B et B' des deux courbes coïncident.

On conclut aussi de ce qui précède qu'une courbe donnée ne peut avoir qu'une seule développée, puisque celle-ci se trouve entièrement déterminée, tandis qu'une développée peut avoir un nombre infini de développantes; car on conçoit que tandis que le fil AMM'M'' se déroule de la courbe MM'M'', un point quelconque *a* décrira une nouvelle développante *abc* qui aura la même développée MM'M'' que ABC.

61. ***Équation et propriétés de la cycloïde.*** — Appliquons les théories précédentes à la *cycloïde*. C'est ainsi qu'on nomme la courbe décrite par un point de la circonférence d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite donnée. Si donc on suppose le point décrivant M du cercle BMC (fig. 9), placé d'abord en A au point de contact du cercle et de la droite donnée AX et qu'on fasse ensuite rouler ce cercle, le point M décrira la cycloïde AMEA'. Pour trouver son équation, prenons A pour origine et AX pour axe des X; considérons le cercle générateur dans une position quelconque BMC. Soient (x, y) les deux coordonnées AP et PM du point M et a le rayon du cercle décrivant. Il résulte du mode de génération que AC est égal à l'arc MC. Représentons l'arc MC par z, et du point O comme centre avec un rayon Om égal à celui r des tables trigonométriques, décrivons l'arc cm; la perpendiculaire md sera le sinus de mc et on aura

$$\mathrm{MC} : mc = a : r, \quad \mathrm{MD} : md = a : r, \quad \mathrm{OD} : \mathrm{O}d = a : r.$$

d'où

$$mc = \frac{r}{a} z, \quad \mathrm{MD} = \frac{a}{r} md = \frac{a}{r} \sin \frac{r}{a} z, \quad \mathrm{OD} = \frac{a}{r} \mathrm{O}d = \frac{a}{r} \cos \frac{r}{a} z;$$

mais on a

$$\mathrm{AP} = \mathrm{AC} - \mathrm{PC}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad x = z - \frac{a}{r} \sin \frac{r}{a} z$$

et

$$\mathrm{MP} = \mathrm{OC} - \mathrm{OD} \quad \text{d'où} \quad y = a - \frac{a}{r} \cos \frac{r}{a} z.$$

Il suffit donc d'éliminer z entre ces deux équations pour avoir l'équation de la courbe. On tire de la dernière,

$$\cos\frac{r}{a}z=\frac{r}{a}(a-y) \quad \text{d'où} \quad \sin\frac{r}{a}z=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{a^2}(a-y)^2}=\frac{r}{a}\sqrt{2ay-y^2}$$

et

$$\frac{r}{a}z=\text{arc}\sin\frac{r}{a}\sqrt{2ay-y^2}.$$

En substituant ces valeurs de $\sin\frac{r}{a}z$ et de z dans la valeur de x, il vient enfin pour équation de la cycloïde,

$$x=\frac{a}{r}\,\text{arc}\sin\frac{r}{a}\cdot\sqrt{2ay-y^2}-\sqrt{2ay-y^2},$$

ou bien, en faisant le rayon des tables r égal à l'unité,

$$x=a\cdot\text{arc}\sin\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}-\sqrt{2ay-y^2}.$$

Le signe du radical doit être changé quand le point M est placé entre E et A', parce que dans ce cas on a

$$AP=AC+PC,$$

et que l'arc est alors plus grand qu'un demi cercle.

Cette équation étant transcendante, la cycloïde est elle-même une courbe transcendante. Son équation dérivée prend une forme beaucoup plus simple. Puisque la dérivée de arc sin z est $\dfrac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1-z^2}}$, celle de $\text{arc}\sin\frac{1}{a}\sqrt{2ay-y^2}$ est $\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{2ay-y^2}}$ et par conséquent, en prenant la dérivée des deux membres de l'équation de la courbe, il vient

$$1=\frac{a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{2ay-y^2}}-\frac{\frac{dy}{dx}(a-y)}{\sqrt{2ay-y^2}}=\frac{y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{2ay-y^2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

Telle est l'équation dérivée de la cycloïde. Celle-ci, comme l'équation primitive, représente non-seulement la branche AEA', mais encore un nombre illimité de branches identiques, telles que A'G placées les unes à la suite des autres; pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les arcs qui diffèrent d'une ou plusieurs circonférences entières, ayant tous le même sinus, il s'en suit que arc sin $\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$ désigne indifféremment α ou $2\pi + \alpha$, $4\pi + \alpha$ etc. Si on donne à l'arc cette seconde signification en remplaçant arc sin $\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$ par $2\pi +$ arc sin $\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$, et qu'on transporte l'origine des coordonnées de A en A', ce qui se fait en remplaçant x par $x +$ AA' ou $x + 2\pi a$, l'équation reprend identiquement la première forme. La seconde branche A'G est donc semblable à la première et il en sera de même des suivantes. Cela résulte d'ailleurs du mode de construction; car après que le cercle générateur a achevé sa première révolution, il en recommence une deuxième, puis une troisième, ce qui donne naissance à une suite de branches de courbes toutes identiques à la première AEA'.

La longueur de la normale déduite de la formule connue (N° 52) est $\sqrt{2ay}$; or, si l'on joint le point M de la courbe au point de contact C du cercle générateur, une propriété connue du cercle donne la proportion

$$CD : CM = CM : CB, \quad \text{d'où} \quad CM = \sqrt{2ay};$$

on voit donc que la normale à la cycloïde au point M est égale à la corde MC, et comme du point M on ne peut mener deux obliques égales du même côté de la perpendiculaire MP, la corde MC doit se confondre avec cette normale. On voit aussi que, puisque la corde supplémentaire BM est perpendiculaire sur MC, cette corde BM représente la tangente à la courbe. Si l'on trace un cercle EM'F égal au cercle décrivant et tangent à l'axe en un point quelconque, il est visible qu'en menant MM' parallèle à AA', les cordes BM et EM' sont parallèles; d'où résulte cette construction fort simple pour mener une tangente en un point donné M de la cycloïde : on mènera par M une parallèle MM' à l'axe, qui coupera le cercle fixe EM'F en M'; on joindra le point M' au point E et l'on mènera par M une parallèle à EM'; cette parallèle sera la tangente cherchée.

L'expression du rayon de courbure s'obtient en remplaçant dans la formule générale, $f'x$ et $f''x$ par leur valeur tirée de l'équation dérivée de la courbe, savoir :

$$f'x = \sqrt{\frac{2a-y}{y}} \quad \text{et} \quad f''x = -\frac{a\dfrac{dy}{dx}}{y\sqrt{2ay-y^2}} = -\frac{a}{y^2}.$$

On trouve

$$\gamma = \frac{\dfrac{(2ay)^{\frac{3}{2}}}{y^3}}{\dfrac{a}{y^2}} = \frac{(2ay)^{\frac{3}{2}}}{ay} = \frac{2ay\sqrt{2ay}}{ay} = 2\sqrt{2ay};$$

d'où il suit que le rayon de courbure MH est double de la normale MC.

Cherchons encore la développée de la cycloïde; il faut, pour cela, remplacer $f'x$ et $f''x$ par leur valeur, dans les équations (1) et (2) du N° 55, ce qui conduit aux valeurs suivantes

$$x - \alpha = \frac{1 + \dfrac{2a-y}{y}}{-\dfrac{a}{y^2}} \cdot \sqrt{\frac{2a-y}{y}} = -2\sqrt{2ay-y^2},$$

$$y - \beta = \frac{1 + \dfrac{2a-y}{y}}{\dfrac{a}{y^2}} = 2y, \quad \text{d'où} \quad \beta = -y,$$

et en éliminant x et y entre ces deux équations et celle de la cycloïde, on trouve pour la développée,

$$\alpha = a \cdot \text{arc}\sin\frac{\sqrt{-2a\beta-\beta^2}}{a} + \sqrt{-2a\beta-\beta^2}.$$

Cette courbe est elle-même une cycloïde identique à la première, et qui n'en diffère que par sa position; car si on transporte l'origine des coordonnées au point H' (fig. 9), placé sur la perpendiculaire EF élevée au milieu de AA', à une distance FH' égale à EF ou $2a$, et qu'on prenne pour nouveaux axes des X' et Y' la droite H'E et la parallèle H'X' à l'axe

des X, en désignant par x', y' les nouvelles coordonnées, les formules pour la transformation seront

$$\alpha = a\pi - x', \quad \beta = -2a + y',$$

et il viendra en substituant,

$$a\pi - x' = a \cdot \text{arc}\sin\frac{\sqrt{2ay'-y'^2}}{a} + \sqrt{2ay'-y'^2},$$

d'où

$$x' = a\left(\pi - \text{arc}\sin\frac{\sqrt{2ay'-y'^2}}{a}\right) - \sqrt{2ay'-y'^2}.$$

Si l'on observe que deux arcs supplémentaires ont le même sinus et que par conséquent $\pi - \text{arc}\sin\frac{\sqrt{2ay'-y'^2}}{a}$ peut être remplacé par $\text{arc}\sin\frac{\sqrt{2ay'-y'^2}}{a}$, on aura pour l'équation de la développée,

$$x' = a\,\text{arc}\sin\frac{\sqrt{2ay'-y'^2}}{a} - \sqrt{2ay'-y'^2}$$

qui est identiquement la même que celle de la cycloïde primitive. La développée d'une cycloïde est donc une cycloïde identique.

62. *Équation de l'hypocycloïde.* — Au lieu de faire rouler un cercle sur une droite, si on le fait rouler sur une courbe, par exemple, sur un cercle, la courbe décrite par un point du cercle mobile, prend le nom d'*hypocycloïde* ou d'*épicycloïde* suivant que le cercle mobile roule dans la partie concave ou sur la partie convexe de la courbe. Examinons en particulier le cas où le cercle O (fig. 10) roule dans l'intérieur d'un cercle A, le rayon NO étant le quart du rayon AN. Si B est le point de contact primitif et M le point décrivant dans une position quelconque, et qu'on désigne par z l'arc BN, l'arc MLN devra être égal à z. Soient (x, y) les coordonnées du point M de l'hypocycloïde et r le rayon AN; on a

$$\text{AO} = \frac{3}{4}r, \quad \text{AQ} = \text{AO}\cos\text{NAB} = \frac{3}{4}r\cos\frac{z}{r}, \quad \text{OQ} = \frac{3}{4}r\sin\frac{z}{r},$$

$$x = \text{AQ} - \text{PQ} = \frac{3}{4}r\cos\frac{z}{r} - \text{MO}\cos\alpha, \quad y = \text{OQ} - \text{MO}\sin\alpha.$$

α représente l'inclinaison de MO sur l'axe des X, c'est-à-dire

$$\text{OAB} - \text{MOA} = \frac{z}{r} - \left(\frac{\text{MLN}}{r} - \pi\right) = \pi - \frac{3z}{r};$$

on a donc

$$x = \frac{3}{4} r \cos\frac{z}{r} + \frac{r}{4}\cos\frac{3z}{r}, \quad y = \frac{3}{4} r \sin\frac{z}{r} - \frac{r}{4}\sin\frac{3z}{r}.$$

En éliminant z entre ces deux équations, après avoir remplacé $\cos 3\frac{z}{r}$ et $\sin 3\frac{z}{r}$ par leur valeur en fonction de $\cos\frac{z}{r}$ donnée par les formules de la fin du N° 50, il vient pour l'équation de cette hypocycloïde,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

Si le cercle mobile avait son rayon égal à la moitié de celui du cercle fixe, l'hypocycloïde deviendrait un diamètre de ce dernier cercle.

63. *Analyse d'une courbe. Points singuliers.* — Analyser une courbe donnée, c'est chercher par la discussion de son équation les particularités les plus remarquables que présente cette courbe. Le moyen qui atteindrait ce but de la manière la plus complète, consisterait à construire la courbe par points, en donnant à l'abscisse x une suite de valeurs numériques très rapprochées et en calculant les valeurs correspondantes de y. On conçoit que si les valeurs de x étaient suffisamment rapprochées, en reliant les points ainsi obtenus, par un trait continu, on aurait une image de la courbe assez exacte pour qu'on put se faire une juste idée de sa forme et de ses particularités; mais l'extrême longueur de ce procédé le rend le plus souvent illusoire, du moins quand il s'agit de construire une courbe dans toute son étendue; ce n'est que lorsqu'il ne faut construire par points qu'un petit arc de courbe que ce moyen est praticable, et cela suffit le plus souvent, parce que le calcul différentiel permet, comme on le verra, de fixer les seuls points de la courbe où certaines particularités remarquables peuvent exister.

D'abord, la valeur de la dérivée du premier ordre fait connaître les limites de la courbe dans le sens des deux axes; il résulte, en effet, de la signification de la dérivée que, lorsque sa valeur est égale à zéro, la tangente à la courbe fait un angle nul avec l'axe des X ou

lui est parallèle; d'où il suit qu'en égalant à zéro la dérivée du premier ordre, les racines de l'équation ou les valeurs de x indiqueront les points de la courbe pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des X, points qui, *en général*, sont les plus rapprochés ou les plus éloignés de l'axe des X. On distingue ces deux circonstances par le signe de la dérivée du second ordre, laquelle est positive dans le premier cas et négative dans le second (N° 46). On connaîtra également les limites de la courbe dans le sens de l'axe des X en remarquant que pour ces points extrêmes, les tangentes sont parallèles à l'axe des Y et par conséquent, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ infinie.

On peut aussi reconnaître si en un point donné, une courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers l'axe des X; en effet, il est évident que la concavité d'une courbe est tournée vers le centre de courbure et que, par conséquent, la concavité ou la convexité sera tournée vers l'axe des X selon que le centre de courbure sera plus rapproché ou plus éloigné de cet axe que le point correspondant de la courbe, c'est-à-dire, selon que $y - \beta$ sera positif ou négatif; or on a vu que

$$y - \beta = -\frac{1 + f'x^2}{f''x},$$

et comme le numérateur est essentiellement positif, il résulte de cette valeur que la concavité ou la convexité sera tournée vers l'axe des X, suivant que $f''x$ sera négatif ou positif. Si y était négatif ou si la courbe était placée au-dessous de l'axe des X du côté de l'axe des Y négatifs, on changerait y en β et $-y$ en $-\beta$ et l'équation deviendrait

$$y - \beta = \frac{1 + (f'x)^2}{f''x}$$

et il est visible que les conditions seraient les mêmes, mais inverses. En rapprochant ces différentes conditions, il est facile de voir que la concavité ou la convexité sera tournée vers l'axe des X, suivant que y ou fx et $f''x$ seront de signe différent ou de même signe, ou selon que le produit $fx\, f''x$ sera négatif ou positif.

On reconnaît l'existence de plusieurs branches dans une courbe, en résolvant son équation par rapport à l'une des coordonnées, y par exemple. Si y a plusieurs valeurs réelles, chacune de ces valeurs correspondra à une branche particulière. On pourra même isoler

l'équation de cette branche, en ne prenant pour y que la racine qui y correspond. Si la courbe est algébrique, il est visible que les équations des différentes branches ne différeront les unes des autres que par les signes des radicaux présents dans la valeur générale de y.

On appelle *points singuliers*, les points d'une courbe où celle-ci présente dans sa forme quelque particularité remarquable. L'existence de ces points se manifeste le plus souvent dans l'équation par des discontinuités accidentelles. Ils correspondent quelquefois à certaine valeur particulière, attribuée à l'une des dérivées. Les points singuliers dont nous nous occuperons, sont : *le point multiple*, *le point de rebroussement*, *le point saillant*, *le point d'arrêt*, *le point isolé* ou *conjugué*, et *le point d'inflexion*.

64. *Point multiple.* — Le point multiple est celui où viennent se croiser deux ou plusieurs branches d'une même courbe. On reconnaît sans peine l'existence d'un semblable point dans la courbe qui a pour équation

$$y^2 = x^2(1 - x^2);$$

en effet, on en tire

$$y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$$

et l'on voit que pour x positif et plus petit que l'unité, y a deux valeurs égales et réelles; d'où il résulte que la courbe du côté des X positifs a deux branches OA et OB (fig. 11) placées symétriquement des deux côtés de l'axe des X. En faisant x négatif, y prend encore deux valeurs réelles et égales, ce qui prouve que du côté des X négatifs, il y a aussi deux branches symétriques OA′ et OB′. Le point O est donc un point multiple.

65. *Point de rebroussement. Point saillant.* — Si deux branches d'une même courbe viennent se réunir en un point A et ne se prolongent pas au-delà, le point se nomme *point de rebroussement.* Pour en reconnaître l'existence il faut s'assurer de la présence de deux branches de courbe, et vérifier si les valeurs des ordonnées étant réelles d'un côté de ce point, deviennent imaginaires de l'autre. Prenons pour exemple

$$(y - x)^2 = b^2(x^2 - c^2)^3.$$

En la mettant sous la forme

$$y = x \pm b\sqrt{(x^2 - c^2)^3},$$

on reconnaît que depuis $x=c$ jusqu'à $x=+\infty$, et depuis $x=-c$ jusqu'à $x=-\infty$, la courbe se compose de deux branches réelles qui se réunissent aux points où $x=c$ et $x=-c$ et ne se prolongent pas au-delà. On en tire

$$\frac{dy}{dx}=1\pm 3bx\sqrt{x^2-c^2}$$

qui pour $x=c$ et $x=-c$ donne $\frac{dy}{dx}=1$, ce qui apprend que dans ces points les tangentes aux deux branches sont inclinées de $\frac{\pi}{4}$ sur l'axe X et par conséquent se confondent.

Il est à remarquer que quand l'équation est réductible à la forme

$$y=fx\pm\sqrt[n]{(\varphi x)^m}=fx\pm(\varphi x)^{\frac{m}{n}},$$

n étant un nombre pair, ce qui embrasse tous les cas où la courbe se compose de deux branches, celles-ci se touchent en général au point de rebroussement; en effet, il est visible que le point singulier pour lequel la double valeur de y doit disparaître, répond à $\varphi x=0$ ou à $\varphi x=\infty$ suivant que $\frac{m}{n}$ est positif ou négatif. D'un autre côté, on tire de cette double équation

$$\frac{dy}{dx}=f'x+\frac{m}{n}(\varphi x)^{\frac{m}{n}-1}\varphi' x,\quad \frac{dy}{dx}=f'x-\frac{m}{n}(\varphi x)^{\frac{m}{n}-1}\varphi' x.$$

Pour $\frac{m}{n}$ négatif ou pour φx infini, ces deux valeurs se réduisent en général à une valeur unique $f'x$. Pour $\frac{m}{n}$ positif ou pour φx nul, les deux valeurs deviennent encore $f'x$ ou l'infini suivant que $\frac{m}{n}$ est plus grand ou plus petit que l'unité, c'est-à-dire que dans tous les cas la direction des deux tangentes est la même.

La discussion des équations

$$(y-ax^2)^2=bx^5,\quad y^2=x^3,$$

fait découvrir la présence d'un point de rebroussement à l'origine des coordonnées.

Le point de rebroussement prend le nom de *point saillant* quand les branches ne se touchent pas. Il ne diffère du premier qu'en ce que les branches n'y ont pas une tangente commune, comme cela a lieu ordinairement dans les courbes transcendantes. Dans les courbes transcendantes qui ont pour équation

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad y = x \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x},$$

un point saillant se trouve à l'origine des coordonnées; puisque dans la première le $\frac{dy}{dx}$ y converge vers zéro du côté des x positifs et vers l'unité du côté des x négatifs, et que dans la seconde, le $\frac{dy}{dx}$ converge dans ces deux directions vers $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

66. *Point d'arrêt. Point conjugué.* — Le point d'arrêt est celui où une branche unique de courbe s'arrête brusquement. Sa présence se manifeste par cette circonstance que la valeur de y, après être restée réelle et unique dans une certaine étendue des valeurs de x, devient brusquement imaginaire pour des valeurs croissantes de cette variable. La courbe

$$y = \frac{1}{\log x}$$

présente un semblable point à l'origine des coordonnées, car pour toute valeur positive de x, y ne reçoit qu'une seule valeur réelle, et lorsque x devient négatif, la valeur de y devient imaginaire. La courbe

$$y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

se compose de deux branches l'une placée au-dessus de l'axe des X positifs et commençant à l'origine, l'autre s'étendant indéfiniment au-dessus de l'axe des X négatifs et commençant dans l'axe des Y au point où $y = 1$. Les commencements de ces deux branches forment deux points d'arrêt.

Quelquefois une équation entre deux variables représente à la fois une courbe et un ou plusieurs points entièrement isolés que l'on a nommés *points conjugués*.

On reconnaît l'existence de ces points, à ce caractère que pour une certaine valeur de x, y reste réel, tandis qu'une valeur un peu moindre ou plus grande rend y imaginaire. Dans la courbe

$$y^2 = x(x+1)^2$$

le point qui a pour coordonnées ($x = -1$, $y = 0$) est isolé, car en mettant l'équation sous la forme

$$y = \pm (x+1)\sqrt{x},$$

on reconnaît que pour $x = -1$, y est réel et nul, tandis qu'en remplaçant x par $-1+h$, h étant une quantité très petite, y devient $\pm h\sqrt{-1+h}$ qui est imaginaire pour des valeurs positives ou négatives de h. La courbe proprement dite s'étend depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$.

67. *Théorème sur les points singuliers.* — La recherche des points singuliers dans les courbes algébriques est beaucoup facilitée par ce théorème : *dans toute courbe algébrique dont l'équation*

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad f = 0$$

est rendue rationnelle, les dérivées partielles $\frac{df}{dx}$ *et* $\frac{df}{dy}$ *sont toutes deux nulles ou toutes deux infinies pour un point de rebroussement, un point multiple ou un point isolé.*

En effet supposons que M'A et MA (fig. 13) forment en A un point multiple ou un point de rebroussement. En mettant l'équation de la courbe sous la forme

$$y = \varphi x$$

et en désignant par a l'abscisse de ce point et par h une quantité très petite positive ou négative, il est visible que $\varphi(a+h)$ doit avoir plusieurs valeurs, tandis que φa n'en a qu'une seule, puisque l'ordonnée AB correspondant à a est unique; tandis que, à l'abscisse $\mathrm{OP} = a + h$ correspondent plusieurs ordonnées MP, M'P. Il suit de là que l'une des dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. doit être susceptible de plusieurs valeurs distinctes pour $x = a$, puisque $\varphi(a+h)$ est donné par le développement

$$\varphi a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a h + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Or, si la dérivée de l'ordre n est la première qui prend une valeur multiple, et qu'on cherche les dérivées successives de l'équation de la courbe rendue rationnelle et mise sous la forme

$$f(x, y) = 0,$$

il viendra après n dérivations,

$$\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dx} = 0,$$

$$\frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dydx}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2f}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{df}{dy}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2f}{dydx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \text{etc.} = 0,$$

. . . .

$$\frac{df}{dy}\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{d^2f}{dydx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \text{etc.} = 0.$$

ou bien, en éliminant $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ..... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ entre ces équations,

$$\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dx} = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)^3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2f}{dxdy}\frac{df}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{d^2f}{dydx}\frac{df}{dx}\frac{df}{dy} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{df}{dy}\right)^2 = 0$$

. . . .

$$\left(\frac{df}{dy}\right)^{2n-1}\frac{d^ny}{dx^n} + U = 0.$$

Cette dernière équation se compose de deux termes dont l'un, contenant $\frac{d^ny}{dx^n}$, prend par hypothèse plusieurs valeurs pour $x = a$ et dont l'autre que nous avons désigné par U ne prend qu'une seule valeur quand $x = a$, parce que les dérivées partielles $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dydx}$..... qui seules entrent dans U, ne sauraient avoir des valeurs multiples, attendu que la fonction $f(x, y)$ ayant été rendue rationnelle, ses

dérivées partielles le sont également. Il suit de là qu'en désignant par A et A' deux des valeurs de $\frac{d^ny}{dx^n}$, on doit avoir à la fois

$$A\left(\frac{df}{dy}\right)_a^{2n-1} + U = 0, \quad A'\left(\frac{df}{dy}\right)_a^{2n-1} + U = 0 \ldots\ldots(1)$$

d'où l'on tire en retranchant membre à membre,

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_a^{2n-1}(A - A') = 0,$$

et par conséquent

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_a = 0,$$

parce que A diffère de A' par hypothèse. L'équation dérivée première

$$\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dx} = 0$$

se réduit alors à

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_a = 0,$$

ce qui vérifie la première partie de la proposition.

Les deux équations (1) pourraient aussi subsister si $\left(\frac{df}{dx}\right)$ et $\left(\frac{df}{dy}\right)$ prenaient des valeurs infinies pour $x = a$; car U qui contient $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ en facteur, devient infini avec ces dérivées et les équations (1) pourront encore donner pour $\frac{d^ny}{dx^n}$ plusieurs valeurs A et A', puisque les deux équations

$$\frac{1}{U}A + \frac{1}{\left(\frac{df}{dy}\right)_a^{2n-1}} = 0, \quad \frac{1}{U}A' + \frac{1}{\left(\frac{df}{dy}\right)_a^{2n-1}} = 0$$

sont identiquement satisfaites.

Le même théorème subsiste pour un point isolé; car a étant l'abscisse de ce point, si dans l'équation de la courbe $y = \varphi x$, on fait $x = a$, on doit trouver pour y ou φa une valeur réelle, tandis que pour $x = a \pm h$, h étant une quantité très petite quelconque, l'ordonnée ne peut rencontrer la courbe, puisque le point est isolé, et par conséquent $\varphi(a \pm h)$ doit avoir une valeur imaginaire. Or la formule de Taylor donne

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a h + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_a \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

il faut donc que l'une des dérivées soit imaginaire pour le point conjugué. D'un autre côté,

$$f(x, y) = 0$$

étant l'équation de la même courbe, rendue rationnelle, on en tire comme plus haut, après n dérivations successives,

$$\left(\frac{df}{dy}\right)^{2n-1} \frac{d^ny}{dx^n} + U = 0,$$

dans laquelle U représente l'ensemble de tous les termes contenant les dérivées partielles $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, etc. Soit $\frac{d^ny}{dx^n}$ une des dérivées qui devient imaginaire. U est une quantité réelle, puisque $f(x, y)$ ayant été rendu rationnel, ses dérivées partielles des différents ordres ne contiendront pas de radicaux et ne savent par conséquent devenir imaginaires. L'équation

$$\left(\frac{df}{dy}\right)^{2n-1} \frac{d^ny}{dx^n} + U = 0$$

est donc composée de deux termes dont l'un U est réel et l'autre imaginaire, et n'est possible que si les termes imaginaires sont nuls séparément, ou si l'on a

$$\frac{df}{dy} = 0,$$

et par conséquent $\frac{df}{dx} = 0$, à cause de l'équation dérivée

$$\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dx} = 0.$$

Comme l'équation dérivée peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{U}\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{1}{\left(\frac{df}{dy}\right)^{2n-1}}=0,$$

on voit qu'elle est aussi satisfaite en posant

$$\frac{df}{dy}=\infty \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{df}{dx}=\infty.$$

Il résulte de ce qu'on vient de voir que pour trouver les points singuliers dans les courbes prises plus haut pour exemples, il faut poser les équations

$$\frac{df}{dx}=0,\quad \frac{df}{dy}=0,\quad \text{ou bien}\quad \frac{df}{dx}=\infty,\quad \frac{df}{dy}=\infty,$$

et en tirer les valeurs de x, y. Si ces valeurs vérifient l'équation

$$f(x, y)=0,$$

elles *pourront* seules correspondre à des points singuliers, et la discussion ou la construction de la courbe dans son voisinage sera nécessaire pour en confirmer l'existence et pour en reconnaître la nature. Si les valeurs de x et y ne satisfaisaient pas à l'équation de la courbe, l'existence de l'un des trois points singuliers cités plus haut serait impossible.

En examinant la marche de la démonstration précédente, on reconnaît sans peine que le théorème doit s'appliquer souvent aux courbes transcendantes; car il résulte de ce qui précède, que pour qu'il y ait un point singulier dans une courbe de nature quelconque, les conditions suivantes sont nécessaires : il faut que, à une valeur arbitraire de x correspondent des valeurs multiples de y, se réduisant à une seule pour une valeur particulière a de x, et en outre, que l'équation puisse être mise sous une forme telle que ses dérivées partielles successives aient des valeurs uniques et réelles pour une même valeur de x, y. Si ces conditions sont toutes remplies, les deux dérivées partielles $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ tirées de l'équation de la courbe transformée comme on vient de le dire, doivent être nulles ou infinies au point

de la courbe où se trouve un des trois points singuliers dont il est question plus haut. Ainsi pour la courbe

$$y = ax \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x},$$

il y a plusieurs valeurs réelles distinctes de y qui sont

$$y = ax \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}, \quad y = ax\left(2\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\right), \quad y = ax\left(4\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}\right), \text{ etc.}$$

et qui représentent chacune, une branche particulière. Pour $x = 0$, on trouve la valeur unique et réelle $y = 0$ et en troisième lieu, si l'on met l'équation sous la forme implicite

$$\operatorname{tang} \frac{y}{ax} - \frac{1}{x} = 0,$$

les dérivées partielles successives du premier membre auront des valeurs uniques et réelles pour toute valeur de x. Le point singulier, s'il existe, pourra donc être déterminé comme pour les courbes algébriques. On trouve en effet

$$\frac{df}{dx} = \frac{-y}{ax^2 \cos^2 \dfrac{y}{ax}} + \frac{1}{x^2}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{1}{ax \cos^2 \dfrac{y}{ax}},$$

et ces deux dérivées partielles deviennent infinies pour $x = 0$ qui correspond à $y = 0$, c'est-à-dire, pour l'origine. On a vu en effet qu'il y a un point saillant en cet endroit.

68. *Point d'inflexion.* — Il nous reste encore à trouver le caractère qui permet l'existence d'un *point d'inflexion.* On donne ce nom au point où une courbe de concave qu'elle était d'abord, devient convexe, ou, ce qui est la même chose, c'est le point où la tangente coupe la courbe. On a vu qu'une courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers l'axe des X selon que $f''x$ est négatif ou positif. Il faut donc qu'au point d'inflexion A (fig. 14), $f''x$ change de signe et comme on sait qu'en général, une fonction change de signe en passant par zéro ou par l'infini, on voit que la dérivée du second ordre est nulle ou infinie en ce point. Il faut donc égaler la dérivée seconde à zéro ou à l'infini, et chercher les valeurs réelles correspondantes de x. La dis-

cussion de l'équation est nécessaire pour confirmer l'existence de l'inflexion. Ainsi dans les courbes qui ont pour équation

$$y^3 = ax^5, \quad a^2y^2 = a^2x^2 - x^4, \quad y = \operatorname{tang} x,$$

il y a un point d'inflexion à l'origine, car on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{10}{9}\sqrt[3]{\frac{a}{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x(2x^2 - 3a^2)}{a\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x},$$

et il est visible que les deux premières dérivées changent de signe quand x, variant d'une manière continue, passe par la valeur zéro. Il en est de même de la troisième quand x passe par les valeurs $0, \pi, 2\pi, 3\pi$, etc.

69. *Coordonnées polaires.* — Dans toutes les applications précédentes, on a supposé les courbes rapportées à deux axes orthogonaux et les valeurs des rayons de courbure, sous-tangentes, normales, etc., ont été exprimées au moyen des dérivées tirées des équations de ces courbes en coordonnées rectangulaires; mais ces formules ne seraient plus applicables, s'il s'agissait d'une courbe rapportée à un autre système de coordonnées, par exemple, à des coordonnées polaires. On pourrait encore, il est vrai, déduire de l'équation de la courbe, les valeurs des dérivées des différents ordres de l'une des variables considérée comme fonction de l'autre; mais ces dérivées n'auront plus la même signification géométrique que précédemment, et par conséquent les formules qui donnent les valeurs du rayon de courbure etc., et qui sont fondées sur cette signification, seront différentes pour chaque système de coordonnées. Au lieu d'établir une théorie particulière des tangentes, des cercles osculateurs, etc. pour chaque système de coordonnées, on peut au moyen des formules établies dans les Nos 10 et 23, déduire des valeurs précédentes du rayon de courbure, etc., celles de ces mêmes droites dans chaque système de coordonnées, pourvu que l'on connaisse les formules qui servent à passer des coordonnées rectangulaires aux nouvelles coordonnées que l'on adopte; en effet, prenons pour exemple les coordonnées polaires. En représentant par (a, b) les deux coordonnées rectangulaires du pôle, par r le rayon vecteur, par α l'angle constant que forme avec l'axe des X une droite fixe passant par le pôle, par t l'angle variable formé par le rayon vecteur avec cette droite fixe; on sait que les formules qui lient les coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires sont

$$x = a + r\cos(\alpha - t), \quad y = b + r\sin(\alpha - t).$$

Cela posé, supposons l'équation d'une courbe donnée en coordonnées polaires, c'est-à-dire, au moyen d'une relation entre r et t. En choisissant t pour variable indépendante, les formules précédentes, dans lesquelles r doit être considéré comme une fonction connue de t, expriment les valeurs de x et de y en fonction de cette variable indépendante t, et il vient en dérivant,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos(\alpha - t) + r\sin(\alpha - t),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin(\alpha - t) - r\cos(\alpha - t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos(\alpha - t) + 2\frac{dr}{dt}\sin(\alpha - t) - r\cos(\alpha - t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin(\alpha - t) - 2\frac{dr}{dt}\cos(\alpha - t) - r\sin(\alpha - t),$$

. . . .

En introduisant ces valeurs dans les formules établies plus haut (N°s 10 et 25), on trouve pour les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{dt}\sin(\alpha - t) - r\cos(\alpha - t)}{\frac{dr}{dt}\cos(\alpha - t) + r\sin(\alpha - t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}}{\left\{r\sin(\alpha - t) + \frac{dr}{dt}\cos(\alpha - t)\right\}^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \text{etc.}$$

70. *Rayons de courbure et développées dans les courbes polaires.* — Au moyen de ces relations, on peut exprimer en coordonnées polaires les valeurs de toute quantité dont on connaît l'expression en coordonnées rectangulaires; on trouve, par exemple, pour le rayon de courbure,

$$\gamma = \pm\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \pm\frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}},$$

et pour les coordonnées α' et β' du centre de courbure (N° 55),

$$\alpha' = x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx} = a + r\cos(\alpha - t)$$

$$+\frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]\left[\frac{dr}{dt}\sin(\alpha-t) - r\cos(\alpha-t)\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}},$$

$$\beta' = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = b + r\sin(\alpha - t)$$

$$-\frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]\left[\frac{dr}{dt}\cos(\alpha-t) + r\sin(\alpha-t)\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}},$$

ou bien

$$\alpha' = a + \frac{r\cos(\alpha-t)\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}\right\} + \frac{dr}{dt}\sin(\alpha-t)\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}},$$

$$\beta' = b + \frac{r\sin(\alpha-t)\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}\right\} - \frac{dr}{dt}\cos(\alpha-t)\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}}.$$

Ces deux équations fixent le centre de courbure en fonction des coordonnées rectangulaires (α', β'). Si on voulait fixer sa position par des coordonnées polaires, il suffirait de remarquer que r' et t' étant les coordonnées polaires relatives à ce point, il doit exister entre (r', t') et (α', β') les relations

$$\alpha' = a + r'\cos(\alpha - t'), \quad \beta' = b + r'\sin(\alpha - t'),$$

d'où l'on tire

$$r' = \sqrt{(\alpha' - a)^2 + (\beta' - b)^2}, \quad \operatorname{tang}(\alpha - t') = \frac{\beta' - b}{\alpha' - a},$$

et par conséquent, en substituant les valeurs de α' et β',

$$r' = \frac{\sqrt{r^2\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}\right\}^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right\}^2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}},$$

$$\operatorname{tang}(\alpha - t') = \frac{r \operatorname{tang}(\alpha - t)\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}\right] - \frac{dr}{dt}\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}{r\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}\right] + \frac{dr}{dt}\operatorname{tang}(\alpha - t)\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]}.$$

Si dans la deuxième équation, on remplace $\operatorname{tang}(\alpha - t)$ et $\operatorname{tang}(\alpha - t')$ par les valeurs $\frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang} t}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} t}$, $\frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang} t'}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} t'}$, et qu'on opère ensuite les réductions en faisant disparaître les dénominateurs et supprimant le facteur commun $1 + \operatorname{tang}^2\alpha$, on trouve

$$\operatorname{tang} t' = \frac{\frac{dr}{dt}\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} + r\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}\right\}\operatorname{tang} t}{r\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}\right\} - \frac{dr}{dt}\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\operatorname{tang} t}$$

qui ne contient plus la lettre α. En éliminant r et t entre ces deux équations et celle de la courbe, on trouvera l'équation polaire de la développée. On serait arrivé fort simplement à ces formules en reprenant la théorie précédente des courbes osculatrices et en l'appropriant aux courbes polaires.

71. *Sous-tangente et sous-normale polaires, etc.* — Quant à la sous-tangente, sous-normale, etc., il est à observer que ces droites, qui avaient une signification bien définie, quand il s'agissait des courbes rapportées à des axes orthogonaux, ne présentent plus aucun intérêt dans les courbes rapportées à des coordonnées polaires. Dans ces

dernières courbes, on a donné le nom de *sous-tangente*, *normale*, etc., à des droites différentes des premières, quoiqu'ayant avec elles certaines analogies; ainsi AB (fig. 15) étant la courbe, O son pôle, OM un rayon vecteur quelconque et OC la droite fixe d'où se comptent les angles MOC ou t, on appelle *sous-tangente polaire*, la longueur de la perpendiculaire OT élevée sur le rayon vecteur OM et prolongée jusqu'à la tangente MT; MT est *la longueur de la tangente polaire*, MN *la longueur de la normale* et NO *la sous-normale polaire*. La valeur de ces droites se déduit de celles trouvées plus haut pour les droites de même nom; en effet, si l'on rapporte la courbe AB à des axes rectangulaires, en prenant pour origine le pôle O et pour axe des Y le rayon vecteur OM, la perpendiculaire TN élevée au point O sur OM deviendra l'axe des X et la sous-tangente polaire OT se confondra avec la sous-tangente rectangulaire dont la valeur est $\dfrac{y}{\dfrac{dy}{dx}}$; il suffira donc de remplacer dans cette expression, y et $\dfrac{dy}{dx}$ par leur valeur en coordonnées polaires; or pour faire coïncider l'origine avec le pôle O, et l'axe des Y avec OM, il faut faire

$$a=0,\quad b=0,\quad \alpha-t=\frac{\pi}{2},\quad \text{c'est-à-dire,}\quad \mathrm{COX}-\mathrm{COM}=\frac{\pi}{2},$$

ce qui réduit les valeurs précédentes de y et $\dfrac{dy}{dx}$ aux suivantes :

$$y=b+r\sin(\alpha-t)=r,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dr}{dt}\sin(\alpha-t)-r\cos(\alpha-t)}{\dfrac{dr}{dt}\cos(\alpha-t)+r\sin(\alpha-t)}=\frac{\dfrac{dr}{dt}}{r},$$

et il vient pour la sous-tangente polaire OT et pour la sous-normale NO,

$$\text{sous-tang OT}=\frac{y}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{r^2}{\dfrac{dr}{dt}},\quad \text{sous-normale NO}=\frac{dr}{dt}.$$

On trouve de même

$$\text{longueur de la tangente MT} = r\sqrt{1+\frac{r^2}{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}},$$

$$\text{longueur de la normale MN} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

On voit par là que la dérivée première $\frac{dr}{dt}$ dans une courbe polaire, représente la sous-normale. On trouve aussi que la tangente de l'angle TMO formé par le rayon vecteur et la touchante à la courbe, est donnée par

$$\operatorname{tang} \text{TMO} = \frac{r}{\frac{dr}{dt}}.$$

72. *Dérivée d'un arc de courbe polaire.* — On peut aussi déduire la dérivée d'un arc de courbe polaire ou $\frac{ds}{dt}$, de la dérivée $\frac{ds}{dx}$ de l'arc de courbe donnée en coordonnées rectangulaires; car l'arc s étant une fonction de x et x une fonction de t, on a

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt},$$

et en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dx}$ par leur valeur (N° 69),

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{dr^2+r^2dt^2}.$$

On voit que cette dérivée est représentée par la normale.

Cette dernière formule s'obtient par la considération des infiniment petits, en remarquant que si MM′ (fig. 16) représente ds, en décrivant du point O comme centre, l'arc MP, la différence M′P entre deux valeurs consécutives de r est dr, l'angle MOM′ ou plutôt l'arc mp décrit

du point O comme centre avec un rayon égal à l'unité est dt et le triangle MM'P sensiblement rectiligne et rectangle donne

$$MM' = \sqrt{M'P^2 + MP^2} \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,dt^2}.$$

75. *Applications aux spirales.* — Appliquons les formules précédentes à quelques courbes polaires. On appelle *spirale d'Archimède* la courbe décrite par un point mobile M (fig. 17) qui glisse uniformément sur une droite OB, tandis que cette droite tourne uniformément autour du point O. Supposons que le point mobile M parte du point O, quand la droite OA commence à tourner. Il résulte de ce mode de génération, qu'en représentant par r, la distance OM et par t l'angle MOA, le rapport de r à t doit être constant; l'équation polaire est donc

$$r = at, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \frac{dr}{dt} = a.$$

On voit que dans cette courbe la sous-normale est constante.

La courbe précédente sera une spirale logarithmique, si le mouvement du point M sur OB se fait de telle manière que l'angle BOA ou t est constamment proportionnel au logarithme de OM. L'équation de cette courbe est alors

$$\operatorname{Log} r = mt \quad \text{ou} \quad r = a^{mt} = (a^m)^t = a'^t,$$

en désignant par a la base du système de logarithmes. On tire de cette dernière équation,

$$\frac{dr}{dt} = a'^t \log a' = r \log a',$$

et par conséquent,

$$\text{sous-tang OT} = \frac{r}{\log a'}, \quad \text{tang OMT} = \frac{r}{\frac{dr}{dt}} = \frac{1}{\log a'}.$$

L'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur est donc constant.

En dérivant une seconde fois l'équation de la courbe, on trouve

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dr}{dt} \log a' = r \log^2 a';$$

d'où il suit que le rayon de courbure est

$$\gamma = \frac{(r^2 + r^2 \log^2 a')^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r^2 \log^2 a' - r^2 \log^2 a'} = r\sqrt{1 + \log^2 a'}.$$

On trouve aussi $r\sqrt{1 + \log^2 a'}$ pour valeur de la normale; on voit donc (fig. 15) que le rayon de courbure est égal à la normale MN et que par conséquent le point N est le centre de courbure. En substituant les valeurs de $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d^2r}{dt^2}$ dans r' et tang t', il vient

$$\tang t' = -\frac{1}{\tang t} \quad \text{et} \quad r' = r \log a'.$$

On tire de la première,

$$\tang t \cdot \tang t' + 1 = 0,$$

d'où l'on conclut que les angles t' et t ou CON et COM, diffèrent d'un angle droit, c'est-à-dire, que $t = t' - \frac{\pi}{2}$, ce qui résulte d'ailleurs de ce que le centre de courbure est en N. En substituant les valeurs de r et de t dans l'équation de la spirale, on trouve pour équation polaire de la développée,

$$r' = \log a' \cdot a'^{t' - \frac{\pi}{2}} \quad \text{ou bien} \quad r' = a'^{t' - \frac{\pi}{2} + \alpha},$$

en remplaçant $\log a'$ par a'^{α}, ce qui revient à faire Log ($\log a'$) égal à α Log a' et par suite, $\alpha = \frac{\text{Log}(m \log a)}{m}$.

L'angle t' ou CON (fig. 18) se compte à partir de la droite OC; si donc on mène une droite OC' faisant avec OC un angle COC' égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et qu'on nomme t'' les angles C'ON formés par le rayon vecteur ON de la développée avec la droite fixe OC', on aura

$$t'' = t' - \frac{\pi}{2} + \alpha$$

et par conséquent l'équation de la développée rapportée à la droite fixe OC', deviendra

$$r' = a'^{t''},$$

c'est-à-dire, que la développée B'A' n'est autre que la spirale primitive AB, ayant le même pôle O, mais ayant tourné autour de ce point d'une quantité angulaire

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{1}{m}\operatorname{Log}(m \log a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Log}\sqrt[m]{\log a^m}.$$

On distingue encore plusieurs espèces de spirales, entre autres celles qui sont comprises dans l'équation générale

$$r = at^n.$$

Si $n = -1$, on a la *spirale hyperbolique* dans laquelle la sous-tangente est constante.

74. *Courbes enveloppes.* — Soit

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

l'équation rendue rationnelle d'une courbe, renfermant une certaine constante littérale α. Il est clair que si l'on y fait varier α d'une manière continue, la courbe variera elle-même d'une manière continue dans sa forme et dans sa position. Donnons à α un accroissement ε; la nouvelle équation appartiendra à une courbe différente de la première et les coordonnées de leur point d'intersection s'obtiendront en résolvant le système des deux équations

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f(x, y, \alpha + \varepsilon) = 0,$$

qui fixent par conséquent le point où la courbe caractérisée par la valeur particulière attribuée à α, vient rencontrer la courbe caractérisée par $\alpha + \varepsilon$. Si donc on élimine α entre elles, les (x, y) contenus dans l'équation finale de la forme

$$F(x, y, \varepsilon) = 0$$

appartiendront encore à l'intersection des courbes caractérisées par α et $\alpha + \varepsilon$; mais comme α a disparu, ces coordonnées appartiendront à l'intersection de deux quelconques des courbes variables dans lesquelles le paramètre α diffère d'une quantité constante ε, c'est-à-dire que si l'on trace toutes les courbes que peut représenter

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

quand α passe par toutes les valeurs possibles, l'équation finale

$$F(x, y, \varepsilon) = 0$$

appartient à la courbe, lieu géométrique de tous les points d'intersection de chacune des courbes variables, par celle pour laquelle le paramètre est supérieur de ε. Faisons décroître cette différence ε indéfiniment, les deux courbes qui déterminent l'intersection se rapprocheront de plus en plus, et à la limite l'équation finale, qui devient

$$F(x, y) = 0$$

appartiendra à la courbe limite des lieux géométriques indiqués plus haut. Au point de vue des infiniment petits, si on conçoit que α croisse par intervalles infiniment petits, l'équation $F(x, y) = 0$ appartiendra au lieu géométrique de toutes les intersections de chaque courbe variable par celle qui la suit immédiatement.

Il est à remarquer que cette dernière équation s'obtient en éliminant α entre l'équation primitive et sa dérivée prise par rapport à α; car on sait que l'on a

$$f(x, y, \alpha + \varepsilon) = f(x, y, \alpha) + \varepsilon f'_\alpha(x, y, \alpha + \theta\varepsilon),$$

f'_α étant la dérivée de f par rapport à α. Le système des deux équations se réduit donc à

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha + \theta\varepsilon) = 0,$$

équations qui à la limite deviennent

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

La courbe limite dont on vient de trouver l'équation, jouit de la propriété d'être tangente à toutes les courbes variables, c'est-à-dire, de former en quelque sorte l'*enveloppe* de ces dernières; en effet, si au point d'intersection de la courbe

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

et de sa voisine, on mène une tangente à la première, son inclinaison sur l'axe des X sera donnée par le $\frac{dy}{dx}$ tiré de cette équation, c'est-à-dire que l'inclinaison sera donnée par

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df(x, y, \alpha)}{dx}}{\frac{df(x, y, \alpha)}{dy}}.$$

D'un autre côté, si, au même point d'intersection, on mène une tangente à la courbe lieu géométrique des intersections, l'inclinaison de cette seconde tangente sur l'axe des X sera déterminée par le $\frac{dy}{dx}$ tiré de $F(x, y) = 0$, et comme cette équation résulte de l'élimination de α entre $f(x, y, \alpha) = 0$ et $f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$, on obtiendra cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ sans effectuer l'élimination, en considérant dans la première, α comme une fonction de (x, y) donnée par la seconde équation. La dérivée totale de $f(x, y, \alpha) = 0$ devient alors

$$\frac{df(x, y, \alpha)}{dx} + \frac{df(x, y, \alpha)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{df(x, y, \alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

qui, à cause de

$$\frac{df(x, y, \alpha)}{d\alpha} \quad \text{ou} \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0,$$

se réduit à

$$\frac{df(x, y, \alpha)}{dx} + \frac{df(x, y, \alpha)}{dy}\frac{dy}{dx} = 0; \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df(x, y, \alpha)}{dx}}{\frac{df(x, y, \alpha)}{dy}},$$

valeur qui est la même que celle trouvée pour l'autre tangente, avec laquelle elle doit par conséquent se confondre; d'où l'on conclut que la courbe des lieux géométriques des intersections est partout tangente aux courbes variables. Cette propriété a fait donner à la première le nom de *courbe enveloppe*.

Cette théorie des courbes enveloppes s'applique dans toutes ses parties aux courbes polaires, avec cette seule modification que pour démontrer que la courbe enveloppe touche toutes les courbes variables, on fera voir que les touchantes à ces deux courbes font le même angle avec le rayon vecteur, ce qui résulte de ce que le $\frac{dr}{dt}$ est le même dans les deux courbes.

1er *exemple. Trouver la courbe enveloppe d'une droite* FG (fig. 10) *d'une longueur constante, dont les extrémités sont assujetties à glisser sur les axes des* X *et des* Y. L'équation de la droite FG est $y = ax + b$.

On en tire $AF = -\frac{b}{a}$, $AG = b$; et par conséquent, en représentant par d la longueur FG,

$$d = \pm b \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}; \quad \text{d'où} \quad b = \frac{-ad}{\sqrt{1+a^2}}.$$

On prend le signe —, parce qu'il est visible que d doit être pris sans signe et que AG ou b étant positif, a ou tang GFX est négatif.

L'équation de la droite prend la forme

$$y = ax - \frac{ad}{\sqrt{1+a^2}} \quad \ldots\ldots(1)$$

qui représente toutes les droites telles que GF, en faisant varier la valeur de a. La dérivée de cette équation par rapport à a est

$$x - \frac{d}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

et si l'on élimine a entre cette dernière et (1), on trouve pour équation de la courbe enveloppe,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}.$$

Le problème suivant conduit à la même solution : *trouver l'enveloppe de toutes les ellipses concentriques, dont les directions des axes coïncident et dans lesquelles la somme des axes est constante.* On avait déjà trouvé (N° 62) que cette courbe est une hypocycloïde engendrée par un point d'un cercle d'un rayon $\frac{a}{4}$ roulant dans un cercle de rayon a.

Si dans le problème précédent, le produit des deux axes de l'ellipse était constant, c'est-à-dire si toutes les ellipses avaient la même surface, la courbe enveloppe serait une hyperbole ayant ses asymptotes dirigées dans le sens des axes.

2ᵉ *exemple. Étant donné un cercle invariable* O (fig. 19) *et un point fixe* A, *si l'on mène par* A *toutes les sécantes* ABC *et que sur les cordes* BC *prises pour diamètres, on trace des circonférences, trouver la courbe enveloppe de celles-ci.*

Prenons le point A pour origine et AOX pour axe des X;

$$y^2 + (x - m)^2 = R^2$$

est l'équation du cercle invariable, R étant son rayon et $m = $ AO. Soit $y = \alpha x$ l'équation d'une sécante quelconque ABC; combinant cette équation avec celle du cercle, on aura pour les coordonnées des points d'intersection B et C,

$$x = \frac{m + \sqrt{R^2(1+\alpha^2) - m^2\alpha^2}}{1+\alpha^2}, \quad x = \frac{m - \sqrt{R^2(1+\alpha^2) - m^2\alpha^2}}{1+\alpha^2},$$

$$y = \alpha\frac{m + \sqrt{R^2(1+\alpha^2) - m^2\alpha^2}}{1+\alpha^2}, \quad y = \alpha\frac{m - \sqrt{R^2(1+\alpha^2) - m^2\alpha^2}}{1+\alpha^2},$$

et pour celles du milieu O' de BC,

$$x' = \frac{m}{1+\alpha^2}, \quad y' = \frac{\alpha m}{1+\alpha^2} \quad \text{et BO'} = \sqrt{R^2 - \frac{m^2\alpha^2}{1+\alpha^2}}.$$

L'équation du cercle décrit sur BC est donc

$$\left(x - \frac{m}{1+\alpha^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha m}{1+\alpha^2}\right)^2 = R^2 - \frac{m^2\alpha^2}{1+\alpha^2} \cdots\cdots (1),$$

qui tient lieu de $f(x, y, \alpha) = 0$, et qui, si l'on fait varier α, pourra représenter successivement tous les cercles décrits sur les cordes. La dérivée prise par rapport à α est

$$\alpha(x^2 + y^2 + m^2 - R^2) - my = 0.$$

En éliminant α entre cette dernière et (1), on a pour l'équation de la courbe enveloppe,

$$(x^2 + y^2 - R^2 + m^2)^2 - 2mx(x^2 + y^2 - R^2 + m^2) - m^2y^2 = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(x^2 - mx + m^2 + y^2 - R^2)^2 - m^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Si les cercles variables avaient leur centre au point B et avaient AB pour rayon, l'équation de l'enveloppe serait

$$(x^2 + y^2 - 2mx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

3[e] *exemple. Trouver la courbe enveloppe de toutes les normales à une courbe donnée.* L'équation d'une normale au point (x, y) de la courbe $y = fx$ est

$$x' - x = -f'x(y' - fx).$$

Il est visible qu'en changeant x, cette équation représentera successivement toutes les normales. L'enveloppe s'obtient donc par l'élimination de x entre la précédente et sa dérivée prise par rapport à cette lettre, c'est-à-dire

$$-1 = -f''x(y' - fx) + (f'x)^2.$$

On tire de ces deux équations,

$$x' - x = -f'x\frac{1 + (f'x)^2}{f''x}, \quad y' - fx = +\frac{1 + (f'x)^2}{f''x},$$

entre lesquelles il suffira d'éliminer x pour arriver à l'équation en (x', y') de l'enveloppe. Il est visible que les valeurs de x' et y' données par ces deux équations sont celles que nous avons trouvées précédemment pour le centre de courbure et que par conséquent la courbe enveloppe n'est autre chose que le lieu géométrique de ces centres de courbure, c'est-à-dire la développée.

On trouve de la même manière que la courbe enveloppe de toutes les tangentes à une courbe donnée est représentée par cette courbe même.

4[e] *exemple.* Soient OA et OB (fig. 20) deux droites données. Proposons-nous de trouver l'enveloppe de toutes les droites ab qui divisent ces deux longueurs OA et OB en parties réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire, de manière que l'on ait

$$Oa : aA = Bb : Ob.$$

Prenons les droites OB et OA pour axes des X et des Y; l'équation de ab est

$$y = \alpha x + \beta;$$

d'où l'on tire, en faisant successivement x et y nuls,

$$Ob = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad Oa = \beta.$$

Si on représente par m et n les longueurs OB et OA, la proportion devient

$$\beta : n - \beta = m + \frac{\beta}{\alpha} : -\frac{\beta}{\alpha}.$$

En éliminant β entre cette proportion et l'équation de la droite, celle-ci devient

$$y = \alpha x + \frac{mn\alpha}{m\alpha - n},$$

et elle représentera successivement toutes les droites ab, $a'b'$.... en changeant la valeur de α. L'élimination de α entre cette dernière et sa dérivée, prise par rapport à α, savoir :

$$0 = x - \frac{mn^2}{(m\alpha - n)^2},$$

donne

$$m^2y^2 - 2mnxy + n^2x^2 - 2m^2ny - 2mn^2x + m^2n^2 = 0,$$

équation qui appartient à une parabole. Les enveloppes obtenues par ce procédé sont connues dans les constructions sous le nom de *courbes de raccordement.*

Si la droite ab était assujettie à la condition de former des triangles Oab équivalents ou de donner pour $Oa \times Ob$ des produits égaux, la courbe enveloppe serait une hyperbole ayant les droites OA et OB pour asymptotes.

Si la somme des carrés des droites Oa et Ob restait invariable, la courbe enveloppe aurait $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}$ pour équation.

75. *Caustiques.* — Pour dernière application de la théorie des enveloppes, nous prendrons la recherche de l'équation d'une *caustique*, c'est-à-dire, de la courbe enveloppe de tous les rayons de lumière émanés d'un point lumineux et réfléchis par une courbe donnée. Soient AB (fig. 21) la courbe réfléchissante, O le point lumineux, OM un rayon de lumière incident et MD le même rayon réfléchi. On sait que ces deux rayons font des angles égaux avec la tangente Tt à la courbe réfléchissante au point M ou (x, y).

Prenons le point O pour origine. Puisque les inclinaisons de OM et de Tt sur l'axe des X sont données par $\frac{y}{x}$ et $\frac{dy}{dx}$, ces droites font entre elles un angle dont la tangente trigonométrique est

$$\frac{\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} \text{ ou } X,$$

dans laquelle $\frac{dy}{dx}$ est la dérivée tirée de l'équation de la courbe AB. Soit

$$y' - y = a(x' - x),$$

l'équation de la droite MD assujettie à passer par le point M; celle-ci fait avec Tt un angle dont la tangente trigonométrique est $\dfrac{\frac{dy}{dx} - a}{1 + a\frac{dy}{dx}}$,

et la condition de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion se trouve exprimée par l'équation

$$\frac{\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}} \text{ ou } X = \frac{\frac{dy}{dx} - a}{1 + a\frac{dy}{dx}}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{\frac{dy}{dx} - X}{1 + X\frac{dy}{dx}}.$$

L'équation de MD devient donc, en substituant à a sa valeur,

$$y' - y = \frac{\frac{dy}{dx} - X}{1 + X\frac{dy}{dx}}(x' - x)\ldots\ldots (1)$$

Si l'on conçoit que l'on ait remplacé y par sa valeur en x tirée de l'équation de la courbe AB, il suffira de faire varier x pour que l'équation précédente représente tous les rayons réfléchis; prenons donc la dérivée par rapport à x, en observant que dans chaque application, X, y et $\frac{dy}{dx}$ sont des fonctions connues de x, et éliminons x entre cette dérivée et l'équation (1). L'équation finale appartiendra à la courbe enveloppe cherchée. On a donné à cette courbe le nom particulier de *caustique*.

Si la courbe réfléchissante est une ellipse, le point lumineux étant l'un des foyers, en représentant par e l'excentricité ou $\sqrt{a^2 - b^2}$, on aura

$$a^2y^2 + b^2(x - e)^2 = a^2b^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2(x - e)}{a^2y}, \quad X = \frac{b^2}{ey},$$

et l'équation (1) deviendra

$$y' - y = \frac{y}{x - 2e}(x' - x), \quad \text{ou bien} \quad y'(x - 2e) - y(x' - 2e) = 0 \ldots (2)$$

Égalant à zéro la dérivée par rapport à x, en remarquant que y est fonction de x, on trouve

$$y' = \frac{dy}{dx}(x' - 2e), \quad \text{ou bien} \quad y' = -\frac{b^2(x - e)}{a^2 y}(x' - 2e).$$

En éliminant x et y entre cette dernière, l'équation (2) et l'équation de l'ellipse, on est conduit à l'équation de la caustique. On trouve ainsi

$$(a^2 - e^2)\,y'^2 + b^2(x' - 2e)^2 = 0$$

qui se décompose en

$$y' = 0, \quad x' = 2e,$$

c'est-à-dire que la caustique se réduit à un point qui est le second foyer de l'ellipse.

Si le point lumineux, au lieu d'être placé à l'origine, est situé dans l'axe des Y, à une distance n, il faudra changer y en $y + n$ dans $\frac{y}{x}$. En faisant ensuite n infini, tous les rayons incidents seront parallèles entre eux et à l'axe des Y. On trouve alors

$$X = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad y' - y = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1}{2\frac{dy}{dx}}(x' - x)$$

et en dérivant par rapport à x,

$$x' - x = -\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y' - y = \frac{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2\frac{d^2y}{dx^2}}$$

et il suffira d'éliminer x et y entre ces deux dernières et l'équation de la courbe réfléchissante. Si cette dernière courbe est un cercle rapporté à son centre, l'équation de la caustique devient

$$(4y'^2 + 4x'^2 - r^2)^3 = 27r^4x'^2.$$

On trouve souvent, d'une manière plus expéditive, l'équation de la caustique en partant de cette propriété, *que cette dernière courbe est la développée de l'enveloppe des cercles qui passent par le point lumineux et ont leur centre aux points d'incidence de la courbe réfléchissante.* Ainsi on a vu (N° 74, 2me exemple) que si la courbe réfléchissante est un cercle, l'équation de la courbe enveloppe est

$$(x^2 + y^2 - 2mx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2);$$

il faut donc, pour avoir la caustique du cercle, chercher la développée de la courbe précédente. Cette propriété de la caustique a été reconnue par M. Quetelet, qui l'a démontrée dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Belgique.*

Lorsque l'équation de la courbe variable $f(x, y, \alpha) = 0$ ne contient α que dans un seul terme, c'est-à-dire, lorsque cette équation est de la forme $M\alpha^n + N = 0$, ou plus généralement,

$$Mf\alpha + N = 0,$$

M et N étant des fonctions de (x, y), l'enveloppe se réduit à un point par lequel passent toutes les courbes variables, car la dérivée par rapport à α est

$$Mf'\alpha = 0,$$

équation qui exige que M soit nul, ce qui ne peut avoir lieu sans que N le soit aussi, à cause de la première équation. Le système des deux équations $M = 0$, $N = 0$ donne pour x et y des valeurs constantes. Ainsi si l'on cherche la caustique d'une ligne droite $y = ax + b$, on trouve pour équation du rayon réfléchi, le point lumineux étant placé à l'origine et x tenant lieu de α,

$$x(y' - ax' - 2b)(1 + a^2) - b[x'(a^2 - 1) - 2ay' + 2ab] = 0,$$

d'où l'on conclut que tous ces rayons passent par un point qui a pour coordonnées $x' = -\frac{2ab}{1 + a^2}$ et $y' = \frac{2b}{1 + a^2}$.

L'équation (2) relative à l'ellipse, mise sous la forme

$$y'^2 - (x' - 2e)^2 \frac{y^2}{(x - 2e)^2} = 0 \quad \text{ou} \quad y'^2 - (x' - 2e)^2 \frac{b^2[a^2 - (x - e)^2]}{a^2(x - 2e)^2} = 0$$

et dans laquelle x tient lieu du paramètre α, vérifie pour l'ellipse la proposition qu'on vient de démontrer.

Il est à remarquer que cette proposition n'est vraie que si les fonctions M et N sont algébriques et rationnelles; car si elles étaient susceptibles de prendre plusieurs valeurs, comme ces valeurs multiples ne pourraient être prises que successivement, l'équation $M/\alpha + N = 0$ ne représenterait plus la courbe dans toute sa généralité et dans toute son étendue, comme le suppose la théorie des courbes enveloppes. Il faudrait dans ce cas faire disparaître ces valeurs multiples en rendant M et N rationnels. Alors le paramètre α se combinera avec des x, y et la théorie des courbes enveloppes cessera d'être en défaut.

76. *Théorie géométrique des courbes enveloppes.* — L'équation des courbes enveloppes peut être obtenue par une considération géométrique très simple. Il est visible que si l'on trace toutes les courbes ab, $a'b'$, $a''b''$..... (fig. 22) correspondant aux différentes valeurs du paramètre variable α de l'équation

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

la limite $cc'c''$.... de l'espace occupé par les courbes variables se confond avec la courbe enveloppe. Il suit de là que pour une même ordonnée Ap, l'abseisse x qui correspond à l'enveloppe est la plus grande des abseisses pm, pm', pm'',..... pM..... qui correspondent aux différents paramètres α. Si donc on considère y comme invariable et que l'on cherche la valeur de α qui rend x maximum, on sera conduit à l'équation de condition

$$\frac{dx}{d\alpha} = 0;$$

or, on sait que l'équation $f(x, y, \alpha) = 0$ donne

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{\frac{df}{d\alpha}}{\frac{df}{dx}}.$$

L'équation de condition du maximum peut donc être remplacée par

$$\frac{df}{d\alpha} = 0,$$

et si on élimine α entre celle-ci et

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

on aura l'équation du lieu géométrique de toutes les extrémités des

plus longues abscisses pM, c'est-à-dire qu'on aura, comme précédemment, l'équation de l'enveloppe.

77. *Inverse du problème des courbes enveloppes.* — Le problème inverse de celui que nous venons de résoudre sur les courbes enveloppes, consiste à trouver la courbe variable connaissant son enveloppe; mais ce problème est plus qu'indéterminé, car on peut se donner la forme de l'équation de la courbe variable, pourvu que celle-ci contienne deux paramètres, et se borner à chercher la relation qui doit exister entre eux pour remplir la condition concernant l'enveloppe; soit en effet

$$F(x, y) = 0.....(1)$$

l'équation de la courbe enveloppe et

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0.....(2)$$

l'équation de la courbe variable, cette équation ayant une forme donnée et contenant explicitement les paramètres α et β. Pour que la première équation appartienne à l'enveloppe de la seconde, il faut d'après ce qu'on a vu, que l'équation (1) résulte de l'élimination de α entre (2) et sa dérivée par rapport à α, savoir :

$$\frac{df}{d\alpha} + \frac{df}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0;....(3)$$

Il faut donc que l'une de ces trois équations soit une conséquence des deux autres et que, par conséquent, si on élimine x et y entre elles, l'équation finale soit identiquement satisfaite. Or celle-ci, de forme déterminée, contient des α, des β et la dérivée $\frac{d\beta}{d\alpha}$; la valeur de β en α qui y satisfera, fera donc connaître la forme qu'il convient de donner à la fonction β, dans l'équation de la courbe variable. Cette détermination est du ressort du calcul intégral, puisqu'elle dépend de l'intégration d'une équation différentielle entre β, $d\beta$, α et $d\alpha$; mais, en partant d'une propriété des courbes enveloppes, on peut sans le secours du calcul intégral, déterminer la forme de la fonction β, moins générale à la vérité que celle fournie par l'autre moyen. On sait en effet que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ tirées des équations (1) et (2) sont égales, puisque ces courbes sont tangentes; d'où il résulte qu'en désignant

par F' sa valeur tirée de (1), comme l'équation (2) donne en dérivant par rapport à x,

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

on a nécessairement la relation

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}F'=0.....(4).$$

Si entre (1), (2) et (4) on élimine x et y, on obtiendra une équation en α et β qui, étant résolue par rapport à β, fera connaître la forme de cette fonction. Ainsi si l'enveloppe est l'hyperbole $xy=d$ et si la courbe variable doit être l'ellipse

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

on trouve pour β la valeur

$$\beta=\frac{2d}{\alpha},$$

ce qui signifie que dans l'ellipse variable, le produit $4\alpha\beta$ des axes doit être constant. Si l'enveloppe est la parabole $y^2=2px$ et si la courbe variable doit être une hyperbole de la forme

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1,$$

on reconnaît que β est égal à $\frac{\alpha^2}{p}$ et que par conséquent, le rapport du carré de l'axe 2α à l'axe 2β doit être invariable.

CHAPITRE IV.

Théorie des courbes gauches. Équations d'une tangente. — Équation du plan normal. — Dérivée d'un arc de courbe. — Angles formés par une tangente avec les axes. — Plan osculateur. — Normale principale. — Flexion d'une courbe. — Angle de courbure. — Courbes osculatrices. Rayon de courbure. — Centre de courbure. — Équations du lieu géométrique des centres de courbure. — Axe pour un point donné d'une courbe. Surface des axes. Arète de rebroussement. — Torsion d'une courbe. — Condition pour qu'une courbe soit plane. — Applications à l'hélice. — Applications à l'hélice conique.

78. *Théorie des courbes gauches. Équations d'une tangente.* — Passons aux applications des principes du calcul différentiel à la théorie des courbes situées dans l'espace et rapportées à trois axes coordonnés rectangulaires. Les courbes sont dites *gauches* ou à *double courbure*, lorsqu'elles ne peuvent pas être renfermées dans un même plan. Nous avons vu qu'une courbe dans l'espace peut toujours être représentée par deux équations à trois variables, dont une seule, z par exemple, est indépendante et deux, (x, y) sont dépendantes, savoir :

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

Chaque équation prise séparément, représente une certaine surface et l'ensemble des deux équations représente la courbe résultant de leur intersection. Si on élimine successivement x et y entre elles, la courbe pourra être donnée par deux équations de la forme

$$\varphi(x, z) = 0, \quad \psi(y, z) = 0,$$

dont chacune, prise isolément, est l'équation de la projection de la courbe de l'espace sur les plans des XZ et des YZ.

Pour trouver les équations de la tangente à la courbe de l'espace en un point donné, remarquons que si l'on mène d'abord une sécante, les projections de cette droite sur les plans des XZ et des YZ seront aussi deux sécantes dans les deux projections de la courbe de l'espace. En supposant ensuite que l'un des deux points d'intersection de l'espace se rapproche indéfiniment de l'autre, jusqu'à se confondre avec lui, la sécante deviendra une tangente et comme les points d'intersection de l'espace ne peuvent se réunir sans que les projections de ces points ne viennent aussi se confondre, il en résulte que lorsque la sécante de l'espace deviendra tangente à la courbe, les projections de la sécante seront également tangentes aux projections de la courbe. Cela posé, soient

$$\varphi(x, z) = 0, \quad \psi(y, z) = 0,$$

les équations des projections de la courbe de l'espace sur les plans des XZ et YZ. Les équations de leurs tangentes, en désignant par (x', y', z') les coordonnées courantes de ces droites et par $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, les dérivées tirées des deux équations de la courbe, sont

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z) \ldots\ldots (1)$$

Le système de ces deux équations représente donc la tangente à la courbe de l'espace.

Si la courbe était donnée par le système des deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

les valeurs de $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ s'en déduiraient comme on l'a vu au N° 10.

79. *Équation du plan normal.* — Quand on considère une courbe dans l'espace, on appelle encore *normale* toute perpendiculaire élevée sur la tangente au point de contact; mais il est évident qu'il y en a un nombre infini renfermées toutes dans un plan perpendiculaire à la tangente, plan que l'on nomme *plan normal.* L'équation de ce plan s'obtient en cherchant l'équation d'un plan passant par le point de contact (x, y, z) et perpendiculaire à la tangente dont on vient de trouver les équations. En désignant par (x', y', z') les coordonnées courantes de ce plan, son équation est

$$(x' - x)\frac{dx}{dz} + (y' - y)\frac{dy}{dz} + z' - z = 0,$$

que l'on peut aussi écrire de la manière suivante :

$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0.....(1)$$

80. *Dérivée d'un arc de courbe.* — Pour trouver la dérivée d'un arc de courbe dans l'espace, c'est-à-dire la limite du rapport de l'accroissement d'un arc de courbe à l'accroissement de la variable indépendante, considérons cette courbe dans son cylindre projetant sur le plan XY, cylindre que nous pourrons développer ensuite dans un plan sans changer la longueur de la courbe. En désignant par s un arc de la courbe de l espace limité au point (x, y, z) et par s' l'arc correspondant de la projection sur le plan des XY, il est visible que dans la figure développée, les longueurs des arcs s et s' n'ont pas varié et que les coordonnées de l'extrémité de l'arc s sont z et s' ; on a donc pour la courbe devenue plane,

$$\frac{ds}{dz}=\sqrt{1+\left(\frac{ds'}{dz}\right)^2};$$

or, en considérant la projection s' dans le plan XY, on a

$$\frac{ds'}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

et comme x et y sont fonctions de z, on a aussi

$$\frac{ds'}{dz}=\frac{ds'}{dx}\cdot\frac{dx}{dz},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}.$$

En substituant on trouve

$$\frac{ds}{dz}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

Pour avoir la dérivée $\frac{ds}{dz}$ de l'arc, il suffira de remplacer $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ par leur valeur tirée des deux équations de la courbe.

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

et donne l'expression de la différentielle d'un arc de courbe dans l'espace.

On y parvient immédiatement en faisant passer par deux points consécutifs de la courbe, ayant pour coordonnées x, y, z et $x+dx$,

$y + dy$, $z + dz$, trois plans parallèles aux plans coordonnés, ce qui donne naissance à un petit parallélipipède rectangle dont la diagonale est ds et dont les trois arêtes contigues sont dx, dy, dz. On sait que l'on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

81. *Angles formés par une tangente avec les axes.* — Pour trouver les angles formés par la tangente en un point (x, y, z) de la courbe de l'espace, avec les trois axes, remarquons que si on mène une sécante passant par ce point et un autre point de la courbe ayant pour coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, les angles cherchés sont évidemment ceux que forme la sécante avec les axes, lorsque le deuxième point d'intersection vient coïncider avec le premier. Or, si l'on considère le parallélipipède formé dans l'espace par les coordonnées des deux extrémités de l'arc Δs et ayant pour arêtes Δx, Δy, Δz et pour diagonale la corde $\Delta' s$, il est visible que les cosinus des angles formés par cette corde avec les axes sont

$$\frac{\Delta x}{\Delta' s},\quad \frac{\Delta y}{\Delta' s},\quad \frac{\Delta z}{\Delta' s},$$

et comme $\Delta' s$ est égal à $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, ces valeurs peuvent s'écrire ainsi

$$\frac{\dfrac{\Delta x}{\Delta z}}{\sqrt{1 + \dfrac{\Delta x^2}{\Delta z^2} + \dfrac{\Delta y^2}{\Delta z^2}}},\quad \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta z}}{\sqrt{1 + \dfrac{\Delta x^2}{\Delta z^2} + \dfrac{\Delta y^2}{\Delta z^2}}},\quad \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\Delta x^2}{\Delta z^2} + \dfrac{\Delta y^2}{\Delta z^2}}}.$$

Si l'on passe à la limite en faisant évanouir Δz, il vient pour les angles θ, θ', θ'' formés par la tangente avec les axes des X, Y et Z,

$$\cos\theta = \frac{\dfrac{dx}{dz}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2}} = \frac{\dfrac{dx}{dz}}{\dfrac{ds}{dz}},$$

$$\cos\theta' = \frac{\dfrac{dy}{dz}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2}} = \frac{\dfrac{dy}{dz}}{\dfrac{ds}{dz}},$$

$$\cos\theta'' = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{ds}{dz}}.$$

Dans chaque application, il faudra remplacer $\frac{ds}{dz}$ par la valeur trouvée plus haut et substituer à $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ leur valeur tirée des équations de la courbe. Au point de vue des infiniment petits, ces valeurs peuvent se mettre sous la forme

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\theta' = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\theta'' = \frac{dz}{ds},$$

en supprimant le dénominateur commun dz.

On serait arrivé aux mêmes conclusions en cherchant directement, par les formules de la géométrie analytique, les angles que forme avec les axes, la tangente dont on a trouvé les équations (N° 78). On y serait arrivé aussi en considérant le petit parallélipipède dont il est question à la fin du numéro précédent.

Nous avons supposé la tangente prolongée dans le sens de l'accroissement de l'arc, provenant de l'accroissement de z. Si on considérait la tangente comme prolongée dans le sens inverse, il faudrait prendre les radicaux et ces cosinus avec les signes moins.

82. *Plan osculateur.* — Lorsqu'une courbe est gauche, c'est-à-dire, lorsqu'elle n'est pas renfermée dans un même plan, on ne peut par deux tangentes quelconques, faire passer un même plan; mais on peut par ces deux droites, faire passer deux plans qui soient parallèles entre eux. Concevons que l'un des points de contact restant fixe, l'autre se rapproche indéfiniment du premier sans que les plans cessent d'être parallèles. Ceux-ci coïncideront en même temps que les deux points de contact et formeront le *plan osculateur.* Il est visible que ce plan n'est autre que celui qui contient deux tangentes consécutives ou deux éléments consécutifs de la courbe, puisque l'un des plans, au moment de la coïncidence, contient les deux tangentes, c'est-à-dire, deux éléments consécutifs de la courbe. Désignons par (x, y, z) les coordonnées du premier point de contact et par (x', y', z') les coordonnées courantes de la tangente et du plan qui la contient. Les équations de la tangente sont

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z).$$

L'équation d'un plan passant par (x, y, z) est de la forme

$$a(x'-x)+b(y'-y)+z'-z=0,$$

a et b étant quelconques, et pour que la tangente y soit renfermée, il faut que les coordonnées courantes (x', y', z') de cette droite satisfassent à l'équation du plan, c'est-à-dire, que ces coordonnées (x', y', z') doivent être considérées comme identiques dans les trois équations. Si l'on élimine $x'-x$ et $y'-y$ et qu'on supprime le facteur commun $z'-z$, on trouve pour équation de condition,

$$a\frac{dx}{dz}+b\frac{dy}{dz}+1=0.$$

Prenons un second point sur la courbe, ayant pour coordonnées $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, et désignons par $\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)$, $\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)$ les accroissements que prennent $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$, lorsqu'on remplace x par $x+\Delta x$, etc. Les équations de la tangente en ce second point seront

$$x'-x-\Delta x=\left[\frac{dx}{dz}+\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)\right](z'-z-\Delta z),$$

$$y'-y-\Delta y=\left[\frac{dy}{dz}+\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)\right](z'-z-\Delta z).$$

L'équation d'un plan passant par le point $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ est de la forme

$$a'(x'-x-\Delta x)+b'(y'-y-\Delta y)+z'-z-\Delta z=0,$$

et pour que celui-ci contienne la tangente, il faut, comme plus haut, que les coefficients a', b' satisfassent à l'équation

$$a'\left[\frac{dx}{dz}+\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)\right]+b'\left[\frac{dy}{dz}+\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)\right]+1=0.$$

Si les deux plans sont parallèles, les coefficients a, b et a', b' doivent être les mêmes de part et d'autre, et on aura pour déterminer a, b les deux équations

$$a\frac{dx}{dz}+b\frac{dy}{dz}+1=0,$$

$$a\left[\frac{dx}{dz}+\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)\right]+b\left[\frac{dy}{dz}+\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)\right]+1=0,$$

ou bien, en simplifiant la seconde au moyen de la première,

$$a\frac{dx}{dz}+b\frac{dy}{dz}+1=0,$$

$$a\Delta\frac{dx}{dz}+b\Delta\frac{dy}{dz}=0.$$

Celles-ci donnent

$$a=\frac{\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)}{\frac{dy}{dz}\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)-\frac{dx}{dz}\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)},\quad b=\frac{\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)}{\frac{dx}{dz}\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)-\frac{dy}{dz}\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)}$$

et on aura, après la substitution de ces valeurs, l'équation du plan parallèle contenant la tangente au point (x, y, z). Passant ensuite à la limite, en faisant évanouir Δz, cette équation deviendra celle du plan osculateur. Pour savoir ce que deviennent a et b à la limite, remarquons que z est la variable indépendante et que $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ sont des fonctions de z; mettons donc ces valeurs sous la forme

$$a=\frac{\frac{\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)}{\Delta z}}{\frac{dy}{dz}\frac{\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)}{\Delta z}-\frac{dx}{dz}\frac{\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)}{\Delta z}},\quad b=\frac{\frac{\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)}{\Delta z}}{\frac{dx}{dz}\frac{\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)}{\Delta z}-\frac{dy}{dz}\frac{\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)}{\Delta z}},$$

et il vient à la limite,

$$a=\frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}},\quad b=\frac{\frac{d^2x}{dz^2}}{\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}},$$

parce que $\frac{\Delta\left(\frac{dy}{dz}\right)}{\Delta z}$ et $\frac{\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)}{\Delta z}$ deviennent alors $\frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dz}$ et $\frac{d\left(\frac{dx}{dz}\right)}{dz}$ ou $\frac{d^2y}{dz^2}$ et $\frac{d^2x}{dz^2}$. L'équation du plan osculateur est donc

$$(x'-x)\frac{d^2y}{dz^2}-(y'-y)\frac{d^2x}{dz^2}+(z'-z)\left(\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}\right)=0.$$

Elle prend une forme symétrique, si au lieu de choisir l'une des trois coordonnées z pour variable indépendante, on les considère toutes trois comme fonctions d'une quatrième variable quelconque t; on a vu (N° 27) qu'il faut alors remplacer $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$ et $\frac{d^2y}{dz^2}$ par

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}},\quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}},\quad \frac{\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}}{\left(\frac{dz}{dt}\right)^3},\quad \frac{\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}}{\left(\frac{dz}{dt}\right)^3},$$

et l'équation du plan osculateur devient

$$(x'-x)\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)+(y'-y)\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$
$$+(z'-z)\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$

dans laquelle on pourra remplacer indifféremment t par x, y, z ou toute autre variable liée à celles-ci. Pour retrouver la première équation, il suffira de faire $dt=dz$, et par conséquent $d^2z=0$.

On arrive à la même équation dans la théorie des infiniment petits, en cherchant l'équation d'un plan passant par deux éléments consécutifs de la courbe, c'est-à-dire, qui passe par trois points consécutifs ayant pour coordonnées (x, y, z) pour le premier, $(x+dx, y+dy, z+dz)$ pour le second, et pour le troisième,

$$x+dx+d(x+dx)=x+2dx+d^2x,$$
$$y+dy+d(y+dy)=y+2dy+d^2y,$$
$$z+dz+d(z+dz)=z+2dz.$$

Dans cette dernière équation, z est pris pour variable indépendante, ce qui rend dz constant et d^2z nul.

83. *Normale principale.* — Parmi les normales en nombre infini que l'on peut mener en un point d'une courbe gauche, il y en a une renfermée dans le plan osculateur, qu'on nomme *normale principale*. Comme cette droite est formée par l'intersection du plan normal et du plan osculateur, ses équations sont données par le système des équations de ces deux plans, savoir :

$$(x'-x)\frac{dx}{dz}+(y'-y)\frac{dy}{dz}+z'-z=0$$

$$(x'-x)\frac{d^2y}{dz^2}-(y'-y)\frac{d^2x}{dz^2}+(z'-z)\left(\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}\right)=0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante, en éliminant successivement $y'-y$, et $x'-x$,

$$(x'-x)\left(\frac{dy}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dx}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}\right)$$
$$-(z'-z)\left[\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}-\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{d^2x}{dz^2}\right]=0,$$

$$(y'-y)\left(\frac{dy}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dx}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}\right)$$
$$-(z'-z)\left[\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}-\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{d^2y}{dz^2}\right]=0.$$

Si au lieu de prendre z pour variable indépendante, on suppose x, y et z fonctions d'une quatrième variable arbitraire t, ce qu'on exprime en faisant sur les dérivées les mêmes transformations qu'au numéro précédent, les deux équations de la normale principale prennent la forme symétrique suivante :

$$(x'-x)\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{ds}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)-(z'-z)\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$

$$(y'-y)\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{ds}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)-(z'-z)\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{ds}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$

auxquelles on parvient en faisant d'abord usage des relations

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2=1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2,\quad \frac{ds}{dz}\frac{d^2s}{dz^2}=\frac{dx}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{dy}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}$$

dont la seconde est la dérivée de la première.

Comme la variable t est arbitraire, on peut faire $t=s$, ce qui rend $\frac{ds}{dt}$ égal à l'unité et par conséquent $\frac{d^2s}{dt^2}$ égal à zéro; les deux équations de la normale principale deviennent alors

$$(x'-x)\frac{d^2z}{ds^2}-(z'-z)\frac{d^2x}{ds^2}=0,\quad (y'-y)\frac{d^2z}{ds^2}-(z'-z)\frac{d^2y}{ds^2}=0.$$

En faisant, pour abréger, $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}=R$,

les angles λ, μ, ν que forme cette droite avec les axes sont donnés par les formules

$$\cos\lambda=\frac{\pm\frac{d^2x}{ds^2}}{R},\quad \cos\mu=\frac{\pm\frac{d^2y}{ds^2}}{R},\quad \cos\nu=\frac{\pm\frac{d^2z}{ds^2}}{R}$$

dans lesquelles il faudra prendre l'un ou l'autre signe suivant que la normale est prolongée dans le sens de la concavité ou de la convexité de la courbe.

84. *Flexion d'une courbe. Angle de courbure.* — On appelle *flexion d'une courbe* en un de ses points, la limite du rapport de l'angle que forment deux tangentes quelconques, à l'arc qui sépare les deux points de contact. Soient a, b, c les angles que forme avec les axes une tangente à une courbe au point (x, y, z) et a', b', c' les mêmes angles relatifs à une tangente en un second point $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$. L'angle η formé par ces deux tangentes, qu'elles se coupent ou non, est donné par

$$\cos\eta=\cos a\cos a'+\cos b\cos b'+\cos c\cos c',$$

à laquelle il faut joindre les deux relations nécessaires

$$1=\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c,$$
$$1=\cos^2 a'+\cos^2 b'+\cos^2 c'.$$

Si l'on ajoute membre à membre les deux dernières et qu'on retranche le double de la première, il vient

$$2\sin\tfrac{1}{2}\eta=\sqrt{(\cos a'-\cos a)^2+(\cos b'-\cos b)^2+(\cos c'-\cos c)^2}.$$

En représentant par Δs l'arc qui sépare les points de contact, cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\eta}{\frac{1}{2}\eta}\cdot\frac{\eta}{\Delta s}=\sqrt{\left(\frac{\cos a'-\cos a}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\cos b'-\cos b}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\cos c'-\cos c}{\Delta s}\right)^2},$$

ou bien en se rappelant que l'on a (N° 81)

$$\cos a=\frac{\frac{dx}{dz}}{\frac{ds}{dz}},\quad \cos b=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{ds}{dz}},\quad \cos c=\frac{1}{\frac{ds}{dz}},$$

et remarquant que $\cos a' - \cos a$ n'est autre chose que $\Delta \cos a$, c'est-à-dire, $\Delta \dfrac{\frac{dx}{dz}}{\frac{ds}{dz}}$,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\eta}{\frac{1}{2}\eta}\cdot\frac{\eta}{\Delta s}=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta z}\Delta\frac{\frac{dx}{dz}}{\frac{ds}{dz}}\right)^2+\left(\frac{1}{\Delta z}\Delta\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{ds}{dz}}\right)^2+\left(\frac{1}{\Delta z}\Delta\frac{1}{\frac{ds}{dz}}\right)^2}}{\frac{\Delta s}{\Delta z}}.$$

En passant à la limite, $\dfrac{\sin\frac{1}{2}\eta}{\frac{1}{2}\eta}$ devient l'unité, $\dfrac{\eta}{\Delta s}$ devient ce que nous avons appelé *la flexion* ou $\dfrac{d\eta}{ds}$, $\dfrac{\Delta s}{\Delta z}$ devient $\dfrac{ds}{dz}$ et $\dfrac{1}{\Delta z}\Delta\dfrac{\frac{dx}{dz}}{\frac{ds}{dz}}$ est la dérivée par rapport à z de la fraction $\dfrac{\frac{dx}{dz}}{\frac{ds}{dz}}$, c'est-à-dire, $\dfrac{\frac{ds}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\frac{d^2s}{dz^2}}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2}$. On a donc

$$\frac{d\eta}{ds}=\frac{\sqrt{\left(\frac{ds}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\frac{d^2s}{dz^2}\right)^2+\left(\frac{ds}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\frac{d^2s}{dz^2}\right)^2+\left(\frac{d^2s}{dz^2}\right)^2}}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^3}.$$

Comme on a

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2=1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$$

et par suite

$$\frac{d^2s}{dz^2}=\frac{\frac{dx}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{dy}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}},$$

cette expression se transforme dans la suivante :

$$\frac{d\eta}{ds}=\frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2}}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^3} \quad \text{.....} (1)$$

Elle prend une forme très simple lorsqu'on choisit l'arc s pour variable indépendante, au lieu de l'ordonnée z, comme au N° 83. La flexion, en prenant t pour variable indépendante, devient d'abord

$$\frac{d\eta}{ds}=\frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3},$$

et en remplaçant t par s, en ayant égard aux équations

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1, \quad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

on trouve enfin

$$\frac{d\eta}{ds}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Quand on se place au point de vue des infiniment petits, on appelle *angle de courbure*, l'angle infiniment petit $d\eta$ formé par deux tangentes consécutives. Il mesure la flexion qu'il a fallu faire subir à l'une des tangentes pour la plier suivant la tangente consécutive. C'est pour cette raison que le rapport $\frac{d\eta}{ds}$ a été appelé flexion. La valeur de cet angle est

$$d\eta=ds\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

Pour une courbe plane renfermée dans le plan des XY, l'expression de la flexion devient

$$\frac{d\eta}{ds}=\frac{1}{ds}\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2},$$

parce qu'il faut faire $z=0$, et en remarquant que l'on a

$$\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

cette équation prend la forme

$$\frac{d\eta}{ds}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{ds}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

et en tenant compte de l'expression du rayon de courbure ρ dans les courbes planes, il vient

$$\frac{d\eta}{ds}=\frac{1}{\rho}.$$

On voit par là que dans les courbes planes, la limite à laquelle nous venons de donner le nom de flexion, représente l'unité divisée par le rayon de courbure ou *le rayon de courbure inverse.*

85. *Courbes osculatrices. Cercle osculateur.* — On dit que deux courbes dans l'espace sont *osculatrices de l'ordre n* — 1, lorsque deux des projections de ces courbes dans deux des trois plans coordonnés sont elles-mêmes des osculatrices de cet ordre, c'est-à-dire, lorsque les deux courbes ayant un point commun, ont en outre les dérivées $\frac{dx}{dz}, \frac{d^2x}{dz^2} \ldots \frac{d^{n-1}x}{dz^{n-1}}, \frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dz^2} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}$, (N° 55) égales de part et d'autre. Il est visible que si ces égalités ont lieu pour deux projections, elles existeront aussi pour la troisième, puisque les formules pour le changement de la variable indépendante donnent

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^3},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\text{etc.}$$

et que les dérivées contenues dans les seconds membres, dérivées qui se rapportent aux projections dans les plans des XZ et YZ, ne peuvent être égales dans les deux courbes sans entraîner l'égalité des dérivées des premiers membres, lesquelles se rapportent aux projections dans le plan des XY. Il est visible aussi que si les projections dans les plans des XZ et YZ n'étaient pas des osculatrices du même ordre, le plus petit des deux indiquerait le nombre des dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$..... qui seraient égales, c'est-à-dire, l'ordre de contact des projections dans le plan des XY.

Il suit de là que, des trois projections d'une courbe et de son osculatrice en un point donné, il y en a toujours deux qui ont un contact du même ordre, la troisième ne pouvant avoir qu'un contact du même ordre ou d'un ordre supérieur. C'est le premier qui désigne l'ordre du contact des deux courbes de l'espace. Il suit aussi de ce qu'on a vu au N° 54, que pour deux osculatrices d'ordre différent en un même point d'une courbe, celle qui est de l'ordre le plus élevé a deux de ses projections plus rapprochées que l'autre des deux projections de la courbe donnée, ce qui ne peut avoir lieu sans que celle-ci soit dans l'espace plus rapprochée de la première osculatrice que de la seconde; car si on prend sur cette courbe et sur l'une des osculatrices qu'on suppose de l'ordre $n-1$, deux points voisins du point de contact, le carré de la distance est égal à la somme des carrés de ses trois projections, projections dont deux au moins sont des infiniment petits de l'ordre $n-1$, la troisième ne pouvant être, d'après ce qu'on vient de voir, qu'un infiniment petit du même ordre ou d'un ordre plus élevé et par conséquent négligeable. La distance de l'espace est donc aussi un infiniment petit de l'ordre $n-1$.

Ceci posé, prenons pour courbe osculatrice, le cercle et proposons-nous de déterminer son rayon et sa position, de manière à le rendre osculateur en un point (x, y, z) d'une courbe. Ce cercle est donné par deux équations de la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2$$
$$(x-\alpha)\,a+(y-\beta)\,b+z-\gamma=0,$$

la première exprimant que tous ses points sont à une distance constante ρ du centre (α, β, γ), et la seconde, que le cercle est renfermé dans un certain plan passant par le centre (α, β, γ). Les coefficients a et b qui fixent l'inclinaison de ce plan sur les axes, sont des constantes

inconnues. On voit que ces équations renferment six constantes, α, β γ, ρ, a, b, dont on peut disposer pour rendre osculateur le cercle précédent, c'est-à-dire, pour faire en sorte que les deux courbes aient un point commun (x, y, z) et que les quatre dérivées $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ soient égales dans les équations de la courbe et du cercle. Si $x = fz$, $y = Fz$ sont les deux équations de la courbe, ces dérivées auront pour valeur $f'z$, $f''z$, $F'z$, $F''z$ et la première condition donne lieu aux équations suivantes :

$$(fz-\alpha)^2 + (Fz-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2$$

$$(fz-\alpha)\,a + (Fz-\beta)\,b + z - \gamma = 0.$$

En dérivant deux fois la seconde, on est conduit aux deux équations

$$af'z + bF'z + 1 = 0, \quad af''z + bF''z = 0.$$

On tire de là les valeurs des deux constantes inconnues a et b,

$$a = \frac{F''z}{F'zf''z - f'zF''z}, \quad b = \frac{f''z}{f'zF''z - F'zf''z}.$$

Les valeurs de ces deux coefficients qui fixent la direction du plan du cercle osculateur, sont les mêmes que celles des quantités analogues trouvées pour le plan que nous avons appelé *osculateur* (N° 82); le plan du cercle osculateur se confond donc avec ce dernier.

86. *Rayon de courbure. Centre de courbure.* — Les valeurs de α, β, γ et ρ pourraient être obtenues de la même manière, en dérivant deux fois la première des équations du cercle: mais on y arrive plus promptement comme il suit : remarquons d'abord que la flexion est la même dans la courbe donnée et dans le cercle osculateur, puisqu'il n'entre dans l'expression générale de $\frac{d\eta}{ds}$ (voir (1) du N° 84) que des dérivées des deux premiers ordres, dérivées qui sont égales dans les deux courbes; or, on a vu (fin du N° 84) que dans une courbe plane et par conséquent dans le cercle osculateur, la limite $\frac{d\eta}{ds}$ est égale à $\frac{1}{\rho}$; on a donc, en égalant $\frac{1}{\rho}$ à l'expression de $\frac{d\eta}{ds}$, les dérivées étant prises dans les équations de la courbe,

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}.$$

Le rayon ρ mené au point de contact est appelé *rayon de courbure*. Sa direction est renfermée dans le plan osculateur et de plus il est normal à la courbe, car les deux équations

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z)$$

appartiennent à la tangente à la courbe ou à la tangente au cercle osculateur, suivant que les dérivées $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ sont tirées des équations de la courbe ou des équations du cercle, et comme ces dérivées sont égales de part et d'autre, il en résulte que ces deux tangentes coïncident et que par conséquent le rayon de courbure, normal au cercle, l'est aussi à la courbe. Le rayon de courbure étant à la fois normal à la courbe et renfermé dans le plan osculateur, est dirigé suivant la normale principale dont on a trouvé les équations (N° 83). Les angles λ, μ, ν que forme le rayon de courbure avec les axes, sont donc donnés par les formules

$$\cos\lambda = \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

valeurs que l'on peut encore écrire sous cette forme,

$$\cos\lambda = \rho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\mu = \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \cos\nu = \rho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Enfin les coordonnées (α, β, γ) du *centre de courbure* s'obtiennent par

la considération que les projections du rayon de courbure ρ sur les axes sont données par

$$\rho\cos\lambda,\quad \rho\cos\mu,\quad \rho\cos\nu$$

et que ces projections sont égales à

$$\alpha - x,\quad \beta - y,\quad \gamma - z.$$

En égalant ces deux valeurs, on trouve

$$\alpha = x + \rho^2\frac{d^2x}{ds^2},\quad \beta = y + \rho^2\frac{d^2y}{ds^2},\quad \gamma = z + \rho^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

87. *Équations du lieu géométrique des centres de courbure.* — Les équations du lieu géométrique des centres de courbure s'obtiennent en éliminant (x, y, z) entre les trois équations qui donnent les valeurs de (α, β, γ) et les deux équations de la courbe. Les deux équations en (α, β, γ) que l'on trouvera, sont les équations du lieu géométrique. Les rayons de courbure successifs étant renfermés dans des plans différents, il est visible que deux rayons de courbure consécutifs ne se rencontrent pas, et par conséquent, ne sauraient être des tangentes à cette courbe, ainsi que cela a lieu pour les développées des courbes planes. Le lieu géométrique des centres de courbure ne saurait donc avoir des propriétés analogues à celles des développées des courbes planes. Aussi dans les courbes à double courbure donne-t-on ce nom à des lignes essentiellement différentes et dont il sera question plus loin (N° 89).

88. *Axe pour un point donné d'une courbe. Surface des axes. Arête de rebroussement.* — On appelle *axe d'une courbe* pour un point donné, la perpendiculaire élevée sur le plan osculateur au centre de courbure. Les équations de cette droite se trouvent facilement, puisqu'on connaît l'équation du plan osculateur (N° 85) et les coordonnées du centre de courbure. En représentant par (x', y', z') ses coordonnées courantes et en laissant à (α, β, γ) leur signification précédente, on trouve pour les équations de cette droite

$$(x' - \alpha)\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right) = (z' - \gamma)\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

$$(y' - \beta)\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right) = (z' - \gamma)\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right),$$

dans lesquelles il faut remplacer (α, β, γ) par leur valeur en z trouvée plus haut (N° 87). Elles prennent alors la forme suivante, en posant $t = s$,

$$(x' - x)\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right) - (z' - z)\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right) = \frac{dy}{ds},$$

$$(y' - y)\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right) - (z' - z)\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right) = -\frac{dx}{ds}.$$

On peut aussi considérer l'axe que quelques auteurs nomment *droite polaire*, comme étant l'intersection de deux plans normaux consécutifs, et par conséquent, comme étant le lieu géométrique des centres de toutes les sphères que l'on peut faire passer par trois points consécutifs de la courbe.

L'ensemble des axes correspondant à tous les points d'une courbe forme une surface que l'on nomme *surface des axes* ou *surface polaire*. On peut la considérer comme engendrée par un axe assujetti à se mouvoir suivant une loi déterminée qui dépend de la forme de la courbe donnée. Cette surface est donc *réglée*. Elle est de plus *développable*, c'est-à-dire, qu'elle peut être développée dans un plan sans rupture ni duplicature, ce qui exige que deux génératrices consécutives soient renfermées dans un même plan et viennent par conséquent se couper, ce qui a lieu en effet, car si l'on considère trois plans normaux consécutifs, il est clair que le plan intermédiaire sera coupé par le premier et par le troisième suivant deux droites qui seront deux axes successifs. Ces axes par leurs intersections deux à deux déterminent une courbe à double courbure que l'on nomme *arête de rebroussement* de la surface développable. Il est facile de reconnaître que les plans normaux sont tous tangents à la surface des axes; car en considérant trois plans normaux consécutifs, le plan intermédiaire renfermera, comme on vient de le voir, l'élément de la surface des axes compris entre deux axes consécutifs, et pourra par conséquent, être considéré comme le prolongement en tous sens de cet élément; or, de même qu'une tangente à une courbe est considérée comme le prolongement d'un élément de la courbe, de même on doit considérer les plans tangents à une surface développable comme le prolongement de ses éléments superficiels.

Un raisonnement semblable servirait à prouver que tous les axes ou

toutes les génératrices de la surface développable sont tangents à l'arête de rebroussement.

L'équation de la surface des axes peut être obtenue dans chaque cas, en éliminant (x, y, z) entre les deux équations de l'axe et les deux équations de la courbe à double courbure. La relation entre (x', y', z') que l'on obtiendra, sera l'équation cherchée.

Les équations finies de l'arête de rebroussement s'obtiennent en remarquant que, puisque les axes successifs sont tangents à cette courbe, les projections des axes sont aussi des tangentes aux projections de la courbe; d'où il suit que les projections de l'arête ne sont autre chose que les courbes enveloppes de toutes les projections des axes. Les équations pourront donc être trouvées par la théorie des courbes enveloppes.

Quand on connaît l'équation de la surface des axes, il suffit de chercher l'une des équations de l'arête, puisque celle-ci est contenue dans la surface.

La théorie des surfaces enveloppes conduirait également à l'équation de la surface des axes, puisque celle-ci est tangente à tous les plans normaux.

89. *Développée d'une courbe gauche. Son équation. Ses propriétés.* — Si l'on conçoit un fil inextensible constamment tendu, s'enroulant sur la surface des axes, en s'appuyant sur la courbe de l'espace, la ligne suivant laquelle ce fil s'y enroulera, prend le nom de *développée*. Comme la développée est renfermée dans la surface des axes, l'équation de cette dernière est une des équations de la développée. La seconde s'obtient par la remarque, qu'il résulte du mode de génération, que toute tangente à la développée étant représentée par la partie rectiligne du fil, rencontre la courbe à double courbure. Si donc (x, y, z) sont les coordonnées d'un point de la développée, (α, β, γ) celles du point correspondant dans la courbe de l'espace, et (x', y', z'), les coordonnées courantes de la tangente; comme les équations d'une tangente en (x, y, z) sont

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z),$$

on aura, en remplaçant (x', y', z') par (α, β, γ),

$$\alpha - x = \frac{dx}{dz}(\gamma - z), \quad \beta - y = \frac{dy}{dz}(\gamma - z),$$

et il suffira d'éliminer (α, β, γ) entre ces deux dernières et les deux équations de la courbe de l'espace, pour avoir une relation entre (x, y, z) qui sera la seconde équation cherchée de la développée. Il est vrai que cette relation, contenant $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$, se présente sous forme différentielle; mais le calcul intégral apprend à remonter de là à l'équation finie.

Remarquons qu'il résulte aussi du mode de génération, 1° que le nombre de développées pour une courbe à double courbure ou pour une courbe plane est infini, puisque la position initiale du fil est indéterminée. 2° La partie rectiligne du fil, comprise entre la développée et la courbe de l'espace, est constamment normale à cette dernière, puisque, si l'on mène au point où se termine le fil, un plan normal à la courbe à double courbure, comme celui-ci est tangent à la surface des axes, il doit contenir toutes les tangentes menées de ce point à la surface des axes et par conséquent le fil rectiligne. 3° Le point du fil qui s'appuie sur la courbe de l'espace pendant qu'il se déroule de la développée, est toujours le même; en effet, concevons le fil dans une quelconque de ses positions et désignons par o le point où la partie rectiligne touche la développée et par m, le point où elle se termine sur la courbe à double courbure. Déroulons infiniment peu le fil enroulé sur la développée et supposons que l'extrémité m, au lieu de décrire un petit arc mm' de la courbe de l'espace, décrive un petit arc mm'' différent de mm'. L'arc mm'' pouvant être considéré, à la limite, comme décrit du centre o, est situé sur une sphère ayant son centre en ce point; le fil om'' est donc normal en m'' à l'arc mm''. On a vu, d'autre part, que ce même fil est normal en m' à l'élément mm', ce qui ne peut avoir lieu que si les points m' et m'' se confondent. La courbe décrite par le point m se confond donc avec la courbe de l'espace.

Enfin, puisque la forme qu'affecte la développée est due à la tension du fil, il est évident que la longueur de la courbe tracée sur la surface des axes, est la plus courte possible entre deux quelconques de ses points. D'où il suit que si on développe dans un plan la surface des axes, les développées se rabattront suivant des lignes droites, qui sont, en effet, les plus courtes qu'on puisse tracer dans un plan entre deux points donnés.

90. *Torsion d'une courbe. Condition pour qu'une courbe soit plane.* On appelle *torsion* d'une courbe la limite du rapport de l'angle formé par deux plans osculateurs, à l'arc de courbe qui sépare les deux

points de contact, ou la valeur de ce rapport lorsque l'arc s'évanouit. L'équation du plan osculateur au point de la courbe (x, y, z), étant de la forme

$$(x'-x)\frac{d^2y}{dz^2}-(y'-y)\frac{d^2x}{dz^2}+(z'-z)\left(\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}\right)=0,$$

celle du plan osculateur au point $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ est

$$\begin{aligned}(x'-x-\Delta x)\left(\frac{d^2y}{dz^2}+\Delta\frac{d^2y}{dz^2}\right)-(y'-y-\Delta y)\left(\frac{d^2x}{dz^2}+\Delta\frac{d^2x}{dz^2}\right)\\ +(z'-z-\Delta z)\left[\left(\frac{dy}{dz}+\Delta\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{d^2y}{dz^2}+\Delta\frac{d^2y}{dz^2}\right)\right.\\ \left.-\left(\frac{dx}{dz}+\Delta\frac{dx}{dz}\right)\left(\frac{d^2x}{dz^2}+\Delta\frac{d^2x}{dz^2}\right)\right]=0,\end{aligned}$$

en désignant par $\Delta\left(\frac{dx}{dz}\right)$, $\Delta\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)$.......... les accroissements des fonctions $\frac{dx}{dz}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$....... quand on y change z en $z+\Delta z$. Mettons ces deux équations sous la forme

$$(x'-x)X+(y'-y)Y+(z'-z)Z=0,$$

$$\begin{aligned}(x'-x-\Delta x)(X+\Delta X)+(y'-y-\Delta y)(Y+\Delta Y)\\ +(z'-z-\Delta z)(Z+\Delta Z)=0.\end{aligned}$$

L'angle ε formé par ces deux plans est

$$\cos\varepsilon=\frac{X(X+\Delta X)+Y(Y+\Delta Y)+Z(Z+\Delta Z)}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{(X+\Delta X)^2+(Y+\Delta Y)^2+(Z+\Delta Z)^2}};$$

d'où l'on tire

$$\sin^2\varepsilon=\frac{(X\Delta Y-Y\Delta X)^2+(Y\Delta Z-Z\Delta Y)^2+(Z\Delta X-X\Delta Z)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)[(X+\Delta X)^2+(Y+\Delta Y)^2+(Z+\Delta Z)^2]}.$$

Avant de passer à la limite, écrivons cette valeur de la manière suivante, en désignant par Δs l'arc qui sépare les deux points de la courbe,

$$\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\Delta s}\right)^2=\frac{\left(X\frac{\Delta Y}{\Delta z}-Y\frac{\Delta X}{\Delta z}\right)^2+\left(Y\frac{\Delta Z}{\Delta z}-Z\frac{\Delta Y}{\Delta z}\right)^2+\left(Z\frac{\Delta X}{\Delta z}-X\frac{\Delta Z}{\Delta z}\right)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)[(X+\Delta X)^2+(Y+\Delta Y)^2+(Z+\Delta Z)^2]\frac{\Delta s^2}{\Delta z^2}}.$$

Si maintenant on rapproche indéfiniment les deux points et si on remarque que, quand Δz s'évanouit, les rapports

$$\frac{\Delta X}{\Delta z},\quad \frac{\Delta Y}{\Delta z},\quad \frac{\Delta Z}{\Delta z},\quad \frac{\Delta s}{\Delta z},\quad \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$$

deviennent

$$\frac{dX}{dz},\quad \frac{dY}{dz},\quad \frac{dZ}{dz},\quad \frac{ds}{dz},\quad \text{et l'unité},$$

on trouve, en désignant par $\frac{d\varepsilon}{ds}$ la valeur du rapport $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ à la limite et en observant que ΔX, ΔY, ΔZ sont nuls,

$$\left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = \frac{\left(X\frac{dY}{dz} - Y\frac{dX}{dz}\right)^2 + \left(Y\frac{dZ}{dz} - Z\frac{dY}{dz}\right)^2 + \left(Z\frac{dX}{dz} - X\frac{dZ}{dz}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 (X^2 + Y^2 + Z^2)^2};$$

puis remplaçant X, Y, Z par leur valeur, on trouve pour la torsion $\frac{d\varepsilon}{ds}$,

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\frac{d^2x}{dz^2}\cdot\frac{d^3y}{dz^3} - \frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{d^3x}{dz^3}}{\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2}.$$

Cette expression prend une forme symétrique si, au lieu de traiter z comme variable indépendante, on considère (x, y, z) comme fonctions d'une nouvelle variable t; on trouve alors, en remarquant que le dénominateur est égal à $\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{ds}{dz}\right)^6$,

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\rho^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}\left\{\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^3z}{dt^3} - \frac{d^2z}{dt^2}\frac{d^3y}{dt^3}\right) + \frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^3z}{dt^3}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{dz}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^3x}{dt^3}\right)\right\}.$$

Quand on prend de nouveau z pour variable indépendante, cette expression devient

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\rho^2}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^6}\left(\frac{d^2x}{dz^2}\frac{d^3y}{dz^3} - \frac{d^2y}{dz^2}\frac{d^3x}{dz^3}\right).$$

La quantité $d\varepsilon$ qui, dans la théorie des infiniment petits, est l'angle formé par deux plans osculateurs séparés par l'élément de courbe ds, se nomme *angle de torsion* ou *angle de seconde cuurbure.*

On déduit de cette valeur de la torsion d'une courbe, la condition nécessaire pour que celle-ci soit plane. Il faut, en effet, que tous les plans osculateurs se confondent et par conséquent que $d\varepsilon$ soit nul pour toute valeur de z, ce qui exige que l'équation

$$\frac{d^2x}{dz^2}\cdot\frac{d^3y}{dz^3}-\frac{d^3x}{dz^3}\cdot\frac{d^2y}{dz^2}=0$$

soit satisfaite identiquement, c'est-à-dire, pour toute valeur de z. Si z ne disparaissait pas de l'équation, celle-ci servirait à trouver le point de la courbe où la torsiun est nulle. Il est visible que lorsque la courbe est plane, l'équation du plan osculateur en un point quelconque devient l'équation du plan de la courbe.

Comme les axes successifs d'une courbe donnée sout normaux aux plans osculateurs successifs, les angles formés par ces axes sont égaux aux angles formés par les plans osculateurs. D'un autre côté, les plans normaux successifs étant perpendiculaires aux éléments de la courbe, les angles qu'ils forment entre eux sont égaux aux angles de courbure de celle-ci, et comme ces plans normaux se confondent avec les faces successives de la surface développable, faces qui contiennent chacune deux éléments de l'arête de rebroussement, il est visible que ces plans normaux successifs ne sont autre chuse que les plans osculateurs successifs de l'arête de rebroussement. Il existe donc entre une courbe donnée et l'arête de rebroussement de sa surface polaire, cette relation que les angles de courbure de la première sont égaux aux angles de torsion de la seconde, tandis que les angles de courbure de celle-ci sunt égaux aux angles de torsion de la première. Il suit de là que si on traite l'arête de rebroussement comme on a traité la courbe donnée et qu'on détermine sa surface polaire et par suite, l'arête de rebroussement de celle-ci, cette seconde arête aura ses angles de courbure et de torsion égaux aux angles de torsion et de courbure de la première arête. D'où il résulte qne la courbe donnée et la seconde arête de rebroussement ont les mêmes angles de courbure et les mêmes angles de torsion.

91. *Applications à l'hélice.* — Appliquuns cette théorie à l'*hélice*, c'est-à-dire, à la courbe tracée sur un cylindre droit à base circulaire, qui coupe toutes les génératrices sous un angle constant ou dont

toutes les tangentes sont également inclinées sur la base du cylindre. Cherchons d'abord les équations de cette courbe, en prenant pour origine des coordonnées, le centre de la base du cylindre et pour axe des Z, son axe. Comme la courbe est tracée sur la surface, elle a pour projection des XY la base même du cylindre; une des équations de l'hélice est donc, r étant le rayon de la base,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pour trouver les autres équations, remarquons que si on développe la surface convexe du cylindre, elle formera un rectangle A'B'C'D' (fig. 25) et l'hélice AC deviendra l'oblique A'a, puisque les tangentes aux différents points de la courbe étant également inclinées sur les génératrices du cylindre, devront après le développement, faire des angles égaux avec des parallèles à A'D' et par conséquent se confondre toutes dans une même droite A'a. Une ordonnée mn de l'hélice sur la surface du cylindre, deviendra donc l'ordonnée $m'n'$ de l'oblique A'a et l'arc de cercle An deviendra A'n'; or, le triangle rectangle A'$m'n'$ donne

$$m'n' = \mathrm{A}'n' \operatorname{tang} m'\mathrm{A}'n' = \mathrm{A}n \operatorname{tang} v = a.\mathrm{A}n, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A}n = \frac{mn}{a},$$

v étant l'angle constant m' A' n' et a sa tangente. D'un autre côté, si on désigne par (x, y, z) les trois coordonnées du point m de l'hélice, c'est-à-dire, Op, pn, mn et par u l'arc de cercle An, on trouvera facilement, en suivant la même marche qu'au commencement du N° 61, c'est-à-dire, en considérant à part, la base du cylindre (fig. 25 bis), et décrivant du point O comme centre avec un rayon égal à l'unité, le cercle $\alpha\beta$,

$$\alpha\nu = \frac{u}{r},$$

$$\mathrm{O}p = x = r \sin \frac{u}{r}, \quad pn = y = r \cos \frac{u}{r},$$

ou bien, à cause de $u = \frac{z}{a}$, comme on vient de le voir,

$$x = r \sin \frac{z}{ar}, \quad y = r \cos \frac{z}{ar}.$$

Ces deux équations en (x, y, z) appartiennent aux projections de l'hélice sur les plans des XZ et des YZ.

Le triangle rectangle $aA'B'$ donne pour a ou $\tang v$ la valeur $\frac{aB'}{A'B'}$ c'est-à-dire $\frac{p}{2\pi r}$, en désignant par p la distance aB' que l'on nomme *pas de l'hélice*. On déduit des deux dernières équations,

$$\frac{dx}{dz}=\frac{1}{a}\cos\frac{z}{ar},\quad \frac{dy}{dz}=-\frac{1}{a}\sin\frac{z}{ar},$$

$$\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{1}{a^2r}\sin\frac{z}{ar},\quad \frac{d^2y}{dz^2}=-\frac{1}{a^2r}\cos\frac{z}{ar},\quad \frac{d^3x}{dz^3}=-\frac{1}{a^3r^2}\cos\frac{z}{ar},$$

$$\frac{d^3y}{dz^3}=\frac{1}{a^3r^2}\sin\frac{z}{ar}.$$

En substituant, on trouve : 1° *équations de la tangente*

$$x'-x=\frac{1}{a}\cos\frac{z}{ar}(z'-z),\quad y'-y=-\frac{1}{a}\sin\frac{z}{ar}(z'-z),$$

ou bien

$$x'-x=\frac{y}{ar}(z'-z),\quad y'-y=-\frac{x}{ar}(z'-z).$$

2° *équation du plan normal*

$$(x'-x)\cos\frac{z}{ar}-(y'-y)\sin\frac{z}{ar}+a(z'-z)=0,$$

ou bien

$$x'y-y'x+(z'-z)ar=0.$$

3° *Dérivée de la courbe*

$$\frac{ds}{dz}=\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}=\frac{1}{\sin v}.$$

4° *Angles que forme la tangente avec les axes*

$$\cos\theta=\frac{\cos\frac{z}{ar}}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{y}{r}\cos v,\quad \cos\theta'=-\frac{\sin\frac{z}{ar}}{\sqrt{1+a^2}}=-\frac{x}{r}\cos v,$$

$$\cos\theta''=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\sin v.$$

Cette troisième équation constate que la tangente fait avec l'axe des Z un angle invariable, ce qui résulte, du reste, de la définition de cette courbe.

5° *Équation du plan osculateur*

$$(x' - x)\, a \cos\frac{z}{ar} - (y' - y)\, a \sin\frac{z}{ar} - (z' - z) = 0,$$

ou bien

$$x'y - y'x = \frac{r}{a}(z' - z).$$

On en conclut que ce plan fait avec la base du cylindre un angle invariable ayant a pour tangente.

6° *Équations de la normale principale*

$$z' = z \quad \text{et} \quad y' - y = \cot\frac{z}{ar}(x' - x),$$

ou bien

$$z' = z \quad \text{et} \quad yx' - xy' = 0.$$

La première équation apprend que cette normale principale est parallèle à la base du cylindre, et la seconde, qu'elle rencontre toujours son axe.

7° *Valeur de la flexion ou de l'angle de courbure*

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{\cos^2 v}{r}, \quad \text{ou} \quad d\eta = \frac{ds}{r}\cos^2 v.$$

On voit que la courbure est invariable.

8° *Rayon de courbure*

$$\rho = r(1 + a^2) = \frac{r}{\cos^2 v}.$$

9° *Angles formés par le rayon de courbure avec les axes*

$$\cos\lambda = -\sin\frac{z}{ar} = -\frac{x}{r}, \quad \cos\mu = -\cos\frac{z}{ar} = -\frac{y}{r}, \quad \cos\nu = 0.$$

La dernière exprime que le rayon de courbure est toujours perpendiculaire à l'axe du cylindre.

10° *Coordonnées du centre de courbure*

$$\alpha = x - \frac{r}{\cos^2 v}\sin\frac{z}{ar} = -a^2 x, \quad \beta = y - \frac{r}{\cos^2 v}\cos\frac{z}{ar} = -a^2 y, \quad \gamma = z.$$

11° *Équations de la ligne des centres de courbure*

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^4r^2, \quad \alpha = -a^2r\sin\frac{z}{ar}, \quad \beta = -a^2r\cos\frac{z}{ar}.$$

On voit que cette courbe est une hélice, ayant le même axe que la première, et tracée sur un cylindre dont le rayon est a^2r. Dans cette nouvelle hélice, l'inclinaison constante des tangentes sur la base du cylindre est le complément de l'angle v, et le pas de vis qui, dans la première, est égal à $2a\pi r$, conserve cette même valeur. On reconnaît aussi que le lieu des centres de courbure de cette dernière hélice n'est autre que l'hélice primitive.

12° *Équations de l'axe de la courbe au point* (x, y, z)

$$x'y - y'x + (z' - z)\,ar = 0, \ldots.(1)$$
$$x'x + y'y = -a^2r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

13° *Équation de la surface des axes*

$$x'\sin\left(\frac{az' \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 - a^4r^2}}{a^2r}\right)$$
$$+ y'\cos\left(\frac{az' \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 - a^4r^2}}{a^2r}\right) + a^2r = 0.$$

Pour obtenir cette équation, on résout par rapport à x et y, les deux équations $x^2 + y^2 = r^2$ et (2); on substitue les valeurs dans (1), puis tirant les valeurs de z, on les substitue dans $x = r\sin\frac{z}{ar}$, $y = r\cos\frac{z}{ar}$ et les valeurs obtenues ainsi pour x et y sont introduites dans (2).

Dans cette équation de la surface des axes, le signe *moins* répond au cas où l'hélice tourne de gauche à droite comme dans la figure. Si l'hélice tournait de droite à gauche, l'inclinaison v des tangentes sur la base serait un angle obtus; a changerait donc de signe et l'on prendrait le signe *plus* du radical.

14° *Équations de l'arête de rebroussement*

$$x'^2 + y'^2 = a^4r^2 \quad \text{et} \quad x'\sin\frac{z'}{ar} + y'\cos\frac{z'}{ar} = -a^2r$$

ou bien

$$x' = -a^2 r \sin\frac{z'}{ar}, \quad y' = -a^2 r \cos\frac{z'}{ar},$$

qui se confond avec l'hélice trouvée sous le N° 11°, pour le lieu des centres de courbure. Ces dernières équations se trouvent fort simplement, en combinant l'équation de la surface des axes avec l'équation de la courbe enveloppe de toutes les projections XY de l'axe, représentées par la seconde des équations (12°) mise sous la forme

$$x' \sin\frac{z}{ar} + y' \cos\frac{z}{ar} = -a^2 r.$$

15° *Torsion et angle de torsion*

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{a}{r}\cos^2 v = \frac{\sin 2v}{2r} \quad \text{et} \quad d\varepsilon = \frac{ds}{2r}\sin 2v.$$

92. *Applications à l'hélice conique.* — Considérons encore l'*hélice conique*, c'est-à-dire, la courbe tracée sur une surface conique droite à base circulaire, de manière que les touchantes aient une inclinaison constante sur les génératrices ou sur la base. En désignant par l, r, v la hauteur du cône, le rayon de la base et l'inclinaison des touchantes sur la base, les deux équations de cette courbe sont

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{l^2}(l - z)^2, \quad \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \cot^2 v;$$

la première exprimant que la courbe est située sur la surface conique, et la seconde, que l'inclinaison des tangentes sur le plan des XY est égale à l'angle constant v. En différenciant la première et en faisant, pour abréger, $k = \sqrt{\frac{l^2}{r^2}\cot^2 v - 1}$, ces équations prennent la forme suivante(*),

$$\frac{dx}{dz} = \frac{ky - x}{l - z}, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{y + kx}{l - z}.$$

(*) On trouve pour $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ deux systèmes de valeurs, répondant aux deux valeurs de k. Celles-ci conviennent quand la spirale tourne, comme dans la figure, de gauche à droite. Si elle tournait de droite à gauche, k changerait de signe, parce que dans la valeur trouvée plus bas, t devient obtus et tang t devient négatif.

On tire de là

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -k\frac{y+kx}{(l-z)^2}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = k\frac{x-ky}{(l-z)^2},$$

$$\frac{d^3x}{dz^3} = -k(1+k^2)\frac{y}{(l-z)^3}, \quad \frac{d^3y}{dz^3} = k(1+k^2)\frac{x}{(l-z)^3}.$$

Soient M (fig. 24) un point de l'hélice, OC la génératrice du cône qui passe par ce point, MT une tangente à la courbe et MP une perpendiculaire sur le rayon AC. Si l'on conçoit une sphère décrite du point M comme centre, avec un rayon quelconque, elle sera coupée par les trois faces de l'angle trièdre M suivant le triangle sphérique abc rectangle en a, qui fournit la relation

$$\cos bc = \cos ac \cos ab \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \sin v = \cos a \cos t,$$

où l'on désigne par a l'angle au sommet du cône, et par t l'angle constant que font les tangentes avec les génératrices. Au moyen de cette relation la valeur de k devient, en observant que $\frac{l}{r} = \cot a$,

$$k = \sqrt{\cot^2 a \cot^2 v - 1} = \frac{\sqrt{\cos^2 a \cos^2 v - \sin^2 a \sin^2 v}}{\sin a \sin v}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 a - \sin^2 v}}{\sin a \sin v} = \frac{\operatorname{tang} t}{\sin a}.$$

Le triangle sphérique abc donne aussi $\operatorname{tang} aMb = \sin aMc \operatorname{tang} c$, d'où l'on tire encore $\frac{\operatorname{tang} t}{\sin a} = \operatorname{tang} \text{TPC} = k$.

Cela posé, on trouve : 1° *Dérivée de l'arc*

$$\frac{ds}{dz} = \frac{1}{\sin v}.$$

On conclut de là que l'arc s est égal à $\frac{z}{\sin v}$ ou à la longueur de la tangente.

2° *Équation du plan osculateur au point* (x, y, z)

$$(x'-x)(x-ky) + (y'-y)(y+kx) + (z'-z)(l-z)\cot^2 v = 0.$$

3° *Équation du plan normal*

$$(x'-x)(x-ky)+(y'-y)(y+kx)-(z'-z)(l-z)=0.$$

4° *Normale principale*

$$z'=z,\quad y'-y=\frac{ky-x}{y+kx}(x'-x).$$

5° *Rayon de courbure*

$$\rho=\frac{\tang a}{\cos v\sin t}(l-z);\quad \cos\lambda=-\frac{y+kx}{l-z}\tang v,$$

$$\cos\mu=\frac{x-ky}{l-z}\tang v,\quad \cos\nu=0.$$

6° *Coordonnées du centre de courbure*

$$\alpha=-\frac{y}{k\cos^2 v}-x\tang^2 v,\quad \beta=+\frac{x}{k\cos^2 v}-y\tang^2 v,\quad \gamma=z.$$

7° *Équations du lieu géométrique des centres de courbure*

$$\alpha^2+\beta^2=\tang^2 a\,\frac{1+k^2\sin^4 v}{k^2\cos^4 v}(l-\gamma)^2,$$

$$\frac{d\alpha}{d\gamma}=-\frac{\alpha+k\beta}{l-\gamma},\quad \frac{d\beta}{d\gamma}=\frac{k\alpha-\beta}{l-\gamma}.$$

Ces deux équations se présentent sous forme différentielle; mais on verra plus loin, dans le calcul intégral, les équations finies qui tiennent lieu de celles-ci.

8° *Torsion de la courbe*

$$\frac{d\varepsilon}{ds}=\frac{\sin v}{r(l-z)}\sqrt{l^2\cos^2 v-r^2\sin^2 v}=\frac{1}{l-z}\cdot\frac{\sin t\sin v}{\tang a}=\frac{\tang v}{\rho}.$$

On conclut de ces équations, 1° que le plan osculateur fait avec l'axe du cône un angle invariable égal à v, 2° que les rayons de courbure sont parallèles à la base du cône, et 3° que le lieu des centres de courbure est une hélice conique tracée sur un cône ayant même hauteur l

que le premier et dans lequel k est remplacée par $-k$, c'est-à-dire, $\frac{\tang t}{\sin a}$ par $-\frac{\tang t'}{\sin a'} = \frac{\tang(-t')}{\sin a'}$, t' et a' étant pour ce dernier cône ce que sont t et a pour le premier.

9° *L'inclinaison constante v' des touchantes sur la base du cône*, déduite de l'équation

$$\left(\frac{d\alpha}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 = \cot^2 v',$$

est donnée par

$$\sin v' = \sqrt{\cos^2 a - \sin^2 v} = \sin t \cos a.$$

10° *Le rayon r' de la base* est représenté par le coefficient $\left(\frac{l-\gamma}{l}\right)$ dans la valeur de $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ de l'équation du lieu des centres, comme le rayon r est le coefficient de $\left(\frac{l-z}{l}\right)$ dans la valeur de $\sqrt{x^2 + y^2}$ donnée par l'équation de l'hélice primitive. On trouve en partant de là,

$$r' = \frac{l \tang a}{k \cos^2 v} \sqrt{1 + k^2 \sin^4 v} = r \frac{\tang v}{\tang v'}.$$

11° *L'angle au sommet a'* est donné par

$$\tang a' = \frac{r'}{l} = \frac{\tang a \tang v}{\tang v'} = \frac{r}{kl} \frac{\sqrt{\sin^2 a + \sin^2 v}}{\sin a \cos v}.$$

12° *L'inclinaison constante t' des touchantes sur les génératrices* est déterminée par l'une ou l'autre des relations

$$\frac{\tang t}{\sin a} = \frac{\tang(-t')}{\sin a'}, \quad \sin v' = \cos a' \cos(-t'),$$

le signe négatif de t' indiquant que les inclinaisons t et t' sur les génératrices sont en sens inverse.

13° *La projection de l'hélice conique sur la base du cône est une spirale logarithmique*, ayant pour équation polaire

$$R = r e^{-\frac{\gamma_1}{k}}.$$

14° La surface convexe du cône étant rabattue dans un plan, l'hélice conique formera aussi une spirale logarithmique, ayant pour équation

$$R' = \frac{r}{\sin a} e^{-\eta' \cot t}.$$

15° Les pas de l'hélice le long d'une génératrice diminuent en progression géométrique et les spires comptées jusqu'au sommet sont en nombre infini.

16° Le lieu géométrique des pieds des tangentes est la développante de la spirale logarithmique, suivant laquelle se projette l'hélice sur la base du cône.

On verra dans le calcul intégral (N° 201) que les équations finies de l'hélice conique sont

$$x = \frac{r}{l}(l-z) \sin\left\{\log\left(\frac{l}{l-z}\right)^k\right\}, \quad y = \frac{r}{l}(l-z) \cos\left\{\log\left(\frac{l}{l-z}\right)^k\right\}.$$

En faisant l infini, et par conséquent a nul dans ces expressions, on transforme le cône en cylindre et on retrouve toutes les valeurs relatives à l'hélice cylindrique.

CHAPITRE V.

—

Principes fondamentaux du calcul différentiel étendus aux fonctions de plusieurs variables indépendantes. Dérivées partielles. — Dérivée totale. — Différentielle totale. — Dérivées partielles des ordres supérieurs. — Dérivées totales des ordres supérieurs. — Différentielles totales des ordres supérieurs. — L'ordre des dérivations successives est indifférent. — Dérivation des fonctions implicites. Équation dérivée totale. — Équations dérivées partielles. — Équation différentielle totale. Équations différentielles partielles. — Dérivées des ordres supérieurs, des fonctions implicites.

93. ***Principes fondamentaux du calcul différentiel étendus aux fonctions de plusieurs variables indépendantes. Dérivées partielles.*** — Considérons une fonction explicite de deux variables (x, y) et posons

$$z = f(x, y).$$

Si cette équation existe seule, on sait (N° 2) que les deux variables x et y sont indépendantes l'une de l'autre, en sorte que l'on peut donner à x un accroissement sans faire changer y, ou, ce qui revient au même, on peut faire varier x en traitant y comme une constante et réciproquement. On voit donc que la fonction $f(x, y)$ ou z peut varier de trois manières : 1° en donnant à x un accroissement Δx, y ne changeant pas de valeur; 2° en donnant à y seul un accroissement Δy; 3° en faisant prendre simultanément à x et y des accroissements Δx et Δy. De là résulte la nécessité d'adopter une notation nouvelle qui rappelle ces trois espèces d'accroissements. Au lieu d'employer des signes particuliers pour les désigner, on est convenu de représenter par

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x, \quad \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y, \quad \Delta z,$$

les accroissements de z provenant 1° d'un accroissement Δx donné à x, 2° d'un accroissement Δy donné à y, et 3° de deux accroissements Δx, Δy donnés simultanément à x et y. On voit que Δz a une signification très différente dans ces trois expressions, que l'on distingue suffisamment par le dénominateur, et qu'on nomme respectivement *différence partielle* de la fonction relative à x ou à y et *différence totale*. La même distinction est nécessaire si l'on passe aux limites; en effet, on peut avoir à représenter la dérivée de la fonction $f(x, y)$ prise en supposant x variable et y constant et réciproquement, ou en supposant x et y tous deux variables. Dans le premier cas, la dérivée par rapport à x sera représentée par $\frac{df(x, y)}{dx}$ ou bien $\frac{dz}{dx}$, et la différentielle sera par conséquent $\frac{dz}{dx}dx$. Dans le second cas, la dérivée par rapport à y sera $\frac{dz}{dy}$ et la différentielle de la fonction par rapport à y aura pour expression $\frac{dz}{dy}dy$. Ce sont là *les dérivées partielles* et *les différentielles partielles* de la fonction.

Les principes posés dans la première partie du calcul différentiel suffisent pour obtenir les valeurs des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, puisque pendant l'opération, toutes ces variables moins une doivent être considérées comme constantes; ainsi on aura pour $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, savoir :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

94. *Dérivée totale.* — Il ne nous reste plus qu'à trouver la dérivée totale ou la différentielle totale de la fonction. A cet effet, observons que les variables x et y ne cesseront pas d'être indépendantes, c'est-à-dire, de varier indépendamment l'une de l'autre et de prendre chacune telle valeur que l'on voudra, si l'on considère y comme dépendant de x par une relation telle que le rapport des accroissements de x et de y soit arbitraire et que la valeur numérique de y correspondant à une valeur donnée à x soit également arbitraire. Cette double condition est évidemment remplie en posant

$$y = \xi x + \theta,$$

ξ et θ étant deux constantes arbitraires; car il est visible que le rap-

port des accroissements de y et x représenté par ξ, restera toujours arbitraire, et qu'après avoir donné à x et à ξ telle valeur que l'on voudra, on pourra disposer de θ pour faire prendre à y toutes les valeurs possibles. Avec cette restriction, x devient seule variable indépendante et si l'on dérive la fonction

$$z = f(x, y)$$

par rapport à cette variable indépendante x, en considérant y comme fonction de x et en désignant, comme au N° 9, par $\frac{1}{dx}dz$, la dérivée totale de $f(x, y)$, c'est-à-dire, la limite du rapport de l'accroissement total de la fonction, provenant de x et de y, à l'accroissement donné à x, il viendra

$$\frac{1}{dx}dz = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\xi,$$

dans laquelle ξ est une constante arbitraire. Les deux dérivées $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{1}{dx}dz$ se distinguent suffisamment par la manière dont on convient de les écrire, et ont une signification très différente qu'il importe de ne pas confondre. La première représente la limite du rapport des accroissements de z et de x lorsque les x explicites varient seuls, tandis que $\frac{1}{dx}dz$ représente la limite du rapport des accroissements des mêmes variables, lorsque les x explicites et les y considérés comme fonction de x, prennent des accroissements simultanés. On voit que la dérivée totale d'une fonction de deux variables indépendantes, quoique entièrement déterminée dans sa forme, est cependant indéterminée dans sa valeur, à cause de la présence de ξ.

95. *Différentielle totale.* — Au point de vue des infiniment petits, cette équation s'écrit sous une autre forme. Si on multiplie ses deux membres par dx, il vient

$$dz = \frac{dz}{dx}dx = \frac{dz}{dy}\xi\, dx$$

ou, à cause de $\frac{dy}{dx} = \xi$,

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

dans laquelle $\frac{dz}{dx}dx$ et $\frac{dz}{dy}dy$ sont les différentielles partielles de la fonction par rapport à x et par rapport à y, et dz la différentielle totale. On voit donc que *la différentielle totale d'une fonction est égale à la somme de ses différentielles partielles.* En reprenant l'exemple précédent

$$z=\sqrt{x^2-y^2},$$

il vient

$$\frac{1}{dx}dz=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\xi,$$

ou bien

$$dz=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Si la fonction renfermait plus de deux variables indépendantes, si l'on avait, par exemple,

$$z=f(x, y, u, v),$$

en représentant par ξ' et ξ'' les rapports arbitraires des accroissements de u et v à l'accroissement de x, il viendrait

$$\frac{1}{dx}dz=\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\xi+\frac{dz}{du}\xi'+\frac{dz}{dv}\xi'',$$

ou bien, en employant les différentielles,

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy+\frac{dz}{du}du+\frac{dz}{dv}dv.$$

96. *Dérivées partielles des ordres supérieurs.* — Avant de passer à la recherche des dérivées des ordres supérieurs d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, observons que $\frac{dz}{dx}$ étant, en général, une fonction de x et y, on peut se proposer de trouver sa dérivée, soit par rapport à x, soit par rapport à y, soit par rapport à ces deux variables à la fois. D'après la convention établie plus haut, ces trois dérivées peuvent être désignées par $\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx}$, $\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}$ et $\frac{1}{dx}d\left(\frac{dz}{dx}\right)$.

La première peut s'écrire ainsi $\frac{d^2z}{dx^2}$, d'après une convention faite

au N° 21. La seconde peut, par analogie, être représentée par $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, qui indique clairement que deux dérivations sont faites sur la fonction z, la première par rapport à x et l'autre par rapport à y. Quant à la dérivée totale de $\frac{dz}{dx}$, nous conserverons la notation précédente. Pour trouver la valeur de cette dernière, il suffit de remplacer z par $\frac{dz}{dx}$ dans la formule

$$\frac{1}{dx}dz = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\xi;$$

car il vient alors

$$\frac{1}{dx}d\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dxdy}\xi.$$

La fonction $\frac{dz}{dy}$ a aussi trois dérivées distinctes, savoir :

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx},\quad \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dy},\quad \frac{1}{dx}d\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Les deux premières, qui sont partielles, peuvent s'écrire d'une manière plus simple, comme il suit :

$$\frac{d^2z}{dydx},\quad \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Pour ce qui est de la dérivée totale de $\frac{dz}{dy}$, on conserve la notation précédente et sa valeur est donnée par l'équation

$$\frac{1}{dx}d\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d^2z}{dydx} + \frac{d^2z}{dy^2}\xi.$$

97. *Dérivées totales des ordres supérieurs.* — Il est facile maintenant de trouver la dérivée seconde totale d'une fonction explicite de

deux variables indépendantes; car si l'on prend la dérivée totale des deux membres de l'équation

$$\frac{1}{dx}dz = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\xi,$$

en convenant de représenter par $\frac{1}{dx^2}d^2z$ la dérivée totale de $\frac{1}{dx}dz$ ou la dérivée seconde totale de z, il viendra

$$\frac{1}{dx^2}d^2z = \frac{1}{dx}d\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{1}{dx}d\left(\frac{dz}{dy}\right)\xi$$

et, en substituant les valeurs trouvées à la fin du numéro précédent,

$$\frac{1}{dx^2}d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dxdy}\xi + \frac{d^2z}{dydx}\xi + \frac{d^2z}{dy^2}\xi^2.$$

La dérivée totale troisième, ou $\frac{1}{dx^3}d^3z$ s'obtiendra de la même manière. En dérivant de nouveau la valeur de cette dérivée seconde, et en représentant par

$$\frac{d^3z}{dx^3},\quad \frac{d^3z}{dx^2dy},\quad \frac{d^3z}{dxdy^2},\quad \frac{d^3z}{dydxdy},\quad \frac{d^3z}{dy^3},$$

les dérivées partielles

$$\frac{d\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{dx},\quad \frac{d\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{dy},\quad \frac{d\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)}{dy},\quad \frac{d\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)}{dy},\quad \frac{d\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}{dy},$$

on trouve

$$\frac{1}{dx^3}d^3z = \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{d^3z}{dx^2dy}\xi + \frac{d^3z}{dxdydx}\xi + \frac{d^3z}{dydx^2}\xi + \frac{d^3z}{dxdy^2}\xi^2$$

$$+ \frac{d^3z}{dydxdy}\xi^2 + \frac{d^3z}{dy^2dx}\xi^2 + \frac{d^3z}{dy^3}\xi^3,$$

et ainsi de suite.

98. *Différentielles totales des ordres supérieurs.* — Si l'on adopte

les différentielles, les équations précédentes s'écrivent sous une forme un peu différente. Comme la différentielle d'une fonction est égale au produit de la dérivée par la différentielle de la variable, les différentielles partielles de $\frac{dz}{dx}$ par rapport à x et y sont $\frac{d^2z}{dx^2}dx$ et $\frac{d^2z}{dxdy}dy$, et celles de $\frac{dz}{dy}$ sont $\frac{d^2z}{dydx}dx$ et $\frac{d^2z}{dy^2}dy$. De même, les différentielles partielles de $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$ etc. par rapport à x et y sont $\frac{d^3z}{dx^3}dx$, $\frac{d^3z}{dx^2dy}dy$, $\frac{d^3z}{dxdydx}dx$ etc. et si l'on prend la différentielle totale des deux membres de l'équation

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

en remarquant que dx et dy peuvent être considérés comme constants, puisque les variables x et y sont toutes deux indépendantes, et en désignant par d^2z la différentielle totale de dz ou la différentielle seconde totale de z, on trouve

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2z}{dxdy}dx\,dy + \frac{d^2z}{dydx}dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2.$$

En différenciant de la même manière les deux membres de l'équation précédente, il vient

$$d^3z = \frac{d^3z}{dx^3}dx^3 + \frac{d^3z}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{d^3z}{dxdydx}dx^2dy + \frac{d^3z}{dxdy^2}dxdy^2$$
$$+ \frac{d^3z}{dydx^2}dy\,dx^2 + \frac{d^3z}{dydxdy}dx\,dy^2 + \frac{d^3z}{dy^2dx}dy^2\,dx + \frac{d^3z}{dy^3}dy^3,$$

et ainsi de suite. Il est facile de voir qu'on aurait été conduit à ces mêmes valeurs des différentielles totales secondes, troisièmes etc. en multipliant par dx^2, dx^3.... les valeurs des dérivées secondes, troisièmes etc. du numéro précédent et en remplaçant ξ par sa valeur $\frac{dy}{dx}$.

Réciproquement on remontera des valeurs des différentielles totales à celles des dérivées totales en divisant par dx^2, dx^3 etc., et en mettant ξ pour $\frac{dy}{dx}$.

99. *L'ordre des dérivations successives est indifférent.* — Les expressions précédentes d'une dérivée totale d'un certain ordre, ou d'une différentielle totale, prennent une forme plus simple en faisant usage d'un théorème que nous allons démontrer, et qui consiste en ce que *si l'on prend la dérivée partielle d'une fonction de deux variables indépendantes, par rapport à chacune de ces variables, le résultat sera le même quel que soit l'ordre suivant lequel on effectue cette double opération.*

Soit z ou $f(x, y)$ une fonction donnée de deux variables indépendantes x, y. Si l'on donne d'abord à x un accroissement h, le rapport de l'accroissement partiel de la fonction à celui de la variable sera pour toute valeur de h,

$$\frac{f[(x+h), y] - f(x, y)}{h}$$

et si dans ce rapport on donne ensuite à y un accroissement k, le rapport de l'accroissement de cette dernière fonction à l'accroissement k de la variable y prendra la forme suivante pour toute valeur de k,

$$\frac{f[(x+h), (y+k)] - f[x, (y+k)] - f[(x+h), y] + f(x, y)}{hk}.$$

Si on commençait par donner à y un accroissement k, ce qui conduirait au rapport

$$\frac{f[x, (y+k)] - f(x, y)}{k},$$

et qu'on donnât ensuite à x un accroissement h, on serait conduit au rapport suivant :

$$\frac{f[(x+h), (y+k)] - f[x, (y+k)] - f[(x+h), y] + f(x, y)}{kh},$$

qui est identiquement le même que celui obtenu en suivant une marche inverse. Ces deux fractions représentent évidemment $\dfrac{\Delta\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$ et $\dfrac{\Delta\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta y}\right)}{\Delta x}$ qui conservent par conséquent des valeurs identiques pour

toute valeur de Δx et Δy; or, si dans la première on fait d'abord converger Δx vers zéro, elle devient $\frac{\Delta\left(\frac{df}{dx}\right)}{\Delta y}$, et en faisant ensuite évanouir Δy, on trouve $\frac{d^2f}{dxdy}$, tandis que la seconde fraction, dans les mêmes circonstances, devient $\frac{d^2f}{dydx}$; on a donc

$$\frac{d^2f}{dxdy}=\frac{d^2f}{dydx}.$$

Ainsi pour

$$z=\frac{x^3-2x^2y}{y^2},$$

on trouve

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{4xy-6x^2}{y^3}=\frac{d^2z}{dydx}.$$

Ce théorème peut être évidemment généralisé et étendu à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes x, y, u, v....., de sorte que l'on aura, n étant le nombre de variables par rapport auxquelles on a dérivé,

$$\frac{d^nf}{dxdydudv......}=\frac{d^nf}{dydxdudv......}=\frac{d^nf}{dydudxdv......}=\text{etc.}$$

On voit aussi que si l'on dérive un nombre quelconque de fois, une fonction $f(x, y)$, par rapport à x et y, le résultat reste le même, de quelque manière que l'on intervertisse l'ordre des différentes dérivations; car il résulte de ce qu'on vient de voir, que l'on peut, sans rien changer au résultat, permuter de toutes les manières, l'ordre de deux opérations successives; ainsi, s'il s'agit de

$$\frac{d^4f}{dx^3dy},$$

en permutant les deux dernières opérations, qui sont deux dérivations

faites, la première par rapport à x et la seconde par rapport à y, le résultat devra être désigné par

$$\frac{d^4f}{dx^2dydx};$$

et en permutant la seconde et la troisième opération, il vient

$$\frac{d^4f}{dxdydx^2},$$

et ainsi de suite; on a donc

$$\frac{d^4f}{dx^3dy}=\frac{d^4f}{dx^2dydx}=\frac{d^4f}{dxdydx^2}=\frac{d^4f}{dydx^3}.$$

En faisant usage du théorème qu'on vient de démontrer, les dérivées totales obtenues au N° 97, prennent la forme

$$\frac{1}{dx^2}d^2z=\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}\xi+\frac{d^2z}{dy^2}\xi^2,$$

$$\frac{1}{dx^3}d^3z=\frac{d^3z}{dx^3}+3\frac{d^3z}{dx^2dy}\xi+3\frac{d^3z}{dxdy^2}\xi^2+\frac{d^3z}{dy^3}\xi^3.$$

En généralisant, on trouve

$$\frac{1}{dx^n}d^nz=\frac{d^nz}{dx^n}+\frac{n}{1}\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}\xi+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}\xi^2+\cdots\cdots+\frac{d^nz}{dy^n}\xi^n,$$

ou bien, en multipliant par dx^n,

$$d^nz=\frac{d^nz}{dx^n}dx^n+\frac{n}{1}\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2+\text{etc.}$$

L'analogie entre ce développement et celui de la puissance $n^{ième}$ d'un binôme est remarquable.

100. *Dérivation des fonctions implicites. Équation dérivée totale.* — Passons aux équations contenant implicitement deux variables indépendantes (x, y) et une variable dépendante z fonction implicite des deux autres,

$$f(x, y, z)=0.$$

En résolvant cette équation par rapport à z, on pourrait obtenir, comme on vient de le voir, les valeurs de $\frac{1}{dx}dz, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$; mais on peut aussi trouver ces trois dérivées sans passer par cette résolution souvent impossible. Nous admettrons encore pour cela entre les variables x et y, la relation

$$y = \xi x + \theta,$$

ξ et θ étant deux constantes arbitraires. De cette manière y devient fonction de x, et z qui était fonction de x et y, ne sera plus qu'une fonction de fonction de x; on aura donc, en dérivant la fonction implicite $f(x, y, z)$, que nous désignerons pour abréger par f, et en remarquant que la dérivée de z doit s'écrire $\frac{1}{dx}dz$, parce que cette dérivée est totale, puisque x et y prennent simultanément leurs accroissements,

$$\frac{df}{dz}\cdot\frac{1}{dx}dz + \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou bien, en remarquant que $\frac{dy}{dx}$ est égal à ξ,

$$\frac{df}{dz}\cdot\frac{1}{dx}dz + \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\xi = 0.$$

Telle est l'*équation dérivée totale* de l'équation $f = 0$. On tire de là

$$\frac{1}{dx}dz = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}\xi,$$

qui fait connaître la dérivée totale $\frac{1}{dx}dz$ de la variable dépendante z, dérivée dont la valeur est indéterminée, puisqu'elle contient la constante arbitraire ξ.

101. *Équations dérivées partielles.* — Il est à remarquer que si l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

avait été résolue par rapport à z et qu'on eut pris ensuite la dérivée totale, on eut trouvé

$$\frac{1}{dx}dz = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\xi,$$

et comme ces deux valeurs de la dérivée totale doivent être les mêmes, il est nécessaire que l'on ait

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}},$$

équations que nous mettrons sous la forme

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

et qui serviront à déterminer les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ de la variable dépendante z, au moyen des dérivées partielles $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ de la fonction $f(x, y, z)$.

On serait arrivé à ces deux équations d'une manière directe, en observant que, puisque les variables x, y sont indépendantes, une d'elles, y par exemple, peut être traitée comme constante, et en dérivant la fonction $f(x, y, z)$ ou f par rapport à x, il vient

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0.$$

La seconde équation

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0$$

s'obtient en dérivant par rapport à y. Ces deux équations sont appelées *équations dérivées partielles* de l'équation $f(x, y, z) = 0$.

Si l'on prend pour exemple

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

on trouve pour équation dérivée totale,

$$z \cdot \frac{1}{dx} dz + x + y\xi = 0,$$

d'où l'on tire la valeur de la dérivée totale de z et de ses dérivées partielles,

$$\frac{1}{dx} dz = -\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\xi,$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}.$$

102. *Équation différentielle totale. Équations différentielles partielles.* — En multipliant par dx les deux membres de l'équation dérivée totale

$$\frac{df}{dz}\frac{1}{dx} dz + \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\xi = 0$$

en remarquant que ξdx est égal à dy, il vient

$$\frac{df}{dz} dz + \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0$$

qui est l'*équation différentielle totale* de $f(x, y, z) = 0$, et par suite,

$$dz = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} dx - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}} dy$$

qui donne la valeur de la différentielle totale de la variable dépendante z. Ce second membre se compose de deux termes qui sont les différentielles partielles de z par rapport à x et à y. La forme symétrique par rapport aux trois variables, de l'équation différentielle totale de $f(x, y, z) = 0$, prouve que l'on peut, même après la différenciation, choisir arbitrairement la variable dépendante; mais cela n'est vrai que pour les équations différentielles premières.

103. *Dérivées des ordres supérieurs, des fonctions implicites.* — Les dérivées partielles des ordres supérieurs $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, etc., dans

une équation implicite, se déduisent facilement des valeurs des dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}};$$

puisqu'il suffit de prendre une ou plusieurs fois les dérivées par rapport à x ou y, de $\frac{dz}{dx}$ ou de $\frac{dz}{dy}$, c'est-à-dire, de $-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}$ ou $-\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}$ qui, lorsqu'il s'agit de la variable indépendante x, sont des fonctions de x et de z fonction de x, et lorsqu'il s'agit de la variable indépendante y, sont des fonctions de y et de z fonction de y. Ainsi la dérivée de $\frac{df}{dx}$ par rapport à x étant, d'après ce qu'on a vu (N° 9),

$$\frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dxdz}\frac{dz}{dx}$$

et la dérivée de $\frac{df}{dz}$ par rapport à la même variable x étant aussi

$$\frac{d\left(\frac{df}{dz}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{df}{dz}\right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d^2f}{dzdx} + \frac{d^2f}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx},$$

la dérivée par rapport à x de la fraction $-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}$ est, en se rappelant la forme de la dérivée d'une fraction,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\frac{df}{dz}\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dxdz}\frac{dz}{dx}\right) - \frac{df}{dx}\left(\frac{d^2f}{dzdx} + \frac{d^2f}{dz^2}\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

Si l'on remplace $\frac{dz}{dx}$ par sa valeur, en remarquant que

$$\frac{d^2f}{dxdz}=\frac{d^2f}{dzdx},$$

cette expression devient

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{df}{dz}\right)^2-2\frac{d^2f}{dxdz}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dz}+\frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2}{\left(\frac{df}{dz}\right)^3}.$$

On trouvera de la même manière les valeurs de $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$ et des autres dérivées partielles de la variable dépendante z. Quant à la dérivée totale du deuxième ordre de la variable dépendante z, dérivée que l'on est convenu de représenter par

$$\frac{1}{dx^2}d^2z,$$

on l'obtiendra en remplaçant $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ et $\frac{d^2z}{dxdy}$ par leur valeur précédente, dans les équations trouvées N° 99.

CHAPITRE VI.

—

Applications analytiques des principes posés au chapitre V. Extension du théorème de Taylor aux fonctions de deux variables. Extension du théorème de Maclaurin. — Maximum et minimum des fonctions de deux variables indépendantes. Applications.

104. *Extension du théorème de Taylor aux fonctions de deux variables. Extension du théorème de Maclaurin.* — Le théorème de Taylor peut être étendu aux fonctions de deux variables indépendantes et servir à développer de semblables fonctions suivant les puissances ascendantes des accroissements de ces variables ; en effet, quoique les variables x et y soient indépendantes dans $f(x, y)$, on peut, comme on l'a déjà fait plusieurs fois, admettre qu'il existe entre elles la relation

$$y = \xi x + \theta$$

pourvu que ξ et θ soient des quantités d'une valeur entièrement arbitraire, que nous supposerons constantes; alors y devient fonction de x et $f(x, y)$ sera une fonction de fonction de la seule variable indépendante x, et si l'on désigne, comme précédemment, par

$$\frac{1}{dx}df, \quad \frac{1}{dx^2}d^2f, \quad \frac{1}{dx^3}d^3f, \text{ etc.}$$

les dérivées totales de $f(x, y)$ prises non-seulement par rapport aux x explicites, mais encore par rapport aux x contenus implicitement dans y, il viendra, en remarquant qu'un accroissement h donné à x

fait prendre à y un accroissement ξh que nous désignerons par k,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{dx} df.h + \frac{1}{dx^2} d^2f \frac{h^2}{1.2} + \frac{1}{dx^3} d^3f \frac{h^3}{1.2.3} \cdots$$

$$+ \frac{1}{dx^n} d^nf(x+\theta h, y+\theta k) \frac{h^n}{1.2.3\ldots n};$$

mais on a vu (N° 99) que

$$\frac{1}{dx} \cdot df = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \xi,$$

$$\frac{1}{dx^2} d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\xi + \frac{d^2f}{dy^2}\xi^2,$$

. . . .

. . . .

on a donc, en substituant,

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\xi\right)h + \left(\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\xi + \frac{d^2f}{dy^2}\xi^2\right)\frac{h^2}{1.2}$$

$$+\cdots+\left(\frac{d^nf(x+\theta h, y+\theta k)}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{d^nf(x+\theta h, y+\theta k)}{dx^{n-1}\,dy}\xi\ldots\right)\frac{h^n}{1.2\ldots n},$$

et en remplaçant ξ par sa valeur $\frac{k}{h}$ et désignant comme on l'a fait au (N° 24), $\frac{d^nf}{dx^m\,dy^{n-m}}$ par $f^{(n)}_{x^m, y^{n-m}}$,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{hk}{1.2}$$

$$+ \frac{d^2f}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \cdots\cdots + f^{(n)}_{x^n}(x+\theta h, y+\theta k)\frac{h^n}{1.2\ldots n}$$

$$+ \frac{n}{1} f^{(n)}_{(x^{n-1}, y)}(x+\theta h, y+\theta k)\frac{h^{n-1}k}{1.2\ldots n} + \text{etc.}$$

qui est la formule cherchée. Il est visible qu'elle pourrait être généralisée et étendue aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Si dans cette formule on fait x et y nuls et qu'on remplace ensuite

h et k par x et y, on trouve une série analogue à celle de Maclaurin, qui donne le développement de $f(x, y)$ suivant les puissances ascendantes de x et y.

En remplaçant h, k par $x - x_0$, $y - y_0$ et x, y par x_0, y_0, on obtiendrait le développement de $f(x, y)$ suivant les puissances ascendantes de $x - x_0$, $y - y_0$, x_0 et y_0 étant deux quantités arbitraires, qui évidemment disparaîtraient totalement du développement, si on effectuait toutes les opérations indiquées, puisque le premier membre ne contient pas ces quantités.

Il résulte aussi de là que si l'équation

$$f(x, y) = 0$$

est satisfaite par les valeurs $x + h$ et $y + k$, c'est-à-dire, si l'on a

$$f(x + h, \quad y + k) = 0,$$

il doit exister entre les deux accroissements h et k la relation

$$\frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + 2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{hk}{1.2} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \text{etc.} = 0.$$

105. *Maximum et minimum des fonctions de deux variables indépendantes.* — Passons à la théorie des maximum et minimum des fonctions de plusieurs variables indépendantes, et proposons-nous de déterminer les valeurs de x et de y qui font prendre à la fonction $f(x, y)$ la plus grande et la moindre valeur possible. Soit

$$z = f(x, y).$$

Quoique les variables x et y soient indépendantes, on peut cependant les concevoir comme plus haut liées par la relation

$$y = \xi x + \theta, \quad \frac{dy}{dx} = \xi.$$

Dans cette hypothèse $f(x, y)$ devient une fonction de fonction de x, et l'on a, en prenant la dérivée totale par rapport à x,

$$\frac{1}{dx}dz = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\xi.$$

On a vu que pour rendre maximum ou minimum une fonction de x,

il suffit d'égaler à zéro sa dérivée par rapport à tous les x; il faut donc rendre nulle la valeur de $\frac{1}{dx}dz$, ce qui donne

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\xi=0.$$

Cette équation doit subsister avec la condition que ξ soit entièrement arbitraire, ce qui ne peut avoir lieu à moins que l'on n'ait

$$\frac{df}{dx}=0,\quad \frac{df}{dy}=0.$$

Ces deux équations serviront à déterminer les valeurs de x et de y correspondant au maximum ou au minimum de la fonction $f(x, y)$ ou z. Pour distinguer le maximum du minimum, prenons la dérivée du second ordre de $f(x, y)=z$ (voir N° 99)

$$\frac{1}{dx^2}d^2z=\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dxdy}\xi+\frac{d^2f}{dy^2}\xi^2.$$

On sait qu'une fonction est maximum ou minimum selon que la dérivée deuxième est négative ou positive; $f(x, y)$ sera donc maximum ou minimum selon que les valeurs trouvées pour x et y rendront négative ou positive la fonction

$$\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dxdy}\xi+\frac{d^2f}{dy^2}\xi^2,$$

indépendamment de toute valeur attribuée à ξ; or si on représente par A, B, C les trois dérivées $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dxdy}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$, ce trinôme peut être mis sous la forme

$$\frac{1}{dx^2}d^2z=\xi^2A\left(\frac{1}{\xi^2}+2\frac{B}{A}\frac{1}{\xi}+\frac{C}{A}\right)=\xi^2A\left\{\left(\frac{1}{\xi}+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right\};$$

et il est visible que si C et A sont de même signe, ce qui suppose $\frac{C}{A}$ positif, il faut et il suffit pour que la condition soit satisfaite, que l'on ait

$$\frac{C}{A}>\frac{B^2}{A^2}\quad\text{ou}\quad AC>B^2;$$

car alors la partie comprise entre les accolades sera toujours positive pour toute valeur de ξ; de sorte que le signe du second membre dépendra uniquement du signe du coefficient A, placé hors de la parenthèse. On voit donc *qu'il y aura maximum ou minimum suivant que* $\frac{d^2f}{dx^2}$ *ou* A *sera négatif ou positif, pourvu que* $\frac{d^2f}{dx^2}$ *et* $\frac{d^2f}{dy^2}$ *soient de même signe, et que l'on ait*

$$\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} > \left(\frac{d^2f}{dxdy}\right)^2.$$

Si ces dernières conditions n'étaient pas remplies, c'est-à-dire, si $\frac{C}{A}$ n'était pas positif et plus grand que $\frac{B^2}{A^2}$, il n'y aurait ni maximum ni minimum, puisque la parenthèse pourrait être positive ou négative suivant les valeurs que l'on attribuerait à ξ.

1[er] exemple. ***Parmi tous les parallélipipèdes rectangles de même volume, trouver celui qui a la moindre surface.*** Soit a le volume, (x, y, z) les trois arêtes; on a

$$x.y.z = a, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{a}{xy}.$$

La surface étant représentée par u, on a aussi

$$u = 2xy + 2xz + 2yz \quad \text{ou bien} \quad u = 2xy + \frac{2a}{y} + \frac{2a}{x}.$$

Pour rendre u minimum, on fera

$$\frac{du}{dx} = 2y - \frac{2a}{x^2} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 2x - \frac{2a}{y^2} = 0;$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{a}, \quad y = \sqrt[3]{a}, \quad z = \sqrt[3]{a},$$

c'est-à-dire, que les trois arêtes doivent être égales. On s'assurera qu'il y a minimum en déterminant les dérivées du second ordre,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4a}{x^3} = 4, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{4a}{y^3} = 4, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 2,$$

valeurs qui font voir que $\frac{d^2u}{dx^2}$ et $\frac{d^2u}{dy^2}$ sont tous deux positifs, et que

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} > \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2.$$

2ᵉ exemple. *Trouver la plus courte distance de deux droites dans l'espace.* Soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \quad \text{et} \quad x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta'$$

les équations de deux droites. Prenons sur l'une un point (x', y', z') et sur l'autre un point (x'', y'', z''); l étant leur distance, on a

$$l = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}.$$

Mais il est visible que

$$x' = az' + \alpha, \quad y' = bz' + \beta, \quad x'' = a'z'' + \alpha', \quad y'' = b'z'' + \beta'.$$

En substituant, la valeur de l devient

$$l = \sqrt{(az' + \alpha - a'z'' - \alpha')^2 + (bz' + \beta - b'z'' - \beta')^2 + (z' - z'')^2},$$

valeur qui ne contient plus que les deux variables indépendantes z' et z''. Pour rendre l minimum, on fera

$$\frac{dl}{dz'} = \frac{(az' + \alpha - a'z'' - \alpha')a + (bz' + \beta - b'z'' - \beta')b + (z' - z'')}{\sqrt{(az' + \alpha - a'z'' - \alpha')^2 + (bz' + \beta - b'z'' - \beta')^2 + (z' - z'')^2}} = 0,$$

$$\frac{dl}{dz''} = \frac{-(az' + \alpha - a'z'' - \alpha')a' - (bz' + \beta - b'z'' - \beta')b' - (z' - z'')}{\sqrt{(az' + \alpha - a'z'' - \alpha')^2 + (bz' + \beta - b'z'' - \beta')^2 + (z' - z'')^2}} = 0,$$

d'où l'on tirera les valeurs de z' et z'' et, par suite, celles de x', y', x'', y''. En les substituant dans l, il vient

$$l = \frac{(\alpha - \alpha')(b - b') - (\beta - \beta')(a - a')}{\sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (ab' - a'b)^2}}.$$

3ᵉ exemple. *Par un point donné faire passer un plan, de manière que le tétraèdre formé avec les plans coordonnés ait le moindre volume possible.*

(x', y', z') étant les coordonnées de ce point, l'équation du plan est

$$(x - x') + a(y - y') + b(z - z') = 0,$$

et les portions d'axes comprises entre ce plan et l'origine sont

$$x' + ay' + bz', \quad \frac{x' + ay' + bz'}{a}, \quad \frac{x' + ay' + bz'}{b}.$$

En représentant par V le volume du tétraèdre, on a donc

$$V = \frac{(x' + ay' + bz')^3}{6ab}.$$

Si on détermine les valeurs de a et de b qui rendent V minimum, on trouve

$$a = \frac{x'}{y'}, \quad b = \frac{x'}{z'}, \quad V = \frac{9}{2}x'y'z'.$$

4[e] exemple. *Quelle est parmi toutes les pyramides triangulaires de même base et de même hauteur celle qui a la plus petite surface?*

Soit h la hauteur donnée de la pyramide, et désignons par x, y, z les perpendiculaires abaissées du pied de h sur les trois côtés a, b, c de la base. Les hauteurs des trois faces triangulaires latérales sont

$$\sqrt{h^2 + x^2}, \quad \sqrt{h^2 + y^2}, \quad \sqrt{h^2 + z^2},$$

et si l'on représente par S la surface totale du tétraèdre, par s la surface de la base, il viendra

$$S = s + \frac{1}{2}a\sqrt{h^2 + x^2} + \frac{1}{2}b\sqrt{h^2 + y^2} + \frac{1}{2}c\sqrt{h^2 + z^2}.$$

En observant que la base de la pyramide peut être partagée en trois triangles ayant pour bases a, b, c et pour hauteurs x, y, z, on a en outre

$$2s = ax + by + cz;$$

il vient donc en éliminant z

$$S = s + \frac{1}{2}a\sqrt{h^2 + x^2} + \frac{1}{2}b\sqrt{h^2 + y^2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2h^2 + (2s - ax - by)^2},$$

et il ne reste plus qu'à déterminer les valeurs de x et y qui rendent S minimum. On trouve

$$\frac{dS}{dx}=\frac{1}{2}\frac{ax}{\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{1}{2}\frac{a(2s-ax-by)}{\sqrt{c^2h^2+(2s-ax-by)^2}}=0,$$

$$\frac{dS}{dy}=\frac{1}{2}\frac{by}{\sqrt{h^2+y^2}}-\frac{1}{2}\frac{b(2s-ax-by)}{\sqrt{c^2h^2+(2s-ax-by)^2}}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{y}{\sqrt{h^2+y^2}}=\frac{z}{\sqrt{h^2+z^2}}$$

qui conduisent aux égalités

$$x^2=y^2=z^2,$$

d'où l'on tire les quatre systèmes de valeurs

$$x=y=z,\quad x=y=-z,\quad x=-y=z,\quad -x=y=z$$

qui font voir que *la surface du tétraèdre est un minimum, lorsque le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base est placé au centre de l'un des quatre cercles tangents aux trois côtés de la base*, ou, ce qui revient au même, *lorsque les trois faces triangulaires ont la même hauteur*.

5e exemple. *Trouver le plus grand et le plus petit rayon d'un ellipsoïde.*

En désignant par l le rayon mené au point (x, y, z) de la surface, on a à la fois

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad l^2=x^2+y^2+z^2,$$

d'où l'on tire, en éliminant z et en dérivant,

$$l^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2+c^2,\quad \frac{dl}{dx}=\frac{a^2-c^2}{la^2}x,\quad \frac{dl}{dy}=\frac{b^2-c^2}{lb^2}y.$$

Supposons les trois axes rangés dans l'ordre de grandeur a, b, c. Le minimum correspondra à $x=0$, $y=0$, et l'on trouve $l=c$. Le

plus petit rayon est donc le demi axe c, puisque les deux dérivées $\frac{d^2l}{dx^2}$ et $\frac{d^2l}{dy^2}$ sont positives. Si on élimine x au lieu de z, on trouvera de la même manière pour solution le demi grand axe a, et cette solution est un maximum, parce que les deux dérivées secondes sont négatives. Enfin, si on élimine y, on trouve pour solution le demi axe b, et l'on reconnaît qu'elle ne donne ni maximum ni minimum, parce que les deux dérivées secondes ont pour valeurs $\frac{a^2-b^2}{l^3a^2}(y^2+z^2)$, $\frac{c^2-b^2}{l^3c^2}(x^2+z^2)$ qui ne sont pas de même signe.

Il est visible que cette théorie fait aussi connaître les points d'une surface donnée qui sont les plus rapprochés ou les plus éloignés des plans coordonnés.

CHAPITRE VII.

—

Applications géométriques des principes posés au chapitre V. — Signification géométrique des dérivées partielles. — Équation du plan tangent à une surface. Équations d'une normale. — Contact des surfaces. — Courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface. — Rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface. — Rayon de courbure d'une section normale et d'une section oblique. Surfaces osculatrices. — Caractère distinctif des surfaces convexes, des surfaces gauches et des surfaces développables. — Rayons de courbure principaux. — Propriétés des rayons de courbure des sections normales faites autour d'un point d'une surface. — Ombilics. — Propriétés générales des surfaces relatives à leur courbure. — Indicatrice. — Lignes de courbure. — Lignes de courbure dans les surfaces de révolution. — Surfaces enveloppes. Caractéristiques. Arête de rebroussement.

106. *Signification géométrique des dérivées partielles.* — On a vu qu'une équation à trois variables

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{ou} \quad z = f(x, y)$$

représente une surface ABM (fig. 25). En dérivant celle-ci par rapport à x et à y, on obtient les valeurs de $\frac{dz}{dx} = p$ et $\frac{dz}{dy} = q$. Pour reconnaître la signification géométrique de ces dérivées partielles, observons que si (x, y, z) sont les coordonnées du point M, en traitant y comme constant et x et z comme seules variables, l'équation

$$z = f(x, y)$$

en x et z sera évidemment celle de la courbe plane MA, résultant de l'intersection de la surface donnée par un plan MPA parallèle aux XZ, et distant d'une quantité y; d'où il suit que $\frac{dz}{dx}$ est la tangente de l'angle que fait avec PA ou avec l'axe des X la touchante MT à la section MA au point M. On reconnaît de même que $\frac{dz}{dy}$ représente la tangente de l'angle que fait avec PB, ou avec l'axe des Y, la touchante MT′ à la section MB de la surface coupée par un plan MPB parallèle à YZ.

107. *Équation du plan tangent à une surface. Équations d'une normale.* — Concevons qu'en un point M quelconque de la surface on trace sur celle-ci autant de courbes que l'on voudra. Les tangentes à ces différentes courbes autour du point M sont toutes renfermées dans un même plan si la surface est continue autour de ce point; en effet, si $y = \varphi x$ représente la projection dans le plan XY, de l'une de ces courbes, passant par P projection de M, l'ensemble des deux équations

$$z = f(x, y), \quad y = \varphi x \quad \text{ou} \quad z = f(x, \varphi x), \quad y = \varphi x$$

représentera la courbe tracée sur la surface et en prenant les dérivées de z et de y par rapport à la variable indépendante x, il vient pour les projections de cette tangente dans les plans XZ et YX, (x', y', z') étant les coordonnées courantes,

$$z' - z = \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\right)(x' - x), \quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x);$$

la tangente est donc représentée par ces deux équations ou par

$$z' - z = \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\varphi' x\right)(x' - x), \quad y' - y = \varphi' x\,(x' - x),$$

en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $\varphi' x$. La forme attribuée à φx particularise la courbe à laquelle appartient cette tangente; mais si l'on élimine $\varphi' x$ entre ces deux équations, les variables (x', y', z') qui resteront dans l'équation finale, seront les coordonnées d'un point quelconque d'une tangente arbitraire, c'est-à-dire, qu'elles appartiendront à un point

quelconque de la surface, lieu géométrique de toutes ces tangentes. En désignant $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ par p et q, on trouve

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y).$$

Comme cette équation est linéaire par rapport à x', y', z', on en conclut que toutes les touchantes aux courbes tracées sur la surface autour du point M, sont renfermées dans un plan, que l'on nomme *plan tangent*, et dont la relation précédente est l'équation.

Si l'équation de la surface, au lieu d'être donnée sous la forme explicite

$$z = f(x, y),$$

l'était sous la forme implicite

$$f(x, y, z) = 0,$$

on aurait (N° 101), en représentant cette fonction par f,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}},$$

et l'équation du plan tangent deviendrait

$$(x' - x)\frac{df}{dx} + (y' - y)\frac{df}{dy} + (z' - z)\frac{df}{dz} = 0.$$

Connaissant l'équation du plan tangent, on en déduit les angles que forme avec les trois axes une perpendiculaire à ce plan, ou *une normale à la surface*. D'après les formules connues, en représentant ces angles par $\theta, \theta', \theta''$, on sait que l'on a

$$\cos\theta = \frac{-\frac{dz}{dx}}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\theta' = \frac{-\dfrac{dz}{dy}}{\pm\sqrt{1+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\theta'' = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2}},$$

en prenant le signe *plus* pour la normale considérée comme prolongée dans un sens et le signe *moins* lorsqu'on la prolonge en sens inverse. Quand l'équation de la surface est donnée sous forme implicite, ces valeurs deviennent

$$\cos\theta = \frac{\dfrac{df}{dx}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\theta' = \frac{\dfrac{df}{dy}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\theta'' = \frac{\dfrac{df}{dz}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dz}\right)^2}}.$$

Les équations de la normale, c'est-à-dire, d'une perpendiculaire au plan tangent et passant par le point (x, y, z), sont :

$$x' - x = -p(z' - z), \quad y' - y = -q(z' - z),$$

ou si l'équation de la surface est donnée sous forme implicite,

$$\frac{df}{dz}(x' - x) = \frac{df}{dx}(z' - z), \quad \frac{df}{dz}(y' - y) = \frac{df}{dy}(z' - z).$$

108. *Contact des surfaces.* — On dit que deux surfaces se touchent en un point lorsqu'elles ont en ce point un plan tangent commun. On voit donc que si

$$z = f(x, y), \quad z = F(x, y)$$

sont les équations des deux surfaces et si (x, y, z) sont les coordonnées du point commun, il y aura contact si l'on a entre les dérivées partielles les égalités

$$\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{dF}{dy}$$

puisque ce sont ces dérivées partielles qui fixent la position des deux plans tangents.

Comme, en donnant à x et y les accroissements très petits h et k, le z devient dans les deux surfaces,

$$z + \frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + 2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{hk}{1.2} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3f}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$z + \frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k + \frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

l'intervalle entre celles-ci, compté parallèlement à l'axe des Z, en tenant compte des égalités précédentes, est donné par

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{d^2F}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + 2\left(\frac{d^2f}{dxdy} - \frac{d^2F}{dxdy}\right)\frac{hk}{1.2} + \left(\frac{d^2f}{dy^2} - \frac{d^2F}{dy^2}\right)\frac{k^2}{1.2}$$
$$+ \left(\frac{d^3f}{dx^3} - \frac{d^3F}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ce qui indique que l'intervalle entre les deux surfaces qui se touchent, pris à une très petite distance du point de contact, est une quantité infiniment petite du second ordre, puisque les trois premiers termes qui sont multipliés respectivement par h^2, hk et k^2 sont des infiniment petits de cet ordre et que les suivants sont tous négligeables devant ceux-ci, du moins quand aucune dérivée ne devient infinie. Si les trois dérivées du second ordre étaient aussi égales, l'intervalle serait infiniment petit du 3e ordre et ainsi de suite.

Par analogie avec ce qu'on a vu sur le contact des courbes, on dit que les deux surfaces ont un contact du premier ordre, du 2e ordre etc. dans les différents cas que nous venons d'examiner.

109. *Courbe de contact du cône circonscrit à une surface.* — On peut, au moyen de l'équation du plan tangent, trouver la courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface donnée et ayant son sommet en un point donné; soient en effet (a, b, c) les coordonnées du sommet; il est évident que les points de contact doivent se trouver à la fois sur la surface et dans ses plans tangents passant par le point (a, b, c); les coordonnées (x, y, z) des points de contact doivent donc satisfaire aux deux équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad (a - x)\frac{df}{dx} + (b - y)\frac{df}{dy} + (c - z)\frac{df}{dz} = 0,$$

attendu que le plan dont les coordonnées courantes sont (x', y', z'), est assujetti à passer par le point (a, b, c). Si entre ces deux équations on élimine x, on aura l'équation de la projection de la courbe de contact sur le plan des YZ. En éliminant z, on connaîtra la projection sur le plan des XY.

On reconnaît que cette courbe de contact est plane pour une surface du second degré; car cette surface ayant pour équation

$$x^2 + ly^2 + mz^2 + nx + py + qz + r = 0,$$

la seconde équation ci-dessus est

$$(c - z)(2mz + q) + (a - x)(2x + n) + (b - y)(2ly + p) = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi

$$2x^2 + 2mz^2 + 2ly^2 + (q - 2mc)z + (n - 2a)x$$
$$+ (p - 2bl)y - cq - an - pb = 0.$$

Or, si de la seconde équation on retranche le double de la première, il vient

$$(q + 2mc)z + (n + 2a)x + (p + 2bl)y + cq + an + pl + 2r = 0,$$

qui nous apprend que les coordonnées (x, y, z) du point de contact satisfont à l'équation d'un plan.

Si le sommet du cône était transporté parallèlement à l'axe des Z à une distance infinie, le cône deviendrait un cylindre et la projection sur le plan des XY, de la courbe de contact qu'on vient de trouver, deviendrait la projection du contour de la surface sur ce plan. Or

si l'on divise par c la seconde des équations, ou si on la met sous la forme

$$\left(1-\frac{z}{c}\right)\frac{df}{dz}+\left(\frac{a}{c}-\frac{x}{c}\right)\frac{df}{dx}+\left(\frac{b}{c}-\frac{y}{c}\right)\frac{df}{dy}=0,$$

et qu'on fasse converger c vers l'infini, tandis que a, b, x, y, z restent finis, les deux équations deviennent

$$f(x, y, z)=0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dz}=0.$$

L'élimination de z entre ces équations donnera la projection cherchée. Le même procédé donnera la projection du contour de la surface sur les plans des XZ et des YZ.

Si l'équation de la surface était donnée sous la forme explicite

$$z=F(x, y),$$

la seconde équation serait remplacée par

$$\frac{dz}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{dx}=\infty$$

parce que l'on a (N° 20)

$$\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{df}{dx}=0.$$

110. *Rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface.* — Passons à la mesure de la courbure des surfaces. Concevons qu'au point M, ayant pour coordonnées (x, y, z), nous ayons tracé sur la surface une courbe quelconque plane ou gauche, et désignons par p et q les deux dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, tirées de l'équation de la surface. On a vu (N° 107) que si l'on mène la tangente à cette courbe au point M, les coordonnées (x', y', z') d'un point quelconque de la tangente doivent satisfaire à l'équation du plan tangent

$$z'-z=p(x'-x)+q(y'-y),$$

puisque celui-ci renferme toutes les tangentes. Or, en désignant par d la distance du point (x', y', z') de la tangente, au point de contact

(x, y, z) et par (α, β, γ) les angles formés par cette droite avec les axes, il est visible que l'on a

$$\cos\alpha = \frac{x'-x}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y'-y}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z'-z}{d},$$

et une substitution fera prendre à l'équation du plan tangent la forme

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta,$$

qui établit une relation nécessaire entre les angles (α, β, γ) formés avec les axes par une tangente à l'une des courbes tracées sur la surface autour du point M.

On tire de là, en prenant l'arc s d'une portion de cette courbe terminée au point (x, y, z), pour variable indépendante et en dérivant par rapport à s,

$$\frac{d\cos\gamma}{ds} - p\frac{d\cos\alpha}{ds} - q\frac{d\cos\beta}{ds} = \cos\alpha\left(\frac{dp}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{ds}\right)$$
$$+ \cos\beta\left(\frac{dq}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dq}{dy}\frac{dy}{ds}\right).$$

Mais on sait que l'on a (N° 81)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta;$$

en représentant donc par r, s, t les dérivées du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, cette équation devient

$$\frac{d\cos\gamma}{ds} - p\frac{d\cos\alpha}{ds} - q\frac{d\cos\beta}{ds} = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta.$$

Si on désigne par ρ le rayon de courbure de la courbe tracée sur la surface, et par (λ, μ, ν) les angles qu'il forme avec les axes, on a trouvé (N° 86)

$$\cos\lambda = \rho\frac{d^2x}{ds^2} \cdot = \rho\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \rho\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\cos\mu = \rho\frac{d\cos\beta}{ds}, \quad \cos\nu = \rho\frac{d\cos\gamma}{ds};$$

l'équation précédente devient donc en substituant,

$$\rho = \frac{\cos\nu - p\cos\lambda - q\cos\mu}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

D'un autre côté, on a vu que les cosinus des angles $(\theta, \theta', \theta'')$ formés par la normale à la surface avec les axes, sont

$$\cos\theta = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\theta' = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\theta'' = \frac{+1}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

on a donc pour expression de l'angle δ formé par la normale avec le rayon de courbure de la courbe,

$$\cos\delta = \cos\theta\cos\lambda + \cos\theta'\cos\mu + \cos\theta''\cos\nu = \frac{\cos\nu - p\cos\lambda - q\cos\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ce qui fait prendre à l'expression du rayon de courbure la forme suivante :

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}\cos\delta.$$

Remarquons que dans cette valeur de ρ, les quantités p, q, r, s, t sont des fonctions connues des coordonnées du point M, les angles α, β sont ceux que forme avec les axes la tangente menée à la courbe, et δ est l'angle formé par la normale à la surface au point M avec le rayon de courbure de la courbe, ou, ce qui est la même chose, c'est l'angle formé par cette normale avec le plan osculateur de la courbe. Il suffira donc de connaître la direction de cette tangente et l'inclinaison du plan osculateur sur la normale, pour que le rayon de courbure de la courbe soit déterminé, quoiqu'on ne connaisse pas son équation.

111. *Rayon de courbure d'une section normale et d'une section oblique. Surfaces osculatrices.* — On appelle *section normale* en un point d'une surface, la courbe qui résulte de l'intersection de la surface par un plan passant par la normale en ce point. La formule précédente fait connaître le rayon de courbure d'une section normale en un point donné d'une surface, puisqu'il suffit d'y faire δ nul. Il vient

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

En changeant les valeurs des angles α et β qui fixent la direction de la tangente par laquelle passe le plan sécant, on aura les rayons de courbure de toutes les sections normales faites dans la surface autour d'un même point, et celles-ci serviront à apprécier la courbure de la surface en cet endroit. Un changement de signe dans la valeur de ρ, quand on change les valeurs de α et de β, indique que, pendant la rotation de la tangente autour de la normale, les sections, d'abord concaves, deviennent convexes entre certaines limites; car le rayon de courbure n'étant autre chose que la distance de la surface au centre de courbure compté sur la normale, un changement de signe avertit que pendant la rotation du plan sécant, ce centre passe de l'autre côté de la surface.

Les formules précédentes font aussi connaître la valeur du rayon de courbure d'une *section oblique* au point M; car si δ est l'inclinaison de cette section oblique sur la section normale passant par la même tangente en M, on a vu au numéro précédent que le rayon de courbure est donné par

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta}\cos\delta,$$

c'est-à-dire, qu'en désignant par ρ le rayon de courbure de la section normale et par ρ' celui de la section oblique, on a

$$\rho'=\rho\cos\delta.$$

On conclut de là que le rayon de courbure d'une section oblique est la projection du rayon de courbure de la section normale correspondante, sur le plan de la section oblique.

On conclut aussi de cette expression du rayon de courbure d'une section normale ou oblique, que si deux surfaces ont un contact du second ordre (N° 108) en un point, toutes les sections normales ou obliques faites dans les deux surfaces autour de ce point, auront la même courbure, puisque celle-ci ne dépend que des dérivées p, q, r, s, t qui sont égales si le contact est du second ordre. Ces surfaces sont alors dites pour ce motif *osculatrices* l'une de l'autre.

112. *Caractère distinctif des surfaces convexes, des surfaces gauches et des surfaces développables.* — Cette valeur de ρ fait connaître plusieurs propriétés importantes des surfaces. En la mettant sous la forme

$$\rho=\frac{r\sqrt{1+p^2+q^2}}{(r\cos\alpha+s\cos\beta)^2+(tr-s^2)\cos^2\beta}. \qquad (1)$$

il est visible que si l'on a pour toute valeur de x et y,

$$tr - s^2 > 0,$$

le dénominateur restera positif pour toutes les valeurs de α et de β, c'est-à-dire, que le rayon de courbure conservera le même signe pour toutes les sections normales faites autour d'un point quelconque M, ce qui indique que toutes les sections faites autour de chaque point M ont leur convexité tournée du même côté et par conséquent que la surface est entièrement placée du même côté du plan tangent. Si, au contraire, on a

$$tr - s^2 < 0,$$

le second terme du dénominateur sera négatif et en l'égalant au premier on trouvera une certaine relation entre α et β pour laquelle ρ sera infini, c'est-à-dire qu'il y aura autour de chaque point M une section sans courbure en ce point; il y en aura même généralement deux, puisque cette relation entre α et β est du second degré. On voit aussi qu'en faisant varier α et β d'une manière continue, le dénominateur d'abord positif, passera par zéro pour devenir ensuite négatif, ce qui apprend que, dans une certaine étendue, les sections normales faites autour du point M ont leur concavité tournée dans un sens, et qu'au-delà, la concavité est tournée en sens inverse. Ceci exige que le plan tangent pénètre la surface suivant ses lignes sans courbure, et que les lignes de pénétration séparent la partie concave de la partie convexe.

Enfin si l'on a

$$tr - s^2 = 0,$$

le rayon de courbure aura toujours le même signe, c'est-à-dire que la surface sera entièrement concave du même côté du plan tangent; mais pour une certaine relation entre α et β, savoir :

$$r \cos \alpha + s \cos \beta = 0,$$

le rayon de courbure sera infini, c'est-à-dire, qu'il y aura encore une section sans courbure au point M.

Il résulte de cette discussion que l'inégalité

$$tr - s^2 > 0,$$

quand elle a lieu pour toute valeur de x et y, caractérise exclusive-

ment les surfaces concaves dans tous leurs points, telles qu'un ellipsoïde, et que les conditions

$$tr - s^2 < 0 \quad \text{et} \quad tr - s^2 = 0,$$

quand elles sont satisfaites pour toute valeur de x et y, caractérisent les surfaces qui, autour de chaque point, ont au moins une section sans courbure. La première caractérise celles de ces surfaces qui sont pénétrées par leur plan tangent, et la seconde, celles qui sont entièrement placées du même côté.

Parmi les surfaces de ces deux dernières catégories sont comprises évidemment les *surfaces réglées*, c'est-à-dire, celles qu'on peut concevoir engendrées par une ligne droite se mouvant suivant une certaine loi, puisque, en chaque point, la droite génératrice qui y passe, forme une section sans courbure. On a divisé les surfaces réglées en *surfaces gauches* et en *surfaces développables*. Les premières sont celles pour lesquelles la loi de génération est telle que deux génératrices consécutives ne se rencontrent pas, et les dernières sont celles où elles se coupent. Les surfaces gauches sont évidemment comprises parmi celles qui sont pénétrées par les plans tangents et pour lesquelles on a

$$tr - s^2 < 0;$$

car si par une des génératrices rectilignes on fait passer un plan tangent à la surface, celui-ci ne contiendra pas la génératrice suivante, puisque deux génératrices consécutives ne pouvant pas se rencontrer dans les surfaces gauches, ne sauraient être renfermées dans un même plan; la seconde génératrice traversera donc le plan tangent en s'étendant indéfiniment des deux côtés, ainsi que la surface elle-même.

La seconde catégorie de surfaces réglées, c'est-à-dire, celles qui ne sont pas pénétrées par leurs plans tangents et qui sont caractérisées par la condition

$$rt - s^2 = 0,$$

embrasse toutes les surfaces développables, car pour que la surface soit entièrement placée du même côté du plan tangent, la seconde génératrice ne peut pas s'étendre des deux côtés du plan tangent; elle doit donc y être renfermée et par conséquent les deux génératrices consécutives doivent se rencontrer.

115. *Rayons de courbure principaux* — Les rayons de courbure changeant de valeur autour du point M, il y a lieu de déterminer la

position de la section pour laquelle ρ est maximum ou minimum. Remarquons d'abord que les angles α et β ne sont pas entièrement arbitraires, puisqu'ils doivent satisfaire aux équations

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

En éliminant γ entre elles, on reconnaît que α et β doivent vérifier l'équation

$$(1 + p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1 + q^2)\cos^2\beta = 1 \ldots\ldots(2).$$

Pour rendre ρ maximum ou minimum, il suffit d'égaler à zéro la valeur de $\frac{d\rho}{d\alpha}$, en considérant β comme lié à α par l'équation précédente. On trouve ainsi

$$(r\cos\alpha + s\cos\beta)\sin\alpha + (t\cos\beta + s\cos\alpha)\sin\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

$$\left\{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta\right\}\sin\alpha + \left\{(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha\right\}\sin\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

et en éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$,

$$\frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{t\cos\beta + s\cos\alpha} = \frac{(1 + p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta}{(1 + q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha} \ldots\ldots(3).$$

Cette dernière combinée avec (2), servira à déterminer les angles α et β qui correspondent aux plus grands et aux moindres rayons de courbure et en substituant ces valeurs dans l'expression de ρ, celui-ci sera complètement déterminé. L'élimination de α et de β peut se faire plus facilement comme il suit : multiplions les deux membres de l'équation (3) par $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ et ajoutons l'unité de part et d'autre. En réduisant au même dénominateur et en tenant compte de l'équation (2), on trouve

$$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta = \frac{t\cos\beta + s\cos\alpha}{(1 + q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha},$$

ou bien, en se rappelant la valeur de ρ et en représentant $\sqrt{1+p^2+q^2}$ par h,

$$\frac{h}{\rho}=\frac{t\cos\beta+s\cos\alpha}{(1+q^2)\cos\beta+pq\cos\alpha}=\frac{t+s\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}}{1+q^2+pq\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}}\ \ldots\ldots(4).$$

L'équation (3) donne aussi

$$\frac{h}{\rho}=\frac{r\cos\alpha+s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha+pq\cos\beta}=\frac{s+r\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}}{pq+(1+p^2)\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}}\ \ldots\ldots(5).$$

En éliminant $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ entre ces équations, il vient, après avoir remis pour h sa valeur,

$$(rt-s^2)\rho^2-\rho\sqrt{1+p^2+q^2}\left\{(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs\right\} + (1+p^2+q^2)^2=0,$$

dont les deux racines font connaître le plus grand et le moindre rayon de courbure des sections normales faites autour du point M, en fonction des coordonnées (x, y) de ce point. Ces droites se nomment *rayons de courbure principaux*. Les valeurs de α et de β qui fixent la direction de la plus grande et de la moindre courbure s'obtiennent en résolvant par rapport à $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ les deux équations (2) et (4), après avoir remplacé ρ par l'une ou l'autre des deux racines.

Les coordonnées du centre de courbure de la section principale se déterminent par la remarque que les cosinus des angles du rayon de courbure ou de la normale avec les axes étant $\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ et $\dfrac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, les projections du rayon sur les axes sont $\dfrac{p\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\dfrac{q\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\dfrac{-\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; et comme les coordonnées de l'une des extrémités sont (x, y, z), les coordonnées (l, m, n) de l'autre extrémité ou du centre sont :

$$l=x+\frac{p\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad m=y+\frac{q\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad n=z-\frac{\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Une élimination de (x, y, z) entre ces trois équations et celle de la surface conduirait à l'équation en (l, m, n) du lieu des centres de courbure.

114. *Propriétés des rayons de courbure des sections normales faites autour d'un point d'une surface.* — On déduit des formules précédentes les lois suivant lesquelles varient autour d'un point M d'une surface, les rayons de courbure des sections normales; en effet, transportons l'origine des coordonnées en ce point et prenons pour plan des X'Y', le plan tangent à la surface et pour axe des Z', la normale. En désignant par (x', y', z') les coordonnées rapportées à ces nouveaux axes, on aura encore pour expression du rayon de courbure d'une section normale autour d'un point (x', y', z'),

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2}}{r' \cos^2 \alpha + 2s' \cos \alpha \cos \beta + t' \cos^2 \beta},$$

mais comme ce point est l'origine même des coordonnées, et que les plans des X'Z' et des Y'Z' coupent la surface donnée suivant les sections normales MB et MB' (fig. 26), qui sont, comme on sait, tangentes aux droites MX' et MY' renfermées dans le plan tangent X'Y', (x', y', z'), ainsi que les dérivées partielles, sont nulles à cause de leur signification géométrique. L'expression du rayon de courbure de la section MC déterminée par le plan normal Z'MT, deviendra donc

$$\rho = \frac{1}{r_o' \cos^2 \alpha + 2s_o' \cos \alpha \cos \beta + t_o' \cos^2 \beta},$$

r_o', s_o', t_o' étant ce que deviennent r', s', t' ou $\frac{d^2z'}{dx'^2}$, $\frac{d^2z'}{dx'dy'}$, $\frac{d^2z'}{dy'^2}$ au point M pour lequel x' et y' sont nuls. (α, β, γ) sont les angles TMX', TMY' et TMZ' formés par la tangente MT à la section MC avec les trois axes. Comme cette tangente est contenue dans le plan des X'Y', γ est droit et l'on a

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 \quad \text{d'où} \quad \cos \beta = \sin \alpha$$

et par conséquent la valeur de ρ devient

$$\rho = \frac{1}{r_o' \cos^2 \alpha + 2s_o' \cos \alpha \sin \alpha + t_o' \sin^2 \alpha}.$$

Pour les sections MB et MB', on a

$$\alpha = 0,\quad \rho = \frac{1}{r_o'}\ \text{et}\ \alpha = \frac{\pi}{2},\quad \rho = \frac{1}{t_o'}.$$

Si l'on cherche la valeur de α qui rend ρ maximum ou minimum, on trouve

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{t_o' - r_o'}{2s_o'} \pm \sqrt{\frac{(t_o' - r_o')^2}{4s_o'^2} + 1}\quad \text{ou bien}\quad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2s_o'}{r_o' - t_o'}.$$

Comme les arcs 2α et $2\alpha + \pi$ ont la même tangente, on voit que α dans cette dernière équation a deux valeurs, α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$, et l'on reconnaît que l'une de ces valeurs correspond à un maximum et l'autre à un minimum, ce qui prouve que *les sections de plus grande et de plus petite courbure sont en général perpendiculaires entre elles.*

Faisons coïncider les plans des X'Z' et des Y'Z' avec les sections de plus grande et de plus petite courbure. Il faut, pour cela, faire en sorte que la valeur précédente de α soit nulle, ce qui exige que $s_o' = 0$. L'expression du rayon de courbure d'une section quelconque se réduit alors à

$$\rho = \frac{1}{r_o' \cos^2\alpha + t_o' \sin^2\alpha}.$$

En représentant par ρ' et ρ'' le plus grand et le plus petit rayon qui correspond à α nul et à α égal à un angle droit, on trouve

$$\rho' = \frac{1}{r_o'},\quad \rho'' = \frac{1}{t_o'},$$

valeurs qui font prendre à l'expression générale d'un rayon de courbure la forme suivante :

$$\rho = \frac{\rho'\rho''}{\rho' \sin^2\alpha + \rho'' \cos^2\alpha} \cdots\cdots (1).$$

Celle-ci donne le rayon de courbure d'une section normale quelconque en fonction des deux rayons de courbure principaux, et fait connaître la loi suivant laquelle les rayons de courbure varient autour

d'un même point. Il est à remarquer que ρ' et ρ'' sont les valeurs algébriques des rayons de courbure, et sont par conséquent de même signe ou de signe contraire suivant que les deux sections principales ont leur concavité tournée dans le même sens ou en sens inverse.

115. *Ombilics.* — Si pour un certain point de la surface, les deux rayons de courbure principaux ρ' et ρ'' étaient égaux et de même signe, il est visible que toutes les courbures autour de ce point seraient égales, puisque l'équation se réduirait à la suivante

$$\rho = \frac{\rho'^2}{\rho'(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \rho'.$$

Un semblable point situé sur une surface se nomme *ombilic*. Pour le déterminer, quand il existe, il suffit de remarquer que l'on a en général (N°s 111 et 113)

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

$$1 = (1 + p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1 + q^2)\cos^2\beta.$$

En multipliant membre à membre ces deux équations, on peut mettre la valeur ρ sous la forme

$$\rho = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\frac{1 + \dfrac{2pq}{1 + p^2}\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \left(\dfrac{1 + q^2}{1 + p^2}\right)\dfrac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}}{1 + 2\dfrac{s}{r}\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{t}{r}\dfrac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}} \cdot \frac{1 + p^2}{r};$$

et comme on vient de voir que tous les rayons de courbure sont égaux en ces points, cette valeur doit être indépendante de $\cos\alpha$ et $\cos\beta$, ce qui aura lieu si le numérateur et le dénominateur sont identiques ou si l'on a

$$\frac{s}{r} = \frac{pq}{1 + p^2}, \quad \frac{t}{r} = \frac{1 + q^2}{1 + p^2}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{1 + p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1 + q^2}{t}.$$

Cette double équation, jointe à celle de la surface, servira à déterminer les coordonnées de l'ombilic. En appliquant ces formules à l'ellip-

soïde, dans lequel les axes sont $a > b > c$, on trouve pour coordonnées des ombilics,

$$y = 0, \quad x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

et pour rayon de courbure en ce point, $\frac{b^3}{ac}$.

116. *Propriétés générales des surfaces, relatives à leur courbure.* — Il résulte des propriétés des rayons de courbure des sections normales, démontrées plus haut, que si deux surfaces quelconques qui se touchent en un point ont les deux rayons de courbure principaux identiques deux à deux, toutes les autres sections normales ou obliques faites autour de ces points auront aussi des courbures égales de part et d'autre, puisque ces dernières courbures ne dépendent que des deux courbures principales. D'où il suit que des portions infiniment petites des deux surfaces prises autour de ces points sont sensiblement identiques. Il résulte aussi de là qu'une portion très petite d'une surface quelconque prise autour d'un point pour lequel on connaît les deux courbures principales, peut toujours être considérée comme engendrée par la rotation d'un arc de cercle autour d'une droite renfermée dans son plan, de la manière suivante : après avoir tracé un arc de cercle *ab* (fig. 27) avec l'un des deux rayons de courbure principaux *om*, on portera sur le diamètre passant par le milieu *m* de l'arc et à partir de ce point, une longueur *mc*, égale à l'autre rayon de courbure; puis on élèvera une perpendiculaire *de* au diamètre et l'on fera tourner l'arc autour de cette perpendiculaire. Il est visible en effet que la surface engendrée aura pour sections principales deux cercles dont les rayons seront les deux rayons de courbure principaux donnés. On voit aussi que l'équation (1) mise sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\rho''} \sin^2 \alpha,$$

donne pour le rayon de courbure ρ_1 d'une seconde section perpendiculaire à la précédente,

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho'} \cos^2 (1^d + \alpha) + \frac{1}{\rho''} \sin^2 (1^d + \alpha) = \frac{1}{\rho'} \sin^2 \alpha + \frac{1}{\rho''} \cos^2 \alpha,$$

d'où il résulte que

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_{\prime}}=\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''},$$

c'est-à-dire que *la somme algébrique des inverses des rayons de courbure de deux sections orthogonales quelconques est constante pour un même point d'une surface.*

117. *Indicatrice.* — On conclut aussi de l'équation (1), que si l'on porte sur toutes les tangentes MT (fig. 26), à partir du point M, des longueurs Ma proportionnelles à la racine carrée du rayon de courbure de la section correspondante MC, le lieu géométrique des extrémités a sera une ellipse ou une hyperbole ayant pour centre le point M, et pour axes, les droites MX' et MY', représentant les directions des sections principales; en effet, si (x, y) sont les coordonnées de a, on aura

$$x = Ma\cos\alpha,\quad y = Ma\sin\alpha,\quad Ma = l\sqrt{\rho},$$

l étant un coefficient constant arbitraire. On tire de là

$$\cos\alpha = \frac{x}{l\sqrt{\rho}},\quad \sin\alpha = \frac{y}{l\sqrt{\rho}},$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\rho = \frac{1}{r_0'\cos^2\alpha + t_0'\sin^2\alpha} = \frac{l^2\rho}{r_0'x^2 + t_0'y^2},$$

d'où

$$r_0'x^2 + t_0'y^2 = l^2,\quad \text{ou bien}\quad \frac{1}{\rho'}x^2 + \frac{1}{\rho''}y^2 = l^2,$$

équation qui appartient à une ellipse ou à une hyperbole, suivant que ρ' et ρ'' sont de même signe ou de signe contraire, c'est-à-dire suivant que les deux sections principales ont leur concavité tournée dans le même sens ou en sens inverse. Cette courbe à laquelle on donne quelquefois le nom d'*indicatrice*, est commode pour peindre aux yeux la loi suivant laquelle varie la courbure des sections normales faites autour d'un point d'une surface quelconque.

La courbe qu'on vient de déterminer et qu'il faut concevoir tracée sur chaque plan tangent autour du point de contact, se confond, quand

on lui donne des dimensions très petites, ou quand on prend l très petit, avec la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent et infiniment peu distant de celui-ci. En effet, soit l'équation de la surface

$$z' = f(x', y')$$

rapportée, comme au N° 114, à trois axes rectangulaires, l'origine étant placée en un point de la surface et l'axe des Z' se confondant avec la normale. Développons $f(x', y')$ suivant les puissances ascendantes de x' et y'; la formule de Maclaurin donne

$$z' = f_o + \left(\frac{df}{dx'}\right)_o x' + \left(\frac{df}{dy'}\right)_o y' + \left(\frac{d^2f}{dx'^2}\right)_o \frac{x'^2}{1.2} + 2\left(\frac{d^2f}{dx'dy'}\right)_o \frac{x'y'}{1.2}$$
$$+ \left(\frac{d^2f}{dy'^2}\right)_o \frac{y'^2}{1.2} + \text{etc.}$$

ou bien, en laissant à p_o', q_o', r_o', s_o', t_o' leur ancienne signification, et en remarquant que f_o, c'est-à-dire $f(x', y')$ quand on y fait x' et y' nuls, est lui-même nul, puisque la surface passe par l'origine,

$$z' = p_o' x' + q_o' y' + r_o' \frac{x'^2}{1.2} + 2s_o' \frac{x'y'}{1.2} + t_o' \frac{y'^2}{1.2} + \text{etc.}$$

équation qui se réduit à

$$z' = r_o' \frac{x'^2}{1.2} + 2s_o' \frac{x'y'}{1.2} + t_o' \frac{y'^2}{1.2} + \text{etc.}$$

parce que les axes des X' et des Y' étant tangents aux courbes de rencontre MA et MB de la surface par les plans des X'Z' et des Y'Z', les dérivées partielles p_o' et q_o' sont nulles. En prenant z' égal à une constante $\frac{1}{2} l^2$, x' et y' seront évidemment les coordonnées d'un point quelconque de l'intersection de la surface par un plan parallèle au plan tangent et distant de $\frac{1}{2} l^2$. Si on suppose $\frac{1}{2} l^2$ très petit, la courbe d'intersection sera dans toute son étendue peu distante du point de contact, quand la surface est entièrement concave autour du point M et alors x' et y' seront très petits pour tous les points de la courbe, les termes en x'^3, y'^3 etc. pourront être négligés devant les termes en x'^2, y'^2, $x'y'$ et l'équation de la courbe se réduira à

$$r_o' x'^2 + 2s_o' x'y' + t_o' y'^2 = l^2.$$

Quand la surface est pénétrée par le plan tangent, la courbe d'intersection a des branches qui se prolongent indéfiniment; mais si l'on ne considère que la partie de cette ligne d'intersection placée dans le voisinage du point de contact, c'est-à-dire, si on suppose que x' et y' restent très petits, on pourra encore se borner aux termes de seconde puissance en (x', y') et l'on sera conduit à la même équation que plus haut, équation qui représente donc dans tous les cas et d'une manière approchée la section faite dans la surface par un plan parallèle à un plan tangent et très peu distant de celui-ci. Cette équation appartient à une courbe du second degré. Si on prend l'axe des X', qui jusqu'ici est resté arbitraire, de manière que le coefficient s_o' de $x'y'$ soit nul, ou, ce qui est la même chose, de manière que la courbe soit rapportée à ses axes, l'équation se confondra identiquement avec celle trouvée pour l'indicatrice.

Elle peut servir à démontrer fort simplement, mais d'une manière peu rigoureuse, les propriétés des rayons de courbure.

118. *Lignes de courbure.* — On appelle *lignes de courbure* des lignes tracées sur une surface donnée, de manière qu'en chaque point la courbe soit tangente à la section de courbure principale de la surface. On a vu (N° 115) qu'en désignant par (α, β, γ) les angles formés par la tangente à la section principale au point (x, y, z), ces angles doivent satisfaire à l'équation

$$\frac{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta}{r\cos\alpha + s\cos\beta} = \frac{(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha}{t\cos\beta + s\cos\alpha}; \ldots\ldots (1)$$

la direction de la tangente à la ligne de courbure au même point doit donc vérifier cette même équation et comme ces cosinus sont donnés par $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, il en résulte que dans toute l'étendue d'une ligne de courbure on doit avoir

$$\frac{(1+p^2)\,dx + pqdy}{rdx + sdy} = \frac{(1+q^2)\,dy + pqdx}{tdy + sdx}.$$

Cette équation différentielle jointe à celle de la surface forment les deux équations de la ligne cherchée. On sait qu'en chaque point il y a deux sections principales se croisant à angle droit; par chaque point d'une surface, il passe donc deux lignes de courbure se coupant sous un angle droit.

Les lignes de courbure jouissent d'une propriété importante qui a

été mise à profit dans la géométrie descriptive pour la coupe des pierres. Si sur une surface donnée on trace une courbe arbitraire et qu'en chacun de ses points on élève une normale à la surface, l'ensemble de ces normales formera une surface réglée qui, en général, sera une surface gauche, et celle-ci sera une surface développable lorsque la courbe tracée est une ligne de courbure. Pour le reconnaître, il suffit de démontrer qu'alors deux normales consécutives se rencontrent. Or les équations d'une normale à la surface au point (x, y, z) sont

$$x' - x = - p(z' - z), \quad y' - y = - q(z' - z)$$

et les équations de la normale au point $(x + dx, y + dy, z + dz)$ distant du premier d'un élément ds sur la ligne de courbure, sont :

$$x' - x - dx = -(p + dp)(z' - z - dz),$$
$$y' - y - dy = -(q + dq)(z' - z - dz).$$

La condition pour qu'il y ait rencontre entre ces deux droites est

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq} \ldots\ldots (2)$$

équation qui se confond avec celle trouvée plus haut pour la ligne de courbure, quand on aura remplacé dz, dp, dq par leur valeur

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy.$$

Il est à remarquer que la rencontre de deux normales consécutives ne paraît rigoureuse que parce que, conformément à l'esprit du calcul différentiel, on a négligé dans les valeurs précédentes de dz, dp, dq, les infiniment petits des ordres supérieurs donnés par leurs développements, en ne conservant que les infiniment petits du premier ordre. Sans cette circonstance, on reconnaîtrait que deux normales séparées par l'élément ds ne se rencontrent pas, mais sont distantes d'un infiniment petit du second ordre. Ce n'est en général que dans les surfaces de révolution que cette rencontre a lieu d'une manière absolue.

Réciproquement, si pour une ligne tracée sur une surface, deux normales consécutives se rencontrent, cette ligne est une ligne de courbure, car la rencontre suppose l'équation (2), laquelle se confond avec l'équation (1) qui caractérise les lignes de courbure.

En éliminant (x, y, z) entre les équations des deux normales consécutives et les équations de la ligne de courbure, on trouvera les deux

équations du lieu géométrique de ces points de rencontre, qui sont les arêtes de rebroussement de la surface développable, et si l'on développe cette surface dans un plan, la ligne de courbure sera la développante de l'arête de rebroussement, puisque toutes les tangentes à celle-ci restent pendant le développement, perpendiculaires aux éléments de la ligne de courbure.

En éliminant (x, y, z) entre les deux équations d'une normale et les deux équations de la ligne de courbure, on trouvera l'équation de la surface développable, lieu de toutes les normales à la surface le long de cette ligne de courbure.

La propriété des lignes de courbure qu'on vient de reconnaître, se démontre fort simplement au moyen de l'indicatrice, considérée comme facette ou élément de la surface, en remarquant que, comme celle-ci est une courbe du second degré dont les axes représentent les directions de plus grande et de moindre courbure, il résulte de la symétrie de cette courbe de chaque côté de ses deux axes, qu'une normale à la surface en un point situé sur l'un des axes doit avoir une direction symétrique par rapport aux deux moitiés de la courbe, et que par conséquent elle doit être contenue dans le plan normal à la surface et passant par cet axe. Or, ce plan normal contient nécessairement la normale du centre de l'indicatrice; ces deux normales auront donc un point de rencontre.

119. *Lignes de courbure dans les surfaces de révolution.* — Il nous resterait encore à déterminer les équations des deux lignes de courbure passant par un point donné sur une surface; mais ce problème, sur lequel nous reviendrons, est du ressort du calcul intégral. Bornons-nous pour le moment à remarquer que dans une surface de révolution, la courbe génératrice ou le méridien est toujours une ligne de courbure, puisque toutes les normales d'un même méridien, étant renfermées dans le plan de cette courbe passant par l'axe, doivent nécessairement se rencontrer. Ces méridiens forment aussi des sections normales principales, car la section principale au point M (fig. 28) doit renfermer la normale MB qui coupe l'axe AO et avoir l'élément MM' commun avec la ligne de courbure, ce qui exige que cette section passe par l'axe AO. Le seconde ligne de courbure passant par le point M est la circonférence du cercle perpendiculaire à l'axe ou le parallèle MN, puisque les normales consécutives MB, mB, m'B.... se coupent évidemment en B, par suite de la symétrie de la surface autour de son axe de révolution. Il est à remarquer que ce parallèle MN passant par M, n'est pas la seconde section principale de ce

point, puisque celle-ci doit contenir la normale MB. Cette section principale est la courbe plane MCN′ dont le plan passe par la normale MB et qui est tangente, en M, au cercle MN. Comme le rayon de courbure de la section oblique MN est le rayon MO′, le rayon de courbure de la section normale MN′ est exprimé par $\frac{MO'}{\cos BMO'}$, (N° 111), c'est-à-dire, qu'il est représenté par la normale MB.

120. *Surfaces enveloppes.* — La théorie des courbes enveloppes peut être étendue aux surfaces ; soit en effet

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \ldots\ldots (1)$$

l'équation d'une surface, renfermant un paramètre α. L'équation

$$f(x, y, z, \alpha + \varepsilon) = 0 \ldots\ldots (2)$$

appartiendra à une autre surface de la même nature que la première, mais dans laquelle α aura pris un accroissement ε, et le système de ces équations représentera la ligne d'intersection de la surface caractérisée par chaque valeur particulière attribuée à α, et de la surface caractérisée par $\alpha + \varepsilon$. Or, si on élimine α entre elles, les (x, y, z) contenus dans l'équation finale, que nous désignerons par

$$F(x, y, z, \varepsilon) = 0,$$

appartiendront encore à l'intersection des deux surfaces caractérisées par α et $\alpha + \varepsilon$; mais comme α a disparu, ces coordonnées appartiendront à l'intersection de deux surfaces quelconques dans lesquelles le paramètre diffère de ε, c'est-à-dire que si l'on trace dans l'espace toutes les surfaces que peut représenter

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

tandis que α prend toutes les valeurs constantes possibles, l'équation finale

$$F(x, y, z, \varepsilon) = 0$$

appartiendra à la surface, lieu géométrique de toutes les lignes d'intersection successive de chacune des premières surfaces, par celle pour laquelle le paramètre est supérieur d'une quantité ε. Si ensuite on y fait converger ε vers zéro, l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

appartiendra à la surface qui forme la limite des lieux géométriques de ces intersections. Au point de vue des infiniment petits, si on fait croître α par intervalles ε assez petits pour être négligeables, l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

appartiendra au lieu géométrique de toutes les intersections de chaque surface par celle qui la suit immédiatement.

Il est à remarquer que cette dernière équation s'obtient en éliminant α entre (1) et la dérivée prise par rapport à α ou

$$\frac{df(x, y, z, \alpha)}{d\alpha} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

car l'équation (2) peut être mise sous la forme suivante, en faisant usage du théorème sur la limite de la série de Taylor,

$$f(x, y, z, \alpha) + \varepsilon \frac{df(x, y, z, \alpha + \theta\varepsilon)}{d\alpha} = 0,$$

et le système des deux équations (1) et (2) deviendra

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df(x, y, z, \alpha + \theta\varepsilon)}{d\alpha} = 0$$

qui se réduisent à

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df(x, y, z, \alpha)}{d\alpha} = 0$$

lorsque ε s'évanouit.

La surface limite qu'on vient de déterminer jouit de la propriété d'être tangente à chacune de celles que peut représenter

$$f(x, y, z, \alpha) = 0;$$

et pour chacune d'elles le contact a lieu le long de la courbe qui a pour équations

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{d\alpha} = 0;$$

en effet, si en un point (x, y, z) de la courbe qui forme l'intersection

des deux surfaces consécutives, on mène un plan tangent à (1), l'équation de ce plan sera, (x', y', z') étant ses coordonnées courantes,

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

dans laquelle p et q sont les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ tirées de (1), c'est-à-dire

$$p = -\frac{\frac{df(x, y, z, \alpha)}{dx}}{\frac{df(x, y, z, \alpha)}{dz}}, \quad q = -\frac{\frac{df(x, y, z, \alpha)}{dy}}{\frac{df(x, y, z, \alpha)}{dz}}.$$

D'un autre côté, si au même point (x, y, z) on mène un plan tangent à la surface limite, son équation sera de même forme, si ce n'est que p et q devront être tirés de l'équation de cette dernière, c'est-à-dire, de l'équation résultant de l'élimination de α entre

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df(x, y, z, \alpha)}{d\alpha} = 0;$$

or, au lieu d'effectuer d'abord l'élimination, il est visible qu'on trouvera la même valeur pour p ou $\frac{dz}{dx}$, par exemple, en la tirant de la première équation, pourvu que l'on y considère α comme étant une fonction de (x, y, z) donnée par la seconde. Il vient alors, en dérivant par rapport à x,

$$\frac{df(x, y, z, \alpha)}{dx} + \frac{df(x, y, z, \alpha)}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df(x, y, z, \alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

qui se réduit, à cause de (3), à

$$\frac{df(x, y, z, \alpha)}{dx} + \frac{df(x, y, z, \alpha)}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

d'où l'on tire pour $\frac{dz}{dx}$ ou p une valeur identiquement semblable à celle trouvée pour l'autre plan tangent. Comme il en est de même de la valeur de q, on en conclut que les deux plans tangents se confondent et que par conséquent les surfaces variables sont touchées par la sur-

face limite appelée par cette raison, *surface enveloppe*. Les courbes de pénétration de deux surfaces consécutives, qui ne sont autres que des courbes de contact, prennent le nom de *caractéristiques*. Si dans les deux équations de l'une de ces lignes, savoir :

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{df(x, y, z, \alpha)}{d\alpha} = 0,$$

on fait varier le paramètre α d'une manière continue, celles-ci représenteront une suite de courbes tracées sur la surface enveloppe et se succédant d'une manière continue. La courbe tracée sur la surface enveloppe, qui touche toutes les caractéristiques, est nommée *arête de rebroussement*. Elle se détermine en remarquant que si dans la seconde équation de la caractéristique on remplace z par sa valeur tirée de la première, on trouvera l'équation de la projection dans le plan des XY de la caractéristique. La courbe enveloppe de toutes ces projections est donnée, comme on sait, par le système des deux équations formées de $\frac{df}{d\alpha} = 0$ et de la dérivée de $\frac{df}{d\alpha}$ par rapport à α, égalée à zéro. Or, cette dérivée, en considérant z comme une fonction de α donnée par l'équation $f(x, y, z, \alpha) = 0$, est

$$\frac{d^2f}{d\alpha^2} + \frac{d^2f}{d\alpha dz}\frac{dz}{d\alpha} = 0,$$

équation qui se réduit à $\frac{d^2f}{d\alpha^2} = 0$, c'est-à-dire $\frac{d^2f(x, y, z, \alpha)}{d\alpha^2} = 0$, parce que la première équation de la caractéristique donne $\frac{dz}{d\alpha} = -\frac{\frac{df}{d\alpha}}{\frac{df}{dz}}$ valeur qui est nulle puisque $\frac{df}{d\alpha}$ est nul. Il est visible que l'enveloppe des projections des caractéristiques est elle-même la projection de la courbe que nous avons appelée arête de rebroussement. La projection de cette dernière courbe est donc donnée par les trois équations

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{df(x, y, z, \alpha)}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2f(x, y, z, \alpha)}{d\alpha^2} = 0,$$

entre lesquelles on éliminera z et α.

1[er] exemple. *Trouver l'équation de la surface enveloppe d'une sphère mobile dont le centre parcourt la circonférence d'un cercle donné.* Prenant le plan du cercle pour plan des XY, on aura pour son équation

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 \ldots\ldots (1)$$

et l'équation de la sphère dans l'une de ses positions sera

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2 \ldots\ldots (2)$$

Si l'on élimine β entre les deux équations, on trouvera une équation finale dans laquelle α tiendra lieu du paramètre variable; prenons donc la dérivée de (2), en considérant β comme fonction de α donnée par l'équation (1); il viendra

$$(x - \alpha) + (y - \beta)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Mais l'équation (1) donne

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta};$$

la dérivée devient donc

$$(x - \alpha)\beta - (y - \beta)\alpha = 0, \quad \text{ou bien} \quad x\beta - y\alpha = 0 \ldots\ldots (3)$$

En éliminant α et β entre (1), (2) et (3), on trouve pour la surface enveloppe, c'est-à-dire, *le tore,*

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Les caractéristiques sont des cercles de rayon r, renfermés dans des plans passant par l'axe Z.

2[e] exemple. *Trouver la surface enveloppe de tous les plans menés tangentiellement à deux paraboles renfermées dans les plans des XZ et des YZ.* Soit

$$z = ax + by + c$$

l'équation du plan dans l'une de ses positions. Ses traces seront données par les équations

$$z = ax + c \quad \text{et} \quad z = by + c.$$

Ces droites doivent être tangentes aux deux paraboles

$$z^2 = 2px, \quad z^2 = 2p'y;$$

si donc on désigne par (x', z') et (y'', z'') les coordonnées des deux points de contact, comme l'équation de chaque tangente est

$$z - z' = \frac{p}{z'}(x - x'), \quad z - z'' = \frac{p'}{z''}(y - y''),$$

on devra avoir

$$a = \frac{p}{z'}, \quad b = \frac{p'}{z''} \quad \text{et} \quad c = z' - \frac{px'}{z'} = z'' - \frac{p'y''}{z''}.$$

A cause des relations

$$z'^2 = 2px', \quad z''^2 = 2p'y'',$$

la double valeur de c devient

$$c = \frac{z'}{2} = \frac{z''}{2} \text{ et par conséquent } z' = z''.$$

L'équation du plan mobile prend donc la forme

$$z = \frac{px}{z'} + \frac{p'y}{z'} + \frac{z'}{2},$$

dans laquelle la constante z' change de valeur avec la position du plan.

En éliminant z' entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à z', on trouve pour la surface enveloppe

$$z^2 = 2px + 2p'y$$

qui appartient à une surface cylindrique à base parabolique.

Les deux équations d'une caractéristique sont ici

$$z = \frac{px + p'y}{z'} + \frac{z'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} = \frac{px + p'y}{z'^2}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$z = z' \quad \text{et} \quad px + p'y = \frac{z'^2}{2}.$$

On voit que ces lignes sont des droites parallèles entre elles et au plan des XY. Il n'y a pas d'arête de rebroussement, ce qui résulte d'ailleurs de ce que la troisième équation $\frac{d^2f}{d\alpha^2}=0$ est incompatible avec les deux autres.

3ᵉ exemple. *Trouver la surface enveloppe de tous les ellipsoïdes concentriques équivalents, de révolution autour de l'axe des* Z. On trouve pour solution la surface de révolution ayant pour équation

$$x^2+y^2=\frac{m}{z},$$

dans laquelle m est une constante. Si la somme des axes devait être constante dans ces ellipsoïdes de révolution, la surface enveloppe aurait pour équation

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$$

qui appartient à un hypocycloïde de révolution autour de l'axe des Z.

CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE VIII.

Objet du calcul intégral. Existence de l'intégrale d'une différentielle donnée. Constante arbitraire qui la complète. — Intégration des différentielles monômes algébriques. — Intégrales logarithmiques. — Intégrales circulaires et trigonométriques. — Intégration des différentielles trigonométriques. — Intégration par parties. — Intégration des différentielles exponentielles. — Fractions rationnelles. — Décomposition des fractions rationnelles. — Cas des racines égales. — Cas des racines imaginaires. — Cas des racines imaginaires égales. — Intégration des fractions rationnelles. — Intégration des fonctions algébriques irrationnelles. — Intégration des différentielles binômes. — Formules de réduction des différentielles binômes. — Intégration par les séries. — Construction géométrique d'une intégrale.

121. ***Objet du calcul intégral. Existence de l'intégrale d'une différentielle donnée. Constante arbitraire qui la complète.*** — On appelle *intégration* l'opération par laquelle on remonte d'une dérivée donnée à sa *fonction primitive*. Pour une fonction quelconque donnée $f'x$ il existe nécessairement une autre fonction qui, étant différenciée, reproduit la première, ou, en d'autres termes, toute fonction donnée a une fonction primitive; en effet, concevons que dans $f'x$ on donne à x, qu'on peut toujours considérer comme une abscisse, toutes les valeurs possibles depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x$, en prenant pour accroissement successif une quantité très petite i; soient $f'(0)$, $f'(i)$, $f'(2i)$,

$f'(3i)$, $f'(4i)$... $f'(x)$, les valeurs correspondantes de $f'x$. Portons à partir de A (fig. 29) sur l'axe des X des parties Am, mm', $m'm''$... égales à i, et élevons les ordonnées mb, $m'c$, $m''d$,... Prenons sur l'axe des Y un point arbitraire a et menons at de manière que cette droite fasse avec l'axe des X un angle dont la tangente trigonométrique soit égale à $f'(o)$. Par le point b où cette droite rencontre mb, menons bt' dont l'inclinaison sur l'axe des X soit donnée par $f'(i)$. Par c menons de même ct'' fixée par $f'(2i)$ et ainsi de suite. On formera de cette manière un polygone $a\ b\ c\ d\ e$... et si l'on conçoit que l'on passe à la limite, en faisant décroître indéfiniment i, le polygone sera remplacé par une certaine courbe ayant une équation à la vérité inconnue, de la forme

$$y = fx,$$

et il est visible que fx est la fonction primitive de $f'x$; car si en un point quelconque de la courbe on mène à celle-ci une tangente, l'angle qu'elle formera avec l'axe des X aura pour tangente $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dfx}{dx}$, pour toute valeur de x, et comme il résulte de la construction précédente que cette tangente est aussi égale à $f'x$, on aura

$$\frac{dfx}{dx} = f'x.$$

On voit donc que la fonction f étant dérivée, reproduit la fonction $f'x$ et qu'elle est par conséquent la fonction primitive de cette dernière.

On arrive à la même conclusion sans considérations géométriques, en remarquant que l'on a (N° 3)

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = f'(x + \theta h),$$

dans laquelle $f'x$ est la dérivée de fx et θ une certaine fonction inconnue de x et de h dont la valeur numérique est comprise entre zéro et l'unité positive. Si donc on fait h égal à $-x$, il vient en remplaçant $1 - \theta$ par θ',

$$fx = fo + xf'(\theta' x),$$

et comme fx est la fonction primitive de $f'x$, cette équation apprend que pour former cette fonction primitive, il faut multiplier par x la

dérivée, après y avoir changé x en θx, et ajouter au produit le terme $f0$ qui représente ce que devient fx quand on y rend x nul, c'est-à-dire une constante indéterminée. Cette formule ne peut servir à trouver la forme de la fonction primitive à cause de l'ignorance où l'on est sur la forme de θ; mais elle prouve du moins l'existence de cette fonction primitive.

Il est à remarquer qu'à la dérivée $f'x$ correspond la différentielle $f'xdx$ dont la fonction primitive fx, que l'on appelle alors *intégrale*, est aussi celle de la dérivée $f'x$. Il est donc indifférent de considérer fx comme la fonction primitive de la dérivée $f'x$ ou comme l'intégrale de la différentielle $f'xdx$.

L'intégrale d'une différentielle s'indique en faisant précéder celle-ci du signe $\int$ qui se nomme *signe d'intégration*; l'intégrale de $fxdx$ est donc désignée par $\int fxdx$.

Il suit de ce qu'on vient de voir : 1° qu'en différenciant l'intégrale d'une différentielle donnée, on doit retrouver celle-ci; 2° que la différentielle d'une intégrale $\int fxdx$ qui n'est qu'indiquée, s'obtient en supprimant le signe $\int$, et 3° que l'intégrale d'une différentielle $d\varphi x$ qui n'est qu'indiquée, est φx et s'obtient en supprimant le d. Il est visible aussi que l'intégrale de $fxdx$ peut être représentée plus généralement par $\int fxdx + C$, C étant une constante entièrement arbitraire; car la différentielle de cette somme est aussi $fxdx$. Cette dernière intégrale se nomme *intégrale générale* pour la distinguer de la première. La différentielle $fxdx + Fxdx - \varphi xdx$ a de même pour intégrale $\int fxdx + \int Fxdx - \int \varphi xdx + C$, car en différenciant cette dernière quantité, on retrouve la différentielle donnée. Enfin si A est un coefficient constant, l'intégrale de $Afxdx$ sera $A\int fxdx$; car on sait que la différentielle de $A\varphi x$ est $Ad\varphi x$ et par conséquent la différentielle de $A\int fxdx$ est $Afxdx$.

Ces diverses observations donnent lieu aux règles suivantes :

1° *Pour compléter l'intégrale d'une différentielle donnée, il faut y ajouter une constante arbitraire.*

2° *L'intégrale d'une différentielle composée de plusieurs termes se compose des intégrales de chacun de ces termes pris avec son signe.*

3° *On peut faire sortir du signe d'intégration un coefficient constant qui affecte la différentielle.*

122. *Intégration des différentielles monômes algébriques.* — Occupons-nous d'abord de l'intégration des différentielles monômes les plus simples. On trouve les intégrales d'un grand nombre d'entre

elles en comparant les dérivées monômes trouvées au commencement du calcul différentiel, à leurs fonctions primitives; ainsi, de ce que

$$d.z^n = nz^{n-1}\,dz,$$

il résulte que l'on a

$$\int nz^{n-1}\,dz = z^n, \quad \text{ou} \quad n\int z^{n-1}\,dz = z^n, \quad \text{d'où} \quad \int z^{n-1}\,dz = \frac{z^n}{n}.$$

Si l'on remplace $n-1$ par m, il vient

$$\int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1},$$

c'est-à-dire que *pour intégrer une différentielle de la forme $z^m dz$, il faut supprimer dz, ajouter l'unité à l'exposant m et diviser par ce nouvel exposant.*

Cette règle est vraie, quelle que soit la valeur de m, que celle-ci soit entière ou fractionnaire, positive ou négative, puisque la différentielle qui y a conduit est générale; on a donc

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}, \quad \int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}, \quad \int a\,dx = a\int x^0 dx = ax.$$

$$\int \frac{ax^2}{\sqrt{x}}\,dx = a\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}ax^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}a\sqrt{x^5}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x},$$

$$\int \frac{a\,dx}{x^2\sqrt[3]{x^2}} = a\int x^{-\frac{8}{3}}\,dx = -\frac{3}{5}ax^{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}\frac{a}{\sqrt[3]{x^5}}.$$

$$\int\left(ax^n + \frac{b}{x^m} - c\right)dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + b\frac{x^{-m+1}}{-m+1} - cx.$$

Pour avoir l'intégrale générale, il faut ajouter partout une constante arbitraire. La même règle sert à intégrer des différentielles de la forme

$$(ax^n - bx^m + c)^p\,dx, \quad ax^q(bx^n - cx^m - e)^p\,dx, \quad ax^q(bx^m + c)^p(ex^n + f)^r\,dx,$$

pourvu que les exposants p, r soient des nombres entiers et positifs; car si on développe ces puissances de polynômes au moyen du binôme de Newton et qu'on effectue les multiplications indiquées, on réduira

ces différentielles à une suite *limitée* de termes monômes, tels que $Ax^n dx$ que l'on sait intégrer. C'est ainsi que l'on trouve

$$\int x(ax^2-b)^2dx=\int(a^2x^5-2abx^3+b^2x)\,dx=a^2\frac{x^6}{6}-2ab\frac{x^4}{4}+b^2\frac{x^2}{2}+C.$$

Dans certains cas, les différentielles de cette dernière forme peuvent s'intégrer d'une manière plus expéditive et sans effectuer le développement du polynôme, et par conséquent, quelle que soit la valeur de l'exposant. Soit, par exemple, à intégrer $(ax-b)^p\,dx$. En faisant $ax-b$ égal à z, il vient

$$x=\frac{z+b}{a},\quad dx=\frac{dz}{a}$$

et en substituant, on trouve

$$\int(ax-b)^p dx=\int z^p\frac{dz}{a}=\frac{1}{a}\int z^p dz=\frac{1}{a}\frac{z^{p+1}}{p+1}+C=\frac{1}{a}\frac{(ax-b)^{p+1}}{p+1}+C.$$

Pour $(4x^3-1)^p x^2 dx$, on représentera $4x^3-1$ par z et il viendra en différenciant,

$$x^2\,dx=\frac{dz}{12}$$

et en substituant,

$$\int(4x^3-1)^p x^2 dx=\int z^p\frac{dz}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{z^{p+1}}{p+1}=\frac{1}{12\,(p+1)}(4x^3-1)^{p+1}.$$

Enfin pour $(ax^n+b)^p\,x^{n-1}\,dx$, on posera

$$ax^n+b=z,\quad x^{n-1}\,dx=\frac{dz}{an},$$

et on trouve en substituant,

$$\int(ax^n+b)^p x^{n-1}\,dx=\int z^p\frac{dz}{na}=\frac{1}{na}\frac{z^{p+1}}{p+1}+C=\frac{(ax^n+b)^{p+1}}{na\,(p+1)}+C.$$

C'est ainsi encore que l'on trouve, en faisant $1-x^2$ égal à z^2,

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int-dz=-z+C=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Il est visible que cette transformation n'est possible que lorsque la différentielle de la fonction comprise entre parenthèse ou sous le radical, représente, à un coefficient constant près, le facteur placé en dehors de la parenthèse du radical.

123. *Intégrales logarithmiques.* — La formule

$$\int z^m\,dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C$$

est en défaut lorsque m est égal à -1, car il vient alors

$$\int z^{-1}\,dz \quad \text{ou} \quad \int \frac{dz}{z} = \frac{z^0}{0} + C = \frac{1}{0} + C,$$

intégrale à laquelle la présence du symbole de l'infini ôte tout sens saisissable. Cette difficulté provient de ce que l'intégrale de $\frac{dz}{z}$ est d'une nature toute différente de celle de $z^m dz$; on a vu en effet que la différentielle de $\log z$ est $\frac{dz}{z}$, d'où il résulte que l'intégrale de $\frac{dz}{z}$ est $\log z$ ou, plus généralement, $\log z + C$. L'intégrale générale n'était pas cependant fautive pour $m = -1$, car en mettant $\frac{z^{m+1}}{m+1} + C$ sous la forme $\frac{z^{m+1}-1}{m+1} + C + \frac{1}{m+1} = \frac{z^{m+1}-1}{m+1} + C'$ qui devient $\frac{0}{0} + C'$ pour m égal à -1, on trouve $\log z$ pour vraie valeur de la fraction correspondant à $m = -1$.

Cette formule permet de trouver l'intégrale d'une différentielle fractionnaire dans laquelle le numérateur est la différentielle du dénominateur; car en représentant ce dernier, quel qu'il soit, par z, le numérateur sera dz et l'intégrale de $\frac{dz}{z}$ est $\log z + C$. On trouve de cette manière

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) + C,$$

$$\int \frac{3ax^2\,dx}{ax^3-b^3} = \log(ax^3-b^3) + C,$$

$$\int \frac{(8x^3-3)\,dx}{2x^4-3x-1} = \log(2x^4-3x-1) + C.$$

On peut obtenir, par le même procédé, l'intégrale d'une différentielle fractionnaire dont le numérateur est la différentielle du dénominateur, à un facteur constant près; car si l'on représente le dénominateur par z, le numérateur sera de la forme ndz et l'on aura

$$\int \frac{ndz}{z} = n\int \frac{dz}{z} = n \log z + C.$$

C'est ainsi qu'on trouve

$$\int \frac{dx}{ax-b} = \frac{1}{a}\log(ax-b) + C, \quad \int \frac{3xdx}{5x^2-1} = \frac{3}{10}\log(5x^2-1) + C.$$

On obtiendrait aussi sans peine l'intégrale d'une différentielle de la forme $\frac{Ax^m dx}{(a+bx)^n}$, lorsque m est un nombre entier et positif; car en faisant $a+bx=z$, il vient

$$\int \frac{Ax^m dx}{(a+bx)^n} = \int \frac{A}{b^{m+1}}\,\frac{(z-a)^m}{z^n}dz$$

$$= \frac{A}{b^{m+1}} \int \frac{z^m - maz^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2z^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3z^{m-3} + \text{etc.}}{z^n}dz$$

$$= \frac{A}{b^{m+1}}\left\{\int z^{m-n}dz - ma\int z^{m-n-1}dz + \frac{a^2m(m-1)}{1.2}\int z^{m-n-2}dz + \text{etc.}\right\}.$$

Souvent, au lieu d'ajouter simplement une constante arbitraire C pour compléter l'intégrale, il est plus commode d'ajouter $\log C$ ou $a \log C$, qui sont aussi des constantes; ainsi on posera

$$\int \frac{dz}{z} = \log z + \log C = \log(Cz), \quad \int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) + \log C = \log C(x-a).$$

Cette intégrale se met aussi sous la forme $\frac{1}{2}\log C^2(x-a)^2$ pour que le logarithme soit réel, même lorsque C ou $x-a$ sont négatifs.

$$\int \frac{ndz}{z} = n\log z + n\log C = n\log(Cz) = \frac{n}{2}\log(Cz)^2.$$

$$\int \frac{dx}{ax-b} = \frac{1}{a}\log(ax-b) + \frac{1}{a}\log C = \frac{1}{a}\log C(ax-b) = \frac{1}{2a}\log C^2(ax-b)^2.$$

$$\int \frac{ax^3 dx}{a^4 - x^4} = -\frac{a}{4}\log C(a^4 - x^4).$$

124. *Intégrales circulaires et trigonométriques.* — On a vu dans le calcul différentiel (N° 17) que

$$d.\operatorname{arc\,sin} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d.\operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Il résulte de là que l'on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C.$$

Ces formules servent à intégrer toutes les différentielles réductibles aux formes $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\frac{dx}{1+x^2}$; ainsi pour $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, on fera les transformations suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \operatorname{arc\,sin} z = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}.$$

On obtient de même les intégrales suivantes :

$$\int \frac{adx}{\sqrt{b^2-cx^2}} = \frac{a}{\sqrt{c}}\int \frac{dz}{\sqrt{b^2-z^2}} = \frac{a}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,sin}\frac{z}{b} = \frac{a}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,sin}\frac{x\sqrt{c}}{b}.$$

$$\int \frac{axdx}{\sqrt{b^4-x^4}} = \frac{a}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{(b^2)^2-z^2}} = \frac{a}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{z}{b^2} = \frac{a}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x^2}{b^2}.$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang} z + C = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{3+2x+x^2} = \int \frac{dx}{2+(1+x)^2} = \int \frac{dz}{2+z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tang} \frac{1+x}{\sqrt{2}} + C.$$

La différentielle

$$d.\text{arc cos}\, x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

conduit aussi à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\text{arc cos}\, x + C',$$

qui se prête à toutes les transformations précédentes.

De la valeur de la différentielle suivante

$$d.\text{arc sin verse}\, x = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}},$$

il résulte que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \text{arc sin verse}\, x + C.$$

Cette formule conduit à plusieurs autres; on a par exemple,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{2\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{dz}{\sqrt{2z-z^2}} = \text{arc sin verse}\, z + C$$

$$= \text{arc sin verse}\frac{x}{a} + C = \text{arc cos}\left(1-\frac{x}{a}\right) + C.$$

On a de même

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-bx^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}\sqrt{2\frac{a}{2b}x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dx}{\sqrt{2a'x-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc sin verse}\frac{x}{a'} + C = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc sin verse}\frac{2bx}{a} + C.$$

125. *Intégration des différentielles trigonométriques.* — Les fonctions trigonométriques monômes les plus simples sont :

$$\cos x dx, \quad \sin x dx, \quad \operatorname{tang} x dx, \quad \frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad \cot x dx,$$

$$\frac{\cos x dx}{\sin x}, \quad \sin x \cos x dx, \quad \frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \frac{dx}{\sin x}, \quad \frac{dx}{\cos x}.$$

Les deux premières s'intègrent immédiatement en remarquant que puisque l'on a (N° 14)

$$d.\sin x = \cos x dx \quad \text{et} \quad d.\cos x = -\sin x dx,$$

on a aussi

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad \text{et} \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos ax dx = \int \cos z \frac{dz}{a} = \frac{1}{a} \sin z + C = \frac{1}{a} \sin ax + C.$$

La troisième et la quatrième s'intègrent en remarquant que le numérateur étant la différentielle du dénominateur, on a

$$\int \operatorname{tang} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\log \cos x - \log C = -\frac{1}{2} \log (C^2 \cos^2 x)$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \log \sin x + \log C = \frac{1}{2} \log (C^2 \sin^2 x)$$

Pour avoir l'intégrale de la cinquième différentielle, faisons $\sin x = z$ et $\cos x dx = dz$; il vient alors

$$\int \sin x \cos x dx = \int z dz = \frac{z^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

L'intégrale suivante s'obtient en remarquant que l'on peut multiplier cette différentielle par $\sin^2 x + \cos^2 x$ sans changer sa valeur ; on a donc

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$$= -\log \cos x + \log \sin x + \log C = \log C \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2} \log (C^2 \operatorname{tang}^2 x).$$

Pour les deux différentielles suivantes, on fera ces transformations :

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}=\int\frac{\frac{dx}{2}}{\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}=\int\frac{dz}{\sin z\cos z}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(C^2\operatorname{tang}^2 z\right)=\frac{1}{2}\log\left(C^2\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x\right).$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int\frac{dz}{\sin z}$$

$$=-\frac{1}{2}\log C^2\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Passons à la différentielle plus compliquée $\sin^m x\cos^n x dx$. En représentant $\sin x$ par z, on trouve

$$\cos x=\sqrt{1-z^2}\quad\text{et}\quad dx=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

et par conséquent en substituant,

$$\int\sin^m x\cos^n x dx=\int z^m\left(1-z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}dz.$$

On voit donc que la différentielle proposée se ramène toujours à une différentielle algébrique d'une forme particulière dont on s'occupera plus loin (N° 135). Une transformation semblable rendra algébrique toute différentielle qui ne contient que des lignes trigonométriques.

Dans cette différentielle, m et n sont quelconques, positifs ou négatifs. La transformée précédente s'applique donc, comme cas particuliers et en faisant successivement m et n négatifs, $m=n$, $m=0$, $n=0$, aux différentielles suivantes :

$$\int\frac{\cos^n x dx}{\sin^m x},\quad\int\frac{\sin^m x dx}{\cos^n x},\quad\int\frac{\sin^m x dx}{\cos^m x}=\int\operatorname{tang}^m x dx,\quad\int\frac{\cos^n x dx}{\sin^n x}$$

$$=\int\cot^n x dx,\quad\int\cos^n x dx,\quad\int\sin^m x dx,\quad\int\frac{dx}{\sin^m x},\quad\int\frac{dx}{\cos^n x}.$$

Quand m et n sont entiers et positifs, on arrive souvent plus simplement à l'intégrale, en remplaçant $\sin^m x$ et $\cos^n x$ par leur développement trouvé au N° 49 du calcul différentiel, et l'on n'a plus alors qu'à intégrer des termes de la forme $\sin px \cos qx\, dx$ ou $\cos px \cos qx dx$, dont les intégrales sont

$$\int \sin px \cos qx\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(p+q)\, x dx + \frac{1}{2}\int \sin(p-q)\, x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(p+q)\, x}{p+q} + \frac{\cos(p-q)\, x}{p-q}\right\} + C,$$

$$\int \cos px \cos qx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(p+q)\, x dx + \frac{1}{2}\int \cos(p-q)\, x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(p+q)\, x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)\, x}{p-q}\right\} + C.$$

126. *Intégration par parties.* — Souvent dans le but de faciliter l'intégration, on fait usage d'une transformation qui a l'avantage de faire dépendre l'intégrale cherchée d'une autre intégrale plus facile à obtenir. Cette méthode, fréquemment employée, et que l'on nomme *intégration par parties*, est fondée sur ce que, si u et v sont des fonctions de x, on a

$$d(uv) = udv + vdu,$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$uv = \int udv + \int vdu \quad \text{et} \quad \int udv = uv - \int vdu.$$

Cette dernière équation, qui est la formule pour l'intégration par parties, fait évidemment dépendre l'intégration de udv, de l'intégration de vdu. Pour en faire usage, il faut décomposer une différentielle donnée en deux facteurs u et dv, dont l'un soit une différentielle connue dv, ayant v pour intégrale, l'autre facteur étant représenté par u. La différentielle donnée sera donc udv, dont l'intégrale sera connue si l'on parvient à intégrer vdu, c'est-à-dire, le produit de l'intégrale du facteur différentiel dv par la différentielle du facteur fini u.

Prenons pour exemple la différentielle $x \sin x dx$ et remplaçons $\sin x dx$ par dv et x par u. Il est visible que v sera $\cos x$ et il viendra

$$\int x \sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Considérons encore la différentielle $x^m \cos x dx$ et supposons m entier et positif. Si l'on intègre successivement par parties, en faisant d'abord

$$u = x^m, \quad dv = \cos x dx,$$

puis, en posant

$$u = x^{m-1}, \quad dv = \sin x dx$$

et ainsi de suite, on trouve

$$\int x^m \cos x dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x dx$$

$$= x^m \sin x + m x^{m-1} \cos x - m(m-1) \int x^{m-2} \cos x dx = x^m \sin x$$

$$+ m x^{m-1} \cos x - m(m-1) x^{m-2} \sin x + m(m-1)(m-2) \int x^{m-3} \sin x dx$$

$$= \sin x \left\{x^m - m(m-1) x^{m-2} + m(m-1)(m-2)(m-3) x^{m-4} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \cos x \left\{m x^{m-1} - m(m-1)(m-2) x^{m-3} + \ldots\ldots\right\}.$$

127. *Intégration des différentielles exponentielles.* — L'intégrale de la différentielle $a^x dx$ se déduit aussi d'une formule du calcul différentiel. On a vu que

$$d \,.\, a^x = a^x dx \log a,$$

d'où l'on tire en intégrant les deux membres,

$$a^x = \log a \int a^x dx, \quad \text{et} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

Cette formule conduit sans peine aux intégrales suivantes, en effectuant les transformations indiquées,

$$\int e^{-ax} dx = -\int e^z \frac{dz}{a} = -\frac{1}{a} e^z + C = -\frac{1}{a} e^{-ax} + C.$$

$$\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{dz}{1 + z^2} = \text{arc tang}\,(z) + C = \text{arc tang}\,(e^x) + C.$$

On peut aussi intégrer toute différentielle de la forme $x^m a^x dx$, quand m est entier et positif ou plus généralement, $Xa^x dx$ dans laquelle X est une fonction entière et rationnelle de x; en effet, si l'on intègre par parties au moyen de la formule

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

en faisant

$$u = X, \quad dv = a^x dx \quad \text{d'où} \quad v = \frac{a^x}{\log a},$$

il vient

$$\int Xa^x dx = X\frac{a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int a^x X' dx,$$

dans laquelle X' représente $\frac{dX}{dx}$. En intégrant successivement de la même manière et en représentant par X'', X''', X'''', etc., les dérivées successives $\frac{d^2X}{dx^2}$, $\frac{d^3X}{dx^3}$, $\frac{d^4X}{dx^4}$, etc., l'une de ces dérivées, et par conséquent toutes les suivantes seront nulles si la fonction X est entière, algébrique et rationnelle et on aura

$$\int Xa^x dx = X\frac{a^x}{\log a} - X'\frac{a^x}{\log^2 a} + X''\frac{a^x}{\log^3 a} - X'''\frac{a^x}{\log^4 a} + \text{etc.} + C.$$

Si X n'était pas entier et rationnel, le nombre de termes du second membre serait illimité, et l'intégrale serait exprimée en série infinie. Ainsi s'il s'agit d'intégrer $x^m a^x dx$, m étant entier et positif, on posera

$$X = x^m, \quad X' = mx^{m-1}, \quad X'' = m(m-1)x^{m-2},$$

$$X''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}\ldots\ldots, \quad X^{(m+1)} = 0,$$

$$\int x^m a^x dx = \frac{a^x}{\log a}\left(x^m - \frac{mx^{m-1}}{\log a} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{\log^2 a}\right.$$

$$\left. - \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}}{\log^3 a}\ldots\ldots \pm \frac{1.2.3.4\ldots\ldots m}{\log^m a}\right) + C.$$

En effectuant l'intégration par parties dans un ordre différent, on est conduit à une autre expression de la même intégrale qui, dans ce cas, forme toujours une série infinie. Ainsi si on pose

$$a^x = u, \quad Xdx = dv, \quad \text{d'où} \quad v = \int Xdx;$$

il vient

$$\int Xa^x dx = a^x X_i - \log a \int X_i a^x dx,$$

dans laquelle X_i tient lieu de $\int Xdx$.

Si l'on continue à intégrer de la même manière, en faisant

$$X_{\prime\prime} = \int X_{\prime}dx, \quad X_{\prime\prime\prime} = \int X_{\prime\prime}\,dx, \text{ etc.,}$$

on trouvera

$$\int Xa^x dx = X_{\prime}a^x - X_{\prime\prime}a^x \log a + X_{\prime\prime\prime}a^x \log^2 a - X_{\prime\prime\prime\prime}a^x \log^3 a + \text{etc.} + C.$$

En appliquant cette formule à l'intégrale $\int \frac{a^x}{x^m}dx$, il vient, en supposant m entier,

$$X = \frac{1}{x^m}, \quad X_{\prime} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{x^{m-1}}, \quad X_{\prime\prime} = \frac{1}{(m-1)(m-2)}\,\frac{1}{x^{m-2}},$$

$$X_{\prime\prime\prime} = -\frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)}\,\frac{1}{x^{m-3}},$$

$$X_{\prime\prime\prime\prime} = \frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}\,\frac{1}{x^{m-4}}\,\ldots\ldots,$$

$$X_{m-1} = \pm\frac{1}{1.2.3.4\ldots\ldots(m-1)}\cdot\frac{1}{x};$$

et par conséquent

$$\int \frac{a^x}{x^m}dx = -\left(\frac{1}{m-1}\,\frac{a^x}{x^{m-1}} + \frac{\log a}{(m-1)(m-2)}\,\frac{a^x}{x^{m-2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\log^2 a}{(m-1)(m-2)(m-3)}\,\frac{a^x}{x^{m-3}}\ldots\ldots + \frac{\log^{m-2} a}{1.2.3\ldots.m-1}\int\frac{a^x dx}{x}\right).$$

On voit que, quelle que soit la valeur de l'exposant m, s'il est entier et positif, on devra toujours arriver à la différentielle $\frac{a^x dx}{x}$ que l'on ne sait intégrer que d'une manière approchée, comme on le verra plus loin.

Un procédé d'intégration analogue peut être appliqué à la différentielle $X \log^n x dx$; car si l'on intègre par parties, en représentant $\int Xdx$ par $X_{\prime}$, on trouve

$$\int X \log^n x dx = X_{\prime} \log^n x - n \int X_{\prime} \log^{n-1} x d \log x$$

$$= X_{\prime} \log^n x - n \int \frac{X_{\prime}}{x} \log^{n-1} x dx.$$

On aura de même, en faisant

$$\int \frac{X_{,}}{x}dx = X_{,,}, \quad \int \frac{X_{,,}}{x}dx = X_{,,,}, \text{ etc.},$$

savoir : (1)

$$\int X \log^n x dx = X_{,} \log^n x - nX_{,,} \log^{n-1} x$$
$$+ n(n-1)X_{,,,} \log^{n-2} x - n(n-1)(n-2) X_{,,,,} \log^{n-3} x$$
$$\ldots\ldots \pm 1.2.3\ldots\ldots nX_{(n+1)} + C\ldots\ldots$$

On trouve de cette manière :

$$\int \log x dx = x \log x - x + C.$$

$$\int x^m \log^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{\log^n x - \frac{n}{m+1}\log^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\log^{n-2} x \ldots\ldots \right.$$
$$\left. \pm \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{(m+1)^n}\right\} + C.$$

Si n était négatif dans (1), cette formule devrait être modifiée. En intégrant encore par parties, il vient, en remarquant que

$$\int \frac{1}{\log^n x}\frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z^n} = -\frac{z^{-n+1}}{n-1} = \frac{-1}{n-1}\frac{1}{\log^{n-1} x},$$

savoir :

$$\int \frac{Xdx}{\log^n x} = \int Xx \frac{1}{\log^n x}\frac{dx}{x} = -\frac{Xx}{(n-1)\log^{n-1} x} + \frac{1}{n-1}\int \frac{d(Xx)}{\log^{n-1} x},$$

et l'on voit que l'exposant n dans l'intégrale du second membre est diminué d'une unité. En changeant successivement dans cette formule, n en $n-1$, $n-2$, $n-3$, etc., l'exposant de $\log x$ diminuera d'une unité à chaque opération, en sorte qu'on sera nécessairement conduit à une intégrale de la forme $\int \frac{Zdx}{\log x}$ dans laquelle Z représente une fonction de x.

128. *Fractions rationnelles.* — Passons à l'intégration de différentielles algébriques plus compliquées, et occupons-nous d'abord des

différentielles rationnelles. Leur forme la plus générale est $\frac{Xdx}{X'}$, X et X' étant des fonctions de x, telles que $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ etc.

On peut, sans diminuer la généralité de la méthode, admettre que le polynôme X est d'un degré moins élevé que X'; car si cela n'était pas, on effectuerait la division de X par X', jusqu'à ce qu'on trouvât un reste X'' d'un degré inférieur à X et en représentant par Q le quotient, on aurait

$$\frac{X}{X'} = Q + \frac{X''}{X'}$$

et par conséquent

$$\int \frac{X}{X'} dx = \int Q dx + \int \frac{X''}{X'} dx$$

dans laquelle Q se compose de termes de la forme ax^n, et l'on voit que l'intégrale cherchée dépendrait de l'intégration de la fraction rationnelle $\frac{X''}{X'} dx$ dans laquelle le numérateur est un polynôme entier et rationnel en x d'un degré moins élevé que le dénominateur. C'est ainsi que pour intégrer

$$\frac{3x^4 - 6x^2 + 1}{x^2 - 2x + 2} dx, \quad \text{on fera} \quad \frac{3x^4 - 6x^2 + 1}{x^2 - 2x + 2} = 3x^2 + 6x + \frac{1 - 12x}{x^2 - 2x + 2}.$$

On peut aussi admettre que le coefficient du terme de plus haute puissance de x au dénominateur est toujours l'unité; car si cela n'avait pas lieu, il suffirait de diviser le numérateur et le dénominateur par le coefficient de ce terme. De cette manière

$$\frac{2x^3 - 3ax^2 - a^3}{3x^4 - 5a^3x + 2a^4} \quad \text{serait mis sous la forme} \quad \frac{\frac{2}{3}x^3 - ax^2 - \frac{1}{3}a^3}{x^4 - \frac{5}{3}a^3x + \frac{2}{3}a^4}.$$

Enfin on peut admettre que la fraction rationnelle est de la forme

$$\frac{ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \cdots + px + q}{x^m + ex^{m-1} + \cdots + rx + s};$$

car si le degré du numérateur était inférieur de plusieurs unités à celui du dénominateur, il suffirait de rendre nuls quelques-uns des coefficients a, b, c.....

129. *Décomposition des fractions rationnelles.* — L'intégration des fractions rationnelles étant entièrement fondée sur la décomposition de ces fractions, nous nous occuperons d'abord de cette théorie.

Considérons la fraction rationnelle $\dfrac{ax^{m-1}+bx^{m-2}+\cdots\cdots+px+q}{x^m+ex^{m-1}\cdots\cdots+rx+s}$.

Représentons par $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ les racines de l'équation

$$x^m+ex^{m-1}+\cdots\cdots+rx+s=0.$$

Le théorème fondamental de la théorie des équations apprend que l'on a identiquement

$$x^m+ex^{m-1}\cdots\cdots+rx+s=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots$$

et la fraction rationnelle devient

$$\frac{ax^{m-1}+bx^{m-2}+\cdots\cdots+px+q}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots}.$$

Nous examinerons successivement : 1° le cas où toutes les racines α, β, γ sont réelles et inégales; 2° le cas où quelques-unes sont égales, et enfin 3° le cas où quelques racines sont imaginaires.

Si les racines sont réelles et inégales, la fraction rationnelle peut toujours être décomposée en fractions simples du premier degré, de manière que l'on ait

$$\frac{ax^{m-1}+bx^{m-2}+\cdots\cdots+px+q}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma}+\cdots\cdots(1)$$

$A, B, C \ldots\ldots$ étant des constantes à déterminer, c'est-à-dire qu'on peut toujours assigner à $A, B, C \ldots\ldots$ des valeurs constantes telles que le second membre soit égal au premier pour toute valeur de x; en effet, si on multiplie les deux membres de l'équation par le dénominateur du premier, il vient

$$ax^{m-1}+bx^{m-2}+\cdots\cdots+px+q=A(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots$$
$$+B(x-\alpha)(x-\gamma)\cdots\cdots+C(x-\alpha)(x-\beta)\ldots\ldots$$

et il est visible que si le dénominateur de la fraction rationnelle est du degré m en x, c'est-à-dire, s'il renferme un nombre m de facteurs $x-\alpha$, $x-\beta$, etc. les constantes A, B, C, etc., dans l'équation précédente, seront en nombre m et seront multipliées chacune par un

nombre $m-1$ de facteurs $x-\alpha$, $x-\beta$, etc.; par conséquent, en effectuant les multiplications du second membre, on obtiendra une fonction rationnelle du degré $m-1$. Cela posé, la possibilité d'effectuer la décomposition de la fraction rationnelle en fractions simples, dépend de la possibilité d'assigner à A, B, C..... des valeurs constantes qui rendent identiques les deux membres de cette égalité; or, si l'on effectue les multiplications, le second membre prend la forme

$$Mx^{m-1}+Nx^{m-2}+\cdots\cdots+Px+Q.$$

Les coefficients M, N..... P, Q....., outre les racines α, β, γ....., renferment les constantes inconnues A, B, C..... lesquelles restent évidemment à la première puissance et ne sont pas multipliées entre elles. Pour trouver les valeurs de A, B, C..... qui rendent identiques l'équation

$$ax^{m-1}+bx^{m-2}+\cdots\cdots px+q=Mx^{m-1}+Nx^{m-2}+\cdots\cdots+Px+Q$$

il suffit de poser les égalités

$$M=a,\quad N=b\ldots\ldots\quad P=p,\quad Q=q$$

dont le nombre est marqué par celui des coefficients a, b, c..... p, q, c'est-à-dire qu'il est égal à m. Ces équations étant en nombre m comme celui des inconnues, et du premier degré en A, B, C..... donnent pour ces quantités, des valeurs toujours réelles.

Prenons pour exemple $\frac{ax-b}{x^2-c^2}$. En égalant le dénominateur à zéro, pour avoir les racines, il vient

$$x^2-c^2=0,\quad \text{d'où}\quad x=\pm c;$$

les facteurs du premier degré du dénominateur sont donc $x-c$, $x+c$ et l'on fera

$$\frac{ax-b}{x^2-c^2}=\frac{ax-b}{(x-c)(x+c)}=\frac{A}{x-c}+\frac{B}{x+c}.$$

En réduisant au même dénominateur et égalant les numérateurs, il vient

$$ax-b=A(x+c)+B(x-c)=(A+B)x+Ac-Bc,$$

que l'on rend identique en posant

$$a = A + B, \quad -b = Ac - Bc,$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{ac - b}{2c}, \quad B = \frac{ac + b}{2c}.$$

On fera de même sur l'exemple suivant, les transformations indiquées :

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x} = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+3};$$

$$3x^2 - 2x + 1 = A(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) + B(x^3 + x^2 - 6x)$$

$$+ C(x^3 + 4x^2 + 3x) + D(x^3 - x^2 - 2x),$$

équation que l'on rend identique en posant

$$A + B + C + D = 0, \quad 2A + B + 4C - D = 3,$$

$$-5A - 6B + 3C - 2D = -2, \quad -6A = 1,$$

d'où l'on tire

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = 1, \quad C = \frac{3}{10}, \quad D = -\frac{17}{15}.$$

Les valeurs de ces constantes peuvent être obtenues d'une manière beaucoup plus expéditive. Si l'on représente par Fx et par fx les deux termes de la fraction rationnelle et qu'on multiplie par fx les deux membres de l'équation (1), il vient

$$Fx = A\frac{fx}{x - \alpha} + B\frac{fx}{x - \beta} + C\frac{fx}{x - \gamma} + \dots\dots$$

Cette équation devant exister quelle que soit la valeur de x, on pourra y faire successivement $x = \alpha$, $x = \beta$, etc. Pour $x = \alpha$, il vient

$$F\alpha = A\frac{f\alpha}{\alpha - \alpha} + B\frac{f\alpha}{\alpha - \beta} + C\frac{f\alpha}{\alpha - \gamma} + \dots\dots$$

et comme α est une racine du dénominateur de la fraction rationnelle, on doit avoir $f\alpha = 0$, ce qui fait disparaître tous les termes à l'exception du premier, qui se réduit à $\frac{0}{0}$. On obtient la vraie valeur de la fraction $A\dfrac{fx}{x-\alpha}$ en prenant les dérivées des deux termes, et il vient $Af'\alpha$, en représentant par $f'\alpha$ la dérivée de fx dans laquelle on remplace x par α; on a donc

$$F\alpha = Af'\alpha \quad \text{ou} \quad A = \frac{F\alpha}{f'\alpha}.$$

On trouve de même, en faisant $x = \beta$ et en observant que $f\beta = 0$,

$$B = \frac{F\beta}{f'\beta}.$$

130. *Cas des racines égales.* — Si parmi les racines α, β, γ..... du dénominateur il y en avait quelques unes d'égales entre elles, ce mode de décomposition ne serait plus possible; car en supposant $\alpha = \beta$ dans (1) du (N° 129), il vient

$$\frac{ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots\ldots + px + q}{(x-\alpha)^2(x-\gamma)\ldots\ldots} = \frac{A'}{x-\alpha} + \frac{C}{x-\gamma} + \ldots\ldots$$

la constante A' tenant lieu de $A + B$.

Or, en cherchant à déterminer les constantes A', C..... ainsi qu'on l'a fait au (N° 129), on obtiendrait encore un nombre m d'équations, tandis que celui des inconnues A', C..... serait réduit à $m - 1$. Cette impossibilité cesse si l'on effectue la décomposition de la fraction rationnelle de cette manière :

$$\frac{ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots\ldots + px + q}{(x-\alpha)^2(x-\gamma)(x-\varepsilon)\ldots\ldots} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{C}{x-\gamma} + \frac{D}{x-\varepsilon}\ldots\ldots;$$

car on pourra faire tous les calculs indiqués pour le cas des racines inégales et l'on obtiendra pour déterminer A, B, C..... un nombre d'équations égal à celui de ces inconnues.

Prenons pour exemple $\dfrac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x}$, dont le dénominateur a pour racines $x = 0$, $x = -1$ deux fois, $x = 1$ deux fois. On posera

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1},$$

d'où, en réduisant au même dénominateur et égalant les numérateurs,

$$x^3 + x^2 + 2 = A(x-1)^2(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + Cx(x-1)^2(x+1)^2$$
$$+ Dx(x-1)^2 + Ex(x-1)^2(x+1),$$

équation qu'on rend identique en égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. Résolvant ensuite ces équations par rapport à A, B, C....., on trouve

$$A = 2,\quad B = 1,\quad C = -\frac{3}{4},\quad D = -\frac{1}{2},\quad E = -\frac{5}{4}.$$

S'il y avait un nombre r de racines égales, on ferait

$$\frac{ax^{m-1} + bx^{m-2}.....+ px + q}{(x-\alpha)^r(x-\beta)(x-\gamma).....} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{B}{(x-\alpha)^{r-1}}.....$$
$$+ \frac{E}{x-\alpha} + \frac{F}{x-\beta} + \frac{G}{x-\gamma}.....,$$

et s'il y avait plusieurs groupes de racines égales, la décomposition se ferait de cette manière :

$$\frac{ax^{m-1} + b^{m-2}.....+ px + q}{(x-\alpha)^r(x-\beta)^s(x-\gamma).....} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{B}{(x-\alpha)^{r-1}}..... + \frac{E}{x-\alpha}$$
$$+ \frac{F}{(x-\beta)^s} + \frac{G}{(x-\beta)^{s-1}}..... + \frac{K}{x-\beta} + \frac{L}{x-\gamma}.....$$

Par exemple pour $\dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+1)}$, on posera

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{(x-1)^3(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$
$$+ \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{E}{x+2} + \frac{F}{x+1}.$$

On peut aussi, en employant le calcul différentiel, arriver aux valeurs de ces constantes inconnues, d'une manière souvent plus expéditive. Représentons encore par Fx et fx les deux termes de la fraction

rationnelle et par $\alpha, \beta, \gamma\ldots..$ les racines du dénominateur. Supposons que α soit r fois racine de $fx = 0$, de sorte que

$$fx = (x-\alpha)^r (x-\beta)(x-\gamma)\cdots\cdots = (x-\alpha)^r \varphi x;$$

φx ne renfermera plus de racines égales à α et l'on aura

$$\frac{Fx}{(x-\alpha)^r \varphi x} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{B}{(x-\alpha)^{r-1}} + \frac{C}{(x-\alpha)^{r-2}}\cdots\cdots + \frac{E}{x-\alpha}$$
$$+ \frac{F}{x-\beta} + \frac{G}{x-\gamma},$$

d'où

$$\frac{Fx}{\varphi x} = A + B(x-\alpha) + C(x-\alpha)^2 \cdots\cdots + E(x-\alpha)^{r-1}$$
$$+ \frac{F(x-\alpha)^r}{x-\beta} + \frac{G(x-\alpha)^r}{x-\gamma}\cdots\cdots$$

Représentons $\frac{Fx}{\varphi x}$ par ψx; il vient en dérivant l'équation précédente,

$$\frac{d\psi x}{dx} \quad \text{ou} \quad \psi' x = B + 2C(x-\alpha)\cdots\cdots + (r-1)E(x-\alpha)^{r-2} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^2\psi x}{dx^2} \quad \text{ou} \quad \psi'' x = 2C + \cdots\cdots + (r-1)(r-2)E(x-\alpha)^{r-3} + \text{etc.}$$

. . . .

$$\frac{d^{r-1}\psi x}{dx^{r-1}} \quad \text{ou} \quad \psi^{r-1} x = (r-1)(r-2)(r-3)\ldots..3.2.1E + \text{etc.}$$

puis faisant $x = \alpha$ dans ces équations et observant que tous les termes, les premiers exceptés, conservent le facteur $x - \alpha$ et disparaissent par conséquent quand $x = \alpha$, il vient

$$A = \frac{F\alpha}{\varphi\alpha} = \psi\alpha, \quad B = \psi'\alpha, \quad C = \frac{\psi''\alpha}{1.2}\cdots\cdots, E = \frac{\psi^{(r-1)}\alpha}{1.2.3\ldots.(r-1)}.$$

Quant aux constantes F, G, H...... qui se rapportent aux autres racines, on les déterminera comme plus haut, c'est-à-dire qu'on posera

$$F = \frac{F\beta}{f'\beta}, \quad G = \frac{F\gamma}{f'\gamma}, \quad \text{etc.}$$

131. *Cas des racines imaginaires.* — Supposons enfin que parmi les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... du dénominateur de la fraction rationnelle, il se trouve des racines imaginaires; on pourrait encore poser

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} + \frac{D}{x-\delta} + \text{etc.}$$

et déterminer A, B, C, D.... par les méthodes précédentes; mais les équations qui doivent servir à déterminer ces valeurs, renfermant les imaginaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., conduiraient à des expressions imaginaires pour ces coefficients. On peut éviter cet inconvénient en observant qu'il résulte de la théorie des équations : 1° que la racine imaginaire α doit avoir la forme $a + b\sqrt{-1}$, 2° que si $a + b\sqrt{-1}$ est une racine de fx, $a - b\sqrt{-1}$ est nécessairement une deuxième racine; d'où il résulte que fx sera généralement décomposable en facteurs du premier degré de la forme

$$(x-a-b\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})(x-a'-b'\sqrt{-1})(x-a'+b'\sqrt{-1})\ldots$$
$$(x-\varepsilon)(x-\zeta)\ldots$$

ε, ζ.... étant des racines réelles; ou bien, en observant que

$$[(x-a)-b\sqrt{-1}][(x-a)+b\sqrt{-1}] = (x-a)^2 + b^2,$$

fx pourra être décomposé ainsi

$$fx = [(x-a)^2 + b^2][(x-a')^2 + b'^2]\ldots.(x-\varepsilon)(x-\zeta)\ldots..$$

qui ne renferme plus de traces d'imaginaires et dans laquelle les facteurs du premier degré correspondent aux racines réelles, et les facteurs du second degré, aux différents couples de racines imaginaires conjuguées. Cela posé, on décomposera $\frac{Fx}{fx}$ de la manière suivante :

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2} + \frac{A'x+B'}{(x-a')^2+b'^2} + \ldots.. + \frac{C}{x-\varepsilon} + \frac{D}{x-\zeta} + \ldots..$$

La possibilité d'une semblable décomposition résulte de ce que les coefficients A, B, A', B',.... sont visiblement en nombre m et qu'on peut, en suivant la marche indiquée précédemment (N° 129), trouver pour ces coefficients des valeurs constantes.

132. *Cas des racines imaginaires égales.* — Si fx renfermait des racines imaginaires égales, si, par exemple, on avait $a = a'$, $b = b'$, la décomposition précédente devrait être modifiée, car il viendrait sans cela,

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{(A + A')x + B + B'}{(x-a)^2 + b^2} + \cdots\cdots + \frac{C}{x-\varepsilon} + \frac{D}{x+\zeta},$$

ou bien, en observant que $A + A'$ et $B + B'$ forment deux constantes A'' et B'',

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{A''x + B''}{(x-a)^2 + b^2} + \cdots\cdots \frac{C}{x-\varepsilon} + \frac{D}{x-\zeta} + \cdots\cdots$$

et le nombre des coefficients indéterminés A'', B'',..... C, D n'étant plus égal au degré m du dénominateur, on ne pourrait plus déterminer leur valeur comme on l'a fait au N° 129. L'analogie conduit dans ce cas à un mode de décomposition semblable à celui adopté pour le cas des racines réelles égales. Supposons que le facteur du second degré $(x-a)^2 + b^2$ soit contenu r fois dans fx ; on fera

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{Ax + B}{[(x-a)^2 + b^2]^r} + \frac{A'x + B'}{[(x-a)^2 + b^2]^{r-1}} \cdots\cdots + \frac{A''x + B''}{(x-a)^2 + b^2}$$
$$+ \frac{C}{x-\varepsilon} + \frac{D}{x-\zeta},$$

où le nombre de coefficients A, B, A', B'..... est visiblement égal à celui des racines de fx. Pour déterminer ces coefficients, on multiplie les deux membres par fx ou

$$[(x-a)^2 + b^2]^n \ldots\ldots (x-\varepsilon)(x-\zeta) \ldots\ldots,$$

et il vient

$$Fx = (Ax + B)(x-\varepsilon)(x- \quad) \ldots\ldots$$
$$+ (A'x + B')[(x-a)^2 + b^2](x-\varepsilon)(x-\zeta) + \cdots\cdots$$

dont les deux membres devront être rendus identiques, comme au N° 129.

Prenons pour exemple $\dfrac{x^3 - 1}{x^5 - 2x^4 + 8x^2 - 12x + 8}$, dont le dénomi-

nateur a pour racines -2, $1+\sqrt{-1}$, $1-\sqrt{-1}$, $1+\sqrt{-1}$ et $1-\sqrt{-1}$. On a

$$x^5-2x^4+8x^2-12x+8$$
$$=(x-1-\sqrt{-1})(x-1+\sqrt{-1})(x-1-\sqrt{-1})(x-1+\sqrt{-1})(x+2)$$
$$=[(x-1)^2+1]^2(x+2)=(x^2-2x+2)^2(x+2)$$

et

$$\frac{x^3-1}{x^5-2x^4+8x^2-12x+8}=\frac{Ax+B}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{A'x+B'}{x^2-2x+2}+\frac{C}{x+2},$$

d'où l'on tire, en rendant les deux membres identiques,

$$A=\frac{90}{100},\quad B=-\frac{160}{100},\quad A'=\frac{9}{100},\quad B'=\frac{64}{100},\quad C=-\frac{9}{100}.$$

Observons que si l'on peut décomposer les fractions rationnelles par plusieurs procédés, on doit cependant arriver au même résultat, quelle que soit la marche suivie; car si l'on avait

$$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma}+\text{etc.}=\frac{A'}{x-\alpha'}+\frac{B'}{x-\beta'}+\frac{C'}{x-\gamma'}+\text{etc.},$$

comme le premier membre devient infini pour $x=\alpha$, il faut que l'un des termes du second membre devienne aussi infini, ce qui exige que α', par exemple, soit égal à α. En multipliant ensuite les deux membres par $x-\alpha$, il vient

$$A+B\frac{x-\alpha}{x-\beta}+C\frac{x-\alpha}{x-\gamma}+\text{etc.}=A'+B'\frac{x-\alpha}{x-\beta'}+C'\frac{x-\alpha}{x-\gamma'}+\text{etc.}$$

qui se réduit, pour $x=\alpha$, à $A=A'$, et ainsi de suite.

155. *Intégration des fractions rationnelles.* — Revenons à l'intégration des différentielles algébriques et rationnelles. Il est évident qu'après avoir effectué les décompositions indiquées dans les articles précédents, on n'aura plus qu'à intégrer des différentielles de la forme

$$\frac{Adx}{x-\alpha},\quad \frac{Adx}{(x-\alpha)^r},\quad \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2},\quad \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r}.$$

La première intégrale se trouve immédiatement; elle est $A\log(x-\alpha)$. Pour obtenir la seconde, on fera

$$x-\alpha=z, \quad \text{d'où} \quad dx=dz,$$

et il viendra

$$\int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)^r}=A\int\frac{dz}{z^r}=\frac{Az^{-r+1}}{-r+1}=\frac{A(x-\alpha)^{-r+1}}{-r+1}.$$

La troisième s'obtient de même en faisant

$$x-\alpha=z, \quad dx=dz,$$

d'où

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\int\frac{Az+A\alpha+B}{z^2+\beta^2}dz=A\int\frac{z\,dz}{z^2+\beta^2}+(A\alpha+B)\int\frac{dz}{z^2+\beta^2}$$

$$=\frac{A}{2}\log(z^2+\beta^2)+\left(\frac{A\alpha+B}{\beta}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{\beta}=\frac{A}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$

$$+\frac{A\alpha+B}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Enfin la quatrième intégrale peut être transformée de la manière suivante :

$$\int\frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r}dx=\int\frac{Az+A\alpha+B}{(z^2+\beta^2)^r}dz=\frac{A}{2}\int\frac{2z\,dz}{(z^2+\beta^2)^r}$$

$$+(A\alpha+B)\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^r}=\frac{A}{2}\,\frac{(z^2+\beta^2)^{-r+1}}{-r+1}+\frac{A\alpha+B}{\beta^{2r-1}}\int\frac{\frac{dz}{\beta}}{\left(\frac{z^2}{\beta^2}+1\right)^r}$$

$$=\frac{A}{2}\,\frac{(z^2+\beta^2)^{-r+1}}{-r+1}+\frac{A\alpha+B}{\beta^{2r-1}}\int\frac{dz'}{(z'^2+1)^r}.$$

Pour obtenir cette dernière intégrale, observons que

$$\int\frac{dz'}{(z'^2+1)^r}=\int\frac{1+z'^2-z'^2}{(z'^2+1)^r}dz'=\int\frac{dz'}{(z'^2+1)^{r-1}}-\int\frac{z'^2dz'}{(z'^2+1)^r};$$

mais en intégrant par parties, il vient

$$\int \frac{z'^2 dz'}{(z'^2+1)^r} = \int z' \frac{z' dz'}{(z'^2+1)^r} = -\frac{1}{2(r-1)} \frac{z'}{(z'^2+1)^{r-1}} + \frac{1}{2(r-1)} \int \frac{dz'}{(z'^2+1)^{r-1}};$$

et en substituant dans la précédente, celle-ci devient

$$\int \frac{dz'}{(z'^2+1)^r} = \frac{1}{2(r-1)} \frac{z'}{(z'^2+1)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2(r-1)} \int \frac{dz'}{(z'^2+1)^{r-1}},$$

qui fait dépendre la première intégrale d'une autre toute semblable, mais dans laquelle r est remplacé par $r-1$. Le nombre r étant quelconque mais entier, peut être remplacé successivement par $r-1$, $r-2$, $r-3$, etc., et il vient

$$\int \frac{dz'}{(z'^2+1)^{r-1}} = \frac{1}{2(r-2)} \frac{z'}{(z'^2+1)^{r-2}} + \frac{2r-5}{2(r-2)} \int \frac{dz'}{(z'^2+1)^{r-2}},$$

$$\int \frac{dz'}{(z'^2+1)^{r-2}} = \frac{1}{2(r-3)} \frac{z'}{(z'^2+1)^{r-3}} + \frac{2r-7}{2(r-3)} \int \frac{dz'}{(z'^2+1)^{r-3}}$$

et comme r, nombre entier et positif, diminue d'une unité à chaque opération, on sera nécessairement conduit à l'intégrale $\int \frac{dz'}{z'^2+1}$ qui est connue et égale à arc tang z'.

La théorie des fractions rationnelles conduit sans peine aux intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{C(a+x)}{a-x}, \quad \int \frac{(2-4x)\,dx}{x^2-x-2} = \log \frac{C}{(x^2-x-2)^2},$$

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}\,dx = \frac{1}{4} \log \frac{Cx^8}{(x^2-1)^5(x+1)^2} - \frac{x+3}{2(x^2-1)},$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+1)^2(x-1)}\,dx = \frac{3x^2-x+4}{4x(x^2+1)} + \frac{1}{8} \log \frac{C(x^2+1)^5(x-1)^6}{x^{16}}.$$

134. *Intégration des fonctions algébriques irrationnelles.* — Pour intégrer des fonctions algébriques qui renferment des radicaux, le

moyen le plus simple consiste à les transformer en d'autres qui soient débarrassées de ces radicaux et qui puissent par conséquent être intégrées par la méthode des fractions rationnelles. Ces transformations sont toujours possibles, lorsque les quantités placées sous les radicaux sont toutes monômes; ainsi $\frac{a\sqrt[3]{x^2} - b\sqrt[4]{x^5}}{c\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2} + cx^2}dx$ devient rationnel en faisant $x = z^n$, pourvu que l'on prenne pour n un nombre tel que l'on puisse extraire de z^n la racine carrée, la racine cubique et la racine quatrième; on fera à cet effet n égal à 3.4 ou 12, et la transformée devient

$$\frac{az^8 - bz^{15}}{cz^{18}z^8 + ez^{24}} 12z^{11}dz = 12\frac{a - bz^7}{cz^7 + ez^5}dz.$$

Après avoir intégré par la méthode des fractions rationnelles, on remplacera z par $\sqrt[12]{x}$.

Lorsque les radicaux affectent des polynômes, ces transformations ne sont plus possibles en général; cependant on parvient encore à rendre rationnelle toute différentielle qui renferme une ou plusieurs fois le radical $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$. Pour le faire voir, nous distinguerons deux cas, celui où A est positif et celui où il est négatif.

Remarquons d'abord que puisque

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = \sqrt{A}\sqrt{x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}}$$

et

$$\sqrt{C + Bx - Ax^2} = \sqrt{A}\sqrt{\frac{C}{A} + \frac{B}{A}x - x^2},$$

il suffira de considérer les radicaux de la forme $\sqrt{c + bx + x^2}$ et $\sqrt{c + bx - x^2}$.

1er cas. Faisons

$$\sqrt{c + bx + x^2} = z + x,$$

z étant la nouvelle variable que l'on substitue à x. On tire de là, en élevant au carré,

$$bx + c = z^2 + 2xz, \quad x = \frac{z^2 - c}{b - 2z} \quad \text{d'où} \quad dx = 2\frac{bz - z^2 - c}{(b - 2z)^2}dz;$$

or la différentielle proposée renfermera en général : 1° des termes rationnels en x auxquels on substituera sa valeur rationnelle $\frac{z^2 - c}{b - 2z}$; 2° le radical $\sqrt{x^2 + bx + c}$ que l'on remplacera par sa valeur

$$z + x = z + \frac{z^2 - c}{b - 2z} = \frac{bz - z^2 - c}{b - 2z}$$

qui est aussi rationnelle; et 3° la différentielle dx qui sera remplacée par $2\frac{bz - z^2 - c}{(b - 2z)^2}dz$, qui est rationnelle en z. La transformée sera donc rationnelle, et après avoir intégré, on substituera à z sa valeur $\sqrt{x^2 + bx + c} - x$.

Prenons pour exemple $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + bx + c}}$; on trouve pour transformée, $\frac{2dz}{b - 2z}$ qui a pour intégrale

$$-\log(b - 2z) = -\log(b - 2\sqrt{x^2 + bx + c} + 2x).$$

On trouve de même

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + bx + c}}{x^3}dx = 2\int \frac{(bz - z^2 - c)^2}{(z^2 - c)^3}dz,$$

que l'on intégrera par la méthode des fractions rationnelles.

2° cas. Soient a et a' les deux racines de l'équation

$$x^2 - bx - c = 0,$$

et par conséquent supposons que l'on ait

$$\sqrt{c + bx - x^2} = \sqrt{(x - a)(a' - x)}.$$

Faisons

$$\sqrt{(x - a)(a' - x)} = z(a' - x);$$

d'où l'on tire, en élevant au carré et différenciant ensuite,

$$x = \frac{a + a'z^2}{1 + z^2}, \quad dx = \frac{2(a' - a)zdz}{(1 + z^2)^2}.$$

Si l'on remplace dans la différentielle proposée, x par $\frac{a + a'z^2}{1 + z^2}$, dx par $\frac{2(a' - a)zdz}{(1 + z^2)^2}$ et $\sqrt{c + bx - x^2}$ par sa valeur, savoir :

$$z(a' - x) = z\left(a' - \frac{a + a'z^2}{1 + z^2}\right) = z\frac{a' - a}{1 + z^2},$$

cette différentielle deviendra rationnelle en z, et après l'intégration il faudra remettre pour z sa valeur

$$\frac{\sqrt{c + bx - x^2}}{a' - x} = \sqrt{\frac{x - a}{a' - x}}.$$

C'est ainsi que l'on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c + bx - x^2}} = \int \frac{2dz}{1 + z^2} = 2 \operatorname{arc tang} z + C = 2 \operatorname{arc tang} \sqrt{\frac{x - a}{a' - x}} + C$$

dans laquelle $a = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$ et $a' = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$.

On intègrera de cette manière la différentielle $\frac{dx}{a^2 - \sin^2 x}$ qui devient algébrique et irrationnelle en remplaçant $\sin x$ par une variable z. On trouve ainsi, en remplaçant a par $\sin \varepsilon$ (ce qui suppose a plus petit que l'unité)

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 x} = \log\left(\frac{\sin(x + \varepsilon)}{\sin(x - \varepsilon)}\right)^{\frac{1}{\sin 2\varepsilon}} + C = \log\left(A^2 \frac{\sin^2(x + \varepsilon)}{\sin^2(x - \varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2\sin 2\varepsilon}}.$$

Quand a est plus grand que l'unité, on posera $a = \frac{1}{\sin \varepsilon}$ et l'intégrale devient

$$\sin^2 \varepsilon \int \frac{dx}{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 x} = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos \varepsilon} \operatorname{arc cot} \frac{\cot x}{\cos \varepsilon} + C.$$

On trouve de la même manière, si a est plus grand que b,

$$\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc cos} \frac{b + a \sin x}{a + b \sin x} + C.$$

Si au contraire, b est plus grand que a, il vient en remplaçant $\frac{a}{b}$ par $\sin \varepsilon$,

$$\frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sin \varepsilon + \sin x} = \log \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon + x)}{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon - x)}\right)^{\frac{1}{b \cos \varepsilon}} + C = \log A^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{1}{2}(x+\varepsilon)}{\cos^2 \frac{1}{2}(x-\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2b\cos\varepsilon}}.$$

Enfin pour intégrer $\frac{dx}{1 + a\cos x + b \sin x}$, on pose $x = y - \text{arc tang}\,\frac{a}{b}$, ce qui transforme la différentielle dans la suivante

$$\frac{dy}{1 + \sqrt{a^2 + b^2}\sin y}$$

dont l'intégration rentre dans l'une de celles dont on vient de s'occuper.

133. *Intégration des différentielles binômes.* — Les fonctions irrationnelles qui renferment des radicaux du second degré et que nous venons de considérer, sont les seules qui peuvent s'intégrer d'une manière générale; cependant nous nous occuperons encore d'une classe assez nombreuse de fonctions irrationnelles que l'on rencontre fréquemment dans les applications du calcul intégral, et qu'on peut souvent, par des transformations, débarrasser de ses radicaux, ou du moins ramener à une forme plus simple. La forme de ces différentielles est la suivante : $x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}dx$ qui revient à $x^m\sqrt[q]{(a+bx^n)^p}\,dx$ et qui est connue sous le nom de *différentielle binôme*. Les exposants m et n peuvent toujours être rendus entiers, car s'ils avaient la forme $x^{\frac{m}{m'}}(a + bx^{\frac{n}{n'}})^{\frac{p}{q}}dx$, en faisant $x = y^{m'n'}$, on trouverait la transformée $m'n'y^{mn'+m'n'-1}(a + by^{m'n})^{\frac{p}{q}}dy$, dans laquelle les exposants qui remplacent $\frac{m}{m'}$ et $\frac{n}{n'}$ sont des nombres entiers. On peut aussi faire en sorte que n soit positif; car s'il ne l'était pas et qu'il fût remplacé par $-n$, on ferait subir à la différentielle les transformations suivantes :

$$x^m(a + bx^{-n})^{\frac{p}{q}}dx = x^m\left(a + \frac{b}{x^n}\right)^{\frac{p}{q}}dx = x^m\frac{(b + ax^n)^{\frac{p}{q}}}{x^{\frac{np}{q}}}dx$$

$$= x^{m - \frac{np}{q}}(b + ax^n)^{\frac{p}{q}}dx.$$

L'exposant n est rendu, de cette manière, positif. Il est vrai que l'exposant $m-\frac{np}{q}$ devient, en général, fractionnaire; mais par la première transformation, c'est-à-dire, en remplaçant x par y^q, on pourra rendre cet exposant entier. Cela posé, proposons-nous de chercher les conditions sous lesquelles cette fonction peut être rendue rationnelle et est par conséquent intégrable. Faisons

$$a+bx^n=y^q;$$

on trouve, toutes réductions faites, en remplaçant x par sa valeur en y,

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx=-\frac{q}{nb^{\frac{m+1}{n}}}y^{p+q-1}(y^q-a)^{\frac{m+1}{n}-1}dy,$$

expression qui est évidemment rationnelle quels que soient les signes de m et de n, si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier, positif ou négatif; car il n'y aura plus d'exposant fractionnaire et par conséquent de radicaux. Les différentielles suivantes :

$$x^5\sqrt[3]{(a-bx^2)^2}\,dx,\quad x^2\sqrt[5]{a+bx^3}\,dx,\quad \frac{\sqrt[4]{a+bx^2}}{x^3}dx$$

sont donc susceptibles de transformations qui les rendront rationnelles. Par exemple, pour intégrer $\frac{\sqrt[4]{a+bx^2}}{x^3}dx$, on fera

$$a+bx^2=y^4$$

et l'on trouvera, en substituant,

$$\frac{\sqrt[4]{a+bx^2}}{x^3}dx=2b\frac{y^4dy}{(y^4-a)^2}$$

que l'on intègrera par la méthode des fractions rationnelles.

On trouve une autre condition d'intégrabilité, en remarquant que l'on a

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx=x^m\left\{\left(\frac{a}{x^n}+b\right)x^n\right\}^{\frac{p}{q}}dx=x^{m+\frac{np}{q}}(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}dx,$$

et que d'après la condition d'intégrabilité précédente, cette dernière expression peut être rendue rationnelle si $\dfrac{m+\dfrac{np}{q}+1}{-n}$ est un nombre entier positif ou négatif; ce qui aura lieu si les fractions $\dfrac{m+1}{n}$ et $\dfrac{p}{q}$ réunies forment un nombre entier. On pourra donc rendre rationnelles les différentielles

$$x\sqrt[3]{a-bx^3}\,dx,\quad \sqrt{(a+bx^2)^3}\,dx,\quad x^4\sqrt[3]{a+bx^3}\,dx.$$

Par exemple, mettons la première sous la forme

$$x\sqrt[3]{x^3\left(\frac{a}{x^3}-b\right)}\,dx = x^2\sqrt[3]{-b+ax^{-3}}\,dx,$$

puis faisons

$$-b+ax^{-3}=y^3;$$

on trouvera

$$x\sqrt[3]{a-bx^3}\,dx = -a\frac{y^3dy}{(y^3+b)^2},$$

que l'on intégrera ensuite par les méthodes connues.

136. *Formules de réduction des différentielles binômes.* — On peut aussi faire dépendre l'intégration de $x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx$ de l'intégration d'une différentielle de même forme, mais dans laquelle l'exposant m ou l'exposant $\frac{p}{q}$ est rendu plus petit. Les formules auxquelles nous allons être conduits, sont connues pour ce motif sous le nom de *formules de réduction des différentielles binômes*.

Proposons-nous d'abord de faire diminuer l'exposant m; pour cela intégrons par parties la différentielle binôme; en faisant

$$u = x^{m-n+1}\quad \text{et}\quad dv = x^{n-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx$$

et en remarquant que

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

il vient

$$\int x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx \text{ ou } \int x^{m-n+1} x^{n-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = x^{m-n+1} \frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{nb\left(\frac{p}{q}+1\right)}$$

$$-\int \frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{nb\left(\frac{p}{q}+1\right)} (m-n+1)\, x^{m-n}\, dx = \frac{x^{m-n+1}}{nb\left(\frac{p}{q}+1\right)} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$

$$-\frac{m-n+1}{nb\left(\frac{p}{q}+1\right)} \int x^{m-n} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} dx;$$

mais on a évidemment

$$\int x^{m-n} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1} dx = \int x^{m-n} (a+bx^n)(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$$

$$= a\int x^{m-n} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx + b\int x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx;$$

l'équation précédente devient donc par la substitution,

$$\int x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = \frac{x^{m-n+1}}{nb\left(\frac{p}{q}+1\right)} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$

$$-a\frac{m-n+1}{nb\left(\frac{p}{q}+1\right)} \int x^{m-n} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx - \frac{m-n+1}{n\left(\frac{p}{q}+1\right)} \int x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx,$$

d'où l'on tire enfin en réunissant les intégrales semblables,

$$\int x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = \frac{x^{m-n+1}}{b\left(m+n\frac{p}{q}+1\right)} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$

$$-\frac{a}{b} \frac{m-n+1}{\left(m+n\frac{p}{q}+1\right)} \int x^{m-n} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx \ldots\ldots (1)$$

Cette équation fait dépendre l'intégration de $x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx$, de l'intégration d'une différentielle binôme semblable, mais dans laquelle l'exposant m est diminué de n. Si m étant positif, contenait plusieurs fois le nombre n, on pourrait faire diminuer encore l'exposant $m-n$ d'un nombre n d'unités; en effet, changeons m en $m-n$ dans la formule (1), elle devient

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx = \frac{x^{m-2n+1}}{b\left(m-n+n\frac{p}{q}+1\right)}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$

$$-\frac{a}{b}\,\frac{m-2n+1}{m-n+n\frac{p}{q}+1}\int x^{m-2n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx,$$

et en substituant, on trouve

$$\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx = \frac{x^{m-n+1}}{b\left(m+n\frac{p}{q}+1\right)}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$

$$-\frac{a}{b^2}\,\frac{m-n+1}{m+n\frac{p}{q}+1}\;\frac{x^{m-2n+1}}{m-n+n\frac{p}{q}+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$

$$+\frac{a^2}{b^2}\,\frac{m-n+1}{m+n\frac{p}{q}+1}\;\frac{m-2n+1}{m-n+n\frac{p}{q}+1}\int x^{m-2n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx.$$

Il est évident que l'on pourra, de cette manière, diminuer l'exposant m jusqu'à ce qu'il devienne plus petit que n.

Si l'exposant m était négatif, l'équation (1) ne serait plus une formule de réduction, puisqu'elle fait dépendre l'intégration de la différentielle $x^{-m}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx$, de l'intégration de $x^{-m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx$ dans laquelle l'exposant négatif $-m$ devient $-m-n$ ou $-(m+n)$ et se trouve par conséquent augmenté numériquement de valeur. Dans

ce cas, si l'on tire de (1) la valeur de l'intégrale du second membre, il vient, en écrivant $-m$ au lieu de m,

$$\int x^{-m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx = \frac{x^{-m-n+1}}{a(-m-n+1)}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$

$$-\frac{b}{a}\,\frac{-m+n\frac{p}{q}+1}{-m-n+1}\int x^{-m}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx,$$

ou bien, en faisant $m+n=m'$ ou $m=m'-n$,

$$\int x^{-m'}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx = \frac{x^{-m'+1}}{a(-m'+1)}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}$$

$$-\frac{b}{a}\,\frac{-m'+n+n\frac{p}{q}+1}{-m'+1}\int x^{-m'+n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx \ldots\ldots (2)$$

dans laquelle l'exposant $-m'+n$ du second membre est numériquement plus petit que l'exposant $-m'$ du premier membre.

Si m' contenait plusieurs fois le nombre n, on pourrait, par un moyen semblable à celui employé plus haut, faire diminuer de nouveau l'exposant d'une quantité n jusqu'à ce que cet exposant devienne numériquement inférieur à n.

On peut aussi réduire l'exposant $\frac{p}{q}$ qui affecte le binôme $a+bx^n$; en effet, si l'on intègre par parties la différentielle binôme, en faisant

$$x^m dx = dv \quad \text{et} \quad (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = u,$$

il vient

$$\int (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} - \frac{p}{q}\,\frac{nb}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}dx;$$

mais si dans la formule (1) on change m en $m+n$ et $\frac{p}{q}$ en $\frac{p}{q}-1$,

il vient

$$\int x^{m+n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{b\left(m+n\frac{p}{q}+1\right)}$$

$$-\frac{a}{b}\,\frac{m+1}{m+n\frac{p}{q}+1}\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}dx\,;$$

l'équation précédente devient donc par la substitution,

$$\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx = \frac{x^{m+1}}{m+n\frac{p}{q}+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

$$+\frac{nap}{q\left(m+n\frac{p}{q}+1\right)}\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}dx \ldots\ldots (5)$$

au moyen de laquelle, l'intégration de $x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx$ est ramenée à l'intégration d'une différentielle toute semblable, mais dans laquelle l'exposant $\frac{p}{q}$ est diminué d'une unité.

En y changeant $\frac{p}{q}$ en $\frac{p}{q}-1$, l'intégrale de son second membre dépendra d'une nouvelle intégrale dans laquelle l'exposant du binôme $a+bx^n$ sera $\frac{p}{q}-2$. On parviendra de cette manière à une dernière intégrale dans laquelle l'exposant sera compris entre 0 et l'unité.

Si l'exposant $\frac{p}{q}$ était négatif, la formule (5) devrait être modifiée; car l'exposant $-\frac{p}{q}-1$ serait numériquement plus grand que $-\frac{p}{q}$. Tirons en la valeur de l'intégrale du second membre et chan-

geons $\frac{p}{q}-1$ en $-\frac{p}{q}$ et par conséquent $\frac{p}{q}$ en $-\frac{p}{q}+1$, on aura

$$\int x^m(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}}dx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}+1}}{an\left(\frac{p}{q}-1\right)}-\frac{m-n\frac{p}{q}+n+1}{an\left(\frac{p}{q}-1\right)}\int x^m(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}+1}dx$$

dans laquelle l'exposant $-\frac{p}{q}+1$ de l'intégrale du second membre sera numériquement moindre que l'exposant $-\frac{p}{q}$ du premier.

En changeant $-\frac{p}{q}$ en $-\frac{p}{q}+1$ dans la formule précédente, on fera encore baisser numériquement d'une unité l'exposant de la parenthèse que l'on réduira de cette manière jusqu'à ce qu'il soit compris entre 0 et -1.

Appliquons la formule (1) à l'intégration de $\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ou $x^m(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$, m étant entier et positif.

On trouve en changeant successivement m en $m-2$, $m-4$, $m-6$ etc.

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-3}\sqrt{1-x^2}}{m-2}+\frac{m-3}{m-2}\int\frac{x^{m-4}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^{m-4}dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-5}\sqrt{1-x^2}}{m-4}+\frac{m-5}{m-4}\int\frac{x^{m-6}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et ainsi de suite. L'exposant m de x étant successivement diminué de 2, 4, 6..... unités, il est évident que l'on finira par arriver à l'une ou l'autre des deux intégrales $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, selon que m

sera un nombre impair ou un nombre pair. Dans le second cas on trouve par des substitutions successives :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left\{x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5}\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 2}x\right\} + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3.1}{m(m-2)(m-4)(m-6)\ldots 2}\operatorname{arc}\sin x + C.$$

Si m était impair, il viendrait

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left\{x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5}\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots\ldots 2}{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots\ldots 1}\right\} + C.$$

Ces deux formules servent à trouver les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + C, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc}\sin x + C,$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc}\sin x + C,$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^4}{5} + \frac{4}{15}x^2 + \frac{8}{15}\right)\sqrt{1-x^2} + C.$$

Si m était négatif, on emploierait la formule (2) qui donne

$$\int \frac{x^{-m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}\,x^{-m+1}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{-m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^{-m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}\,x^{-m+3}}{m-3} + \frac{m-4}{m-3}\int \frac{x^{-m+4}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^{-m+4}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}\,x^{-m+5}}{m-5} + \frac{m-6}{m-5}\int \frac{x^{-m+6}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et ainsi de suite. L'intégration de $\frac{x^{-m}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est ainsi ramenée à l'intégration de l'une ou l'autre des différentielles $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ou $\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, selon que m est un nombre pair ou impair. La première intégrale est arc sin x; quant à la seconde, on l'obtient en rendant la différentielle rationnelle par la méthode exposée au N° 134. On trouve pour cette intégrale, $\log \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$.

137. *Intégration par les séries.* — Lorsque les méthodes d'intégration sont impuissantes pour faire connaître l'intégrale d'une différentielle donnée, on est obligé de se borner à en chercher une valeur approchée; pour cela on fait en sorte d'avoir cette intégrale exprimée en série assez convergente pour qu'un certain nombre des premiers termes en représentent la valeur d'une manière approchée. Si la série n'était pas convergente, il est clair qu'elle serait impropre à cet usage. Il y a plusieurs moyens de développer une intégrale en série. La formule de Maclaurin y conduit d'une manière fort simple; en effet, on sait que l'on a

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\varphi''(a) + \text{etc.},$$

a étant une constante quelconque dont on peut disposer pour rendre cette série convergente, et φ', φ'' etc., les dérivées de la fonction φ. Si donc on représente par $\varphi(x)$ l'intégrale d'une différentielle donnée Xdx, on aura en dérivant

$$\varphi'(x) = X.$$

On tire de là les valeurs de $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$ etc., que l'on substituera dans la formule précédente où tous les termes seront connus à l'exception

du premier φa qui tiendra lieu de la constante arbitraire C. Il est à remarquer que a ne peut être considéré comme une seconde constante arbitraire entrant dans l'expression de l'intégrale, car si on développait en séries les fonctions $\varphi' a$, $\varphi'' a$.... ainsi que les binômes $(x-a)^2$, $(x-a)^3$..... la lettre a disparaîtrait de l'équation, comme il est facile de s'en assurer.

158. On peut aussi déduire de la formule de Taylor une autre expression de l'intégrale $\int X dx$, car on a

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et si l'on fait $h = -x$, en remarquant que $f(x-x) = fo$ se réduit à une constante C, il viendra

$$y = C + \frac{dy}{dx}x - \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

Or, si on représente par y l'intégrale Xdx, on aura

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2X}{dx^2}\text{etc.},$$

et la valeur de l'intégrale en série devient

$$y, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int X dx = C + Xx - \frac{dX}{dx}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

Cette expression est due à Jean Bernoully.

Si l'on avait remplacé h par $a-x$, la formule de Taylor aurait pris la forme

$$y \quad \text{ou} \quad \int X dx = C + \frac{dy}{dx}(x-a) - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

et aurait donné l'intégrale développée suivant les puissances de $x-a$. Comme a est arbitraire on peut en disposer pour rendre la série convergente pour des valeurs de x comprises entre certaines limites.

La formule démontrée au (N° 43),

$$Fx = A + B(\varphi x) + C(\varphi x)^2 + D(\varphi x)^3 + \text{etc.}$$

$$= Fa + \frac{F'a}{\varphi' a}\varphi x + \frac{1}{2}\frac{\varphi' a F'' a - F' a \varphi'' a}{(\varphi' a)^3}(\varphi x)^2 + \text{etc.},$$

dans laquelle a est une racine de $\varphi x = 0$ et x une variable quelconque, mais telle, que entre x et a il n'y ait pas de racine, fournit une autre expression de l'intégrale en série. Si l'on fait φx égal à la dérivée $F'x$ de la fonction Fx, celle-ci sera l'intégrale de $\varphi x dx$ et il viendra, en désignant par C une constante arbitraire,

$$\int \varphi x dx = C + \frac{1}{2}\frac{1}{\varphi' a}(\varphi x)^2 - \frac{1}{3}\frac{\varphi'' a}{(\varphi' a)^3}(\varphi x)^3 + \frac{3}{2.3.4}\frac{3(\varphi'' a)^2 - \varphi' a \varphi''' a}{(\varphi' a)^5}(\varphi x)^4 - \text{etc.}$$

Il est bien entendu qu'avant de faire usage de cette formule, il est nécessaire de s'assurer de sa convergence.

139. Il est souvent plus expéditif, pour intégrer Xdx, de développer X en série suivant les puissances ascendantes de x, soit au moyen du binôme de Newton, soit par la division, soit de toute autre manière, de multiplier ensuite tous les termes par dx et de les intégrer.

Par exemple, pour intégrer la différentielle $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$, on fera

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} = (1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + \frac{15}{48}x^{12} + \text{etc.}$$

d'où

$$\int X dx = \int\left(1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + \frac{15}{48}x^{12} + \text{etc.}\right)dx + C$$

$$= C + x + \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{72}x^9 + \frac{15}{624}x^{13} + \text{etc.}$$

On a de même

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \int \frac{1 + x + \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}}{x} dx = \log x + x + \frac{x^2}{1.2.2}$$

$$+ \frac{x^3}{1.2.3.3} + \text{etc.} + C.$$

$$\int x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$$

$$= C + a^{\frac{p}{q}}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{p}{q}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}\frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{etc.}\right).$$

Cette dernière intégrale s'obtient en développant $(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

Souvent il suffit de développer en série l'un des facteurs de X; prenons pour exemple $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b-x}}$ qui n'est pas intégrable sous forme finie; faisons

$$\frac{1}{\sqrt{b-x}}=(b-x)^{-\frac{1}{2}}=b^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}=b^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{2b}+\frac{3x^2}{8b^2}+\frac{15x^3}{48b^3}+\text{etc.}\right),$$

et il vient

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b-x}}=b^{-\frac{1}{2}}\left\{\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{2b}\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8b^2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{15}{48b^3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\text{etc.}\right\}+C$$

où chaque différentielle du second membre est de la forme $\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ et peut être intégrée par les méthodes exposées plus haut.

Il est à remarquer que si le développement de X suivant les puissances de x est convergent pour toutes les valeurs attribuées à cette variable, la série qui réprésente l'intégrale $\int Xdx$ sera aussi convergente, ainsi qu'on le verra au N° 146.

140. *Construction géométrique d'une intégrale.* — On peut aussi, à défaut de procédé plus exact, construire géométriquement l'intégrale d'une différentielle proposée, en déterminant graphiquement la courbe dont l'équation, si elle était connue, serait l'intégrale cherchée. Ce moyen n'est autre que celui qui a été employé au N° 121 pour démontrer géométriquement l'existence de l'intégrale.

La connaissance de cette courbe, sans tenir lieu entièrement de l'intégrale, est cependant utile, parce qu'elle donne une idée assez exacte de la valeur de cette intégrale pour les différentes valeurs de la variable.

CHAPITRE IX.

Détermination des constantes arbitraires. Intégrales définies. — Signification analytique d'une intégrale définie. Conséquences de cette signification. — Intégrales définies discontinues. — Applications. — Développement d'une fonction suivant les cosinus des multiples de l'arc. — Intégrales définies exprimées par des séries.

141. *Détermination des constantes arbitraires. Intégrales définies.* — Nous avons vu que pour compléter une intégrale, il fallait y ajouter une constante arbitraire. Tant que l'on ne considère une intégrale que comme étant la fonction qui par sa différenciation reproduit la différentielle donnée, cette constante reste nécessairement indéterminée, puisqu'elle n'est soumise qu'à la seule condition de ne pas changer de valeur quand on fait croître ou diminuer la variable de la fonction. Mais il n'en est plus de même dans les applications du calcul intégral. Alors les conditions particulières de la question font ordinairement prendre à ces constantes des valeurs déterminées. Par exemple, on sait que la différentielle ds d'un arc de courbe plane s est donnée par $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ou Xdx; l'arc de courbe s lui-même, limité au point qui a pour abscisse x, est donc représenté par l'intégrale de Xdx, intégrale que nous désignerons par $\varphi x + C$. Il est visible que jusqu'ici rien ne fixe le point à partir duquel est mesuré cet arc. La seconde extrémité M (fig. 1) est seule déterminée par l'abscisse AP ou x. Aussi la longueur $\varphi x + C$ contient-elle une quantité C d'une valeur arbitraire.

Mais si l'on convient que les arcs seront comptés à partir d'un certain point fixe et déterminé B, correspondant à $x = AC = a$, il est visible que l'arc, c'est-à-dire l'intégrale, devant commencer au point B, devra être nul pour x égal à a; on aura donc

$$\varphi a + C = 0, \quad \text{d'où} \quad C = -\varphi a,$$

φa étant ce que devient φx quand on y remplace x par a. L'intégrale, c'est-à-dire, la portion d'arc de courbe BM comprise entre les abscisses a et x, est donc $\varphi x - \varphi a$. Cette intégrale, dont le commencement se trouve ainsi fixé, se nomme *intégrale indéfinie* pour la distinguer de l'*intégrale générale* qui, à cause de l'indétermination de la constante arbitraire, présente une plus grande généralité. Si au lieu de prendre l'intégrale depuis une abscisse déterminée a jusqu'à une abscisse variable x, on prend pour limites deux abscisses déterminées a et b, l'intégrale devient $\varphi b - \varphi a$ et se nomme *intégrale définie*; on la représente ainsi : $\int_a^b Xdx$, où a et b sont *les limites* de l'intégrale.

On peut obtenir la valeur d'une intégrale définie prise entre deux limites données, en remarquant que, puisque $\varphi x + C$ représente la valeur de l'intégrale depuis un point indéterminé jusqu'à l'abscisse x, il en résulte que $\varphi b + C$ et $\varphi a + C$ sont respectivement ces valeurs comptées depuis le même point indéterminé jusqu'aux abscisses b et a, et par conséquent la différence $(\varphi b + C) - (\varphi a + C) = \varphi b - \varphi a$ est l'intégrale prise entre les limites a et b ou $\int_a^b Xdx$. On voit qu'*on obtient une intégrale définie en remplaçant successivement la variable par ses deux valeurs extrêmes dans l'intégrale générale et en prenant la différence des résultats.*

142. *Signification analytique d'une intégrale définie. Conséquences de cette signification.* — La signification d'une intégrale générale a été suffisamment établie par la condition d'être la fonction reproduisant par la différenciation la différentielle proposée. Cette définition ne saurait s'appliquer aux intégrales définies, puisque celles-ci ont une valeur constante qui n'est plus susceptible de dérivation; mais il existe sur les intégrales définies un théorème important qui établit d'une manière générale leur signification analytique. Nous avons vu (N° 5), qu'en désignant par φx une certaine fonction de la va-

riable x, $\frac{\varphi(x+h)-\varphi x}{h}$ est égal à la moyenne des valeurs par lesquelles passe la dérivée $\varphi' x$ de φx quand on fait croître la variable d'une manière continue, ou par intervalles infiniment petits dx, depuis une valeur quelconque x jusqu'à $x+h$, c'est-à-dire, que l'on a, en désignant par n le nombre d'accroissements dx contenus dans h, ou $\frac{h}{dx}$,

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi x}{h}=\frac{\varphi' x+\varphi'(x+dx)+\varphi'(x+2dx)\cdots\cdots+\varphi'(x+h)}{n}.$$

Si donc on remplace x par une valeur particulière a, $x+h$ par b, et n par $\frac{h}{dx}$, il vient

$$\varphi b-\varphi a=\{\varphi' a+\varphi'(a+dx)+\varphi'(a+2dx)\cdots\cdots+\varphi' b\}\,dx,$$

dans laquelle le second membre représente la somme de toutes les valeurs par lesquelles passe la différentielle $\varphi' x dx$, tandis que la variable croît par intervalles égaux à dx, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$. Le premier n'est autre chose que l'intégrale définie de $\varphi' x dx$ prise depuis a jusqu'à b. D'où il suit qu'*une intégrale définie représente la somme des valeurs par lesquelles passe la différentielle quand la variable croît d'une manière continue entre les deux limites de l'intégrale.*

La formule du N° 5 dont nous avons fait usage et par conséquent cette proposition, ne sont vraies que si la fonction φ et sa dérivée φ' restent finies et continues entre les limites a et b de la variable.

Ce qui précède donne lieu à plusieurs conséquences : 1°, on vient de voir que

$$\int_a^b \varphi' x dx=\varphi b-\varphi a.$$

Si on change la lettre a en b et b en a, il vient

$$\int_b^a \varphi' x dx=\varphi a-\varphi b,$$

d'où il résulte que

$$\int_a^b \varphi' x dx=-\int_b^a \varphi' x dx.$$

2°, il résulte de la signification d'une intégrale définie que, si on divise l'intervalle $b - a$ compris entre ses limites, en plusieurs parties quelconques ε, ε', ε''.... $\varepsilon^{(n-1)}$, on a identiquement

$$\int_a^b f'xdx = \int_a^{a+\varepsilon} f'xdx + \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon+\varepsilon'} f'xdx + \cdots \int_{a+\varepsilon+\varepsilon'\cdots+\varepsilon^{(n-1)}}^{b} f'xdx,$$

puisque des deux côtés on ne fait que prendre la somme des valeurs de la différentielle entre les limites a et b. 3°, si on désigne par n le nombre d'accroissements égaux à dx contenus dans $b - a$, on pourra remplacer dx par $\frac{b-a}{n}$ dans l'expression de $\int_a^b f'xdx$, qui devient alors

$$\int_a^b f'xdx = (b - a)\left(\frac{f'a + f'(a + dx) + f'(a + 2dx)\cdots\cdots + f'b}{n}\right),$$

et qui apprend qu'*une intégrale définie représente aussi le produit de la différence $b - a$ des valeurs extrêmes de la variable, par la moyenne arithmétique des valeurs par lesquelles passe $f'x$.* Or si, comme cela doit être, $f'x$ est continu entre les limites a et b, cette moyenne arithmétique correspond à une valeur de x comprise entre a et b, c'est-à-dire à $a + \theta(b - a)$, θ étant compris entre 0 et l'unité; on a donc (*)

$$\int_a^b f'xdx = (b - a)f'[a + \theta(b - a)].$$

(*) Des considérations empruntées au calcul intégral conduisent à une démonstration très simple de la série de Taylor. Intégrons par parties entre les limites 0 et h la différentielle $z^{n-1}\varphi^{(n)}(x + h - z)dz$ dans laquelle $\varphi^{(n)}$ représente la dérivée *nième* de la fonction φ. Il viendra

$$\int_0^h z^{n-1}\varphi^{(n)}(x + h - z)\,dz = -h^{n-1}\varphi^{(n-1)}x + (n-1)\int_0^h z^{n-2}\varphi^{(n-1)}(x + h - z)\,dz.$$

Si l'on continue ces intégrations par parties jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la fonction φ, on trouve

$$\int_0^h z^{n-1}\varphi^{(n)}(x + h - z)\,dz = -h^{n-1}\varphi^{(n-1)}x - (n-1)h^{n-2}\varphi^{(n-2)}x$$
$$-(n-1)(n-2)h^{n-3}\varphi^{(n-3)}x\ldots. - (n-1)(n-2)\ldots3.2h\varphi'x$$
$$-(n-1)(n-2)\ldots3.2.1\varphi x + (n-1)(n-2)\ldots3.2.1\varphi(x + h),$$

4°, si $f'x$ reste positif dans toute l'étendue de l'intégrale, celle-ci sera nécessairement positive et si, lorsque x change de signe, $f'x$ change de signe sans changer de valeur, l'intégrale sera la même au signe près, quand on la prendra entre des limites positives ou entre les mêmes limites négatives. 5°, si $f'x$ était positif depuis $f'a$ jusqu'à $f'\alpha$ et négatif entre $f'\alpha$ et $f'b$, en supposant que la fonction change de signe en passant par zéro, il est évident que la différentielle $f'xdx$ serait positive et négative dans ces mêmes intervalles, et que par conséquent $\int_a^b f'xdx$ ne serait autre chose que la différence des valeurs absolues des intégrales prises entre ces mêmes limites, c'est-à-dire $\int_a^\alpha f'xdx - \int_\alpha^b f'xdx$.

143. *Intégrales définies discontinues.* — Supposons enfin que la différentielle dont on prend l'intégrale définie entre les limites a et b ou que l'intégrale même devienne infinie ou imaginaire pour une ou plusieurs valeurs de la variable comprises entre a et b; alors le théorème du N° 5 du calcul différentiel, et par conséquent le théorème sur les intégrales définies que nous en avons déduit au N° 142, cessent d'être exacts et conduisent souvent à des résultats évidemment fautifs. Ainsi comme on a

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

le théorème sur les intégrales définies donnerait

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -2,$$

---

d'où l'on tire

$$\varphi(x+h) = \varphi x + h\varphi' x + \frac{h^2}{1.2}\varphi'' x \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^h z^{(n-1)}\varphi^{(n)}(x+h-z)\,dz,$$

qui est la série de Taylor. Le reste de la série est ici représenté par une intégrale définie; mais on vient de voir que

$$\int_0^h z^{(n-1)}\varphi^{(n)}(x+h-z)\,dz = h(\theta h)^{n-1}\varphi^{(n)}[x+h(1-\theta)];$$

le reste de la série est donc aussi représenté par

$$\frac{h(\theta h)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^{(n)}[x+h(1-\theta)].$$

ce qui est impossible, puisque $\frac{1}{x^2}$ étant toujours positif, la somme des éléments différentiels doit être une quantité positive. Cette erreur évidente s'explique en remarquant que $\frac{1}{x^2}$ devenant infini pour x égal à zéro, compris entre $+1$ et -1, il y a solution de continuité dans la différentielle et par conséquent l'intégrale définie $\varphi b - \varphi a$ ne représente plus nécessairement la somme des valeurs de la différentielle. Ces sommes s'obtiennent dans ce cas, en les divisant en trois parties prises, la première depuis la limite inférieure a de l'intégrale jusqu'à une valeur $\alpha - \varepsilon$ peu différente de la valeur α qui rend la dérivée infinie, la seconde depuis $\alpha - \varepsilon$ jusqu'à $\alpha + \varepsilon'$ un peu supérieure à α et la troisième, depuis $\alpha + \varepsilon'$ jusqu'à la limite extrême b de l'intégrale, ce qui revient à prendre pour la somme S de $f'xdx$ depuis a jusqu'à b,

$$\mathrm{S}_a^b f'xdx = \mathrm{S}_a^{\alpha-\varepsilon} f'xdx + \mathrm{S}_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon'} f'xdx + \mathrm{S}_{\alpha+\varepsilon'}^{b} f'xdx.$$

Comme la première et la troisième somme sont continues dans toute leur étendue, on a pour leur valeur, en désignant par fx l'intégrale générale de $f'xdx$, savoir :

$$f(\alpha - \varepsilon) - fa, \quad fb - f(\alpha + \varepsilon'),$$

dont la somme converge vers $fb - fa$ lorsque ε et ε' convergent vers zéro. Quant au terme du milieu, si l'on fait converger ε et ε' vers zéro ou plutôt vers dx, il est visible qu'à la limite, cette somme se réduira à deux éléments différentiels

$$\varepsilon f'(\alpha - \varepsilon) + \varepsilon' f'(\alpha + \varepsilon')$$

qu'il faudra ajouter à la somme des deux autres intégrales ou $fb - fa$, après y avoir fait converger ε et ε' vers zéro et la somme totale sera en général indéterminée, infinie ou finie, selon que $\varepsilon f'(\alpha - \varepsilon) + \varepsilon' f'(\alpha + \varepsilon')$ sera lui-même indéterminé, infini ou fini à la limite. Ainsi, pour avoir les sommes

$$\mathrm{S}_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}, \quad \mathrm{S}_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}, \quad \mathrm{S}_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^2 e - \sin^2 x},$$

dont les deux premières sont discontinues pour $x = 0$ et la troisième pour $x = e$, on cherchera les valeurs complémentaires suivantes :

$$\frac{\varepsilon}{(0-\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon'}{(0+\varepsilon')^2} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} = \frac{1}{0} + \frac{1}{0} = \infty.$$

$$\frac{\varepsilon}{(0-\varepsilon)^3} + \frac{\varepsilon'}{(0+\varepsilon')^3} = \frac{\varepsilon}{-\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'^3} = -\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon'^2} = \infty - \infty = \frac{0}{0}.$$

$$\frac{\varepsilon}{\sin^2 e - \sin^2(e-\varepsilon)} + \frac{\varepsilon'}{\sin^2 e - \sin^2(e+\varepsilon')} = 0.$$

Cette dernière valeur s'obtient en remarquant que quand ε et ε' s'évanouissent les deux fractions deviennent $\frac{0}{0}$ dont la vraie valeur se détermine par le procédé connu.

Comme la première valeur est infinie et la seconde indéterminée, les sommes $\mathrm{S}_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}$ et $\mathrm{S}_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$, sont elles-mêmes l'une infinie et l'autre indéterminée. Quant à la troisième différentielle dont l'intégrale indéfinie est $\log\left(\frac{\sin(x+e)}{\sin(x-e)}\right)^{\frac{1}{\sin 2e}}$, on trouve pour vraie valeur de la somme,

$$fb - fa = \log\left(\frac{\sin(\pi+e)}{\sin(\pi-e)}\right)^{\frac{1}{\sin 2e}} - \log\left(\frac{\sin e}{-\sin e}\right)^{\frac{1}{\sin 2e}} = 0.$$

Si dans l'intégrale $\int_a^b f'xdx$, $f'x$ était réel depuis la limite a jusqu'à α et restait imaginaire depuis α jusqu'à b, il est évident que la différentielle serait réelle dans la première partie et imaginaire dans la seconde, et que par conséquent les deux sommes ou intégrales seraient également réelles et imaginaires, du moins si les différentielles imaginaires ne changent pas de signes. Enfin si la différentielle $f'xdx$ était continue depuis a jusqu'à b et que pour $x = b$, $f'x$ devint infini, on prendrait pour la somme de $f'xdx$ depuis a jusqu'à b,

$$\mathrm{S}_a^{b-\varepsilon} f'xdx + \mathrm{S}_{b-\varepsilon}^{b} f'xdx$$

et l'on ferait converger ε vers zéro ou plutôt vers dx. La première somme convergera vers $fb - fa$ et la seconde qui se réduit à un élément différentiel, sera la valeur limite de $\varepsilon f(b-\varepsilon)$, laquelle se présente sous la forme $0 \times \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$ et dont on cherchera la vraie valeur par les méthodes connues. Quand $f'x$ est imaginaire à la limite b, le produit $\varepsilon f'(b-\varepsilon)$ converge visiblement vers zéro et l'intégrale $\int_a^b f'xdx$ se réduit à $fb - fa$.

Il est à remarquer que si dans une intégrale définie on remplace x par φz, on sera conduit à une différentielle équivalente $Fzdz$ et par suite à une intégrale équivalente $\int Fzdz$ dont les limites ne seront plus les mêmes que celles de l'intégrale primitive en x. On trouvera ces nouvelles limites en déterminant les valeurs de z qui rendent φz égal aux deux valeurs extrêmes de x, c'est-à-dire, en résolvant les deux équations

$$\varphi z = a, \quad \varphi z = b,$$

dans lesquelles a et b sont les deux limites de l'intégrale primitive.

144. *Applications.* — D'après ce qu'on a vu (N° 141), la recherche d'une intégrale définie, si la différentielle est continue, ne présente aucune difficulté lorsqu'on connait son intégrale générale; car il suffit de substituer successivement à la variable, les deux limites dans l'intégrale générale et de prendre la différence des résultats. Les intégrales connues (N°s 124 et 139)

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \int a^{-bx} dx = -\frac{a^{-bx}}{b \log a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + C, \quad \int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + bx - x^2}} = -2 \operatorname{arc\,tang} \frac{a + \sqrt{a^2 + bx - x^2}}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = C + x + \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{72}x^9 + \frac{15}{624}x^{13} \text{ etc.},$$

$$\int \cos px \cos qx dx = \frac{1}{2}\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{1}{2}\frac{\sin(p-q)x}{p-q} + C,$$

conduisent donc aux intégrales définies suivantes, pourvu que dans la première, $m+1$ ne soit pas négatif et que a soit supérieur à l'unité dans la troisième,

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}, \quad \int_{-1}^{+1} a^{-bx} dx = \frac{a^b - a^{-b}}{b \log a}, \quad \int_0^{+\infty} a^{-bx} dx = \frac{1}{b \log a},$$

$$\int_0^{+a} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a}, \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2\pi,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{3}{72} + \frac{15}{624} + \text{etc.}, \quad \int_\alpha^{\alpha'} \frac{dx}{\sqrt{a^2+bx-x^2}} = \pi,$$

α et α' étant les deux racines de $x^2 - bx - a^2 = 0$.

$$\int_0^\pi \cos px \cos qx dx = \frac{1}{2}\frac{\sin(p+q)\pi}{p+q} + \frac{1}{2}\frac{\sin(p-q)\pi}{p-q}.$$

Si le coefficient q converge vers p, le second terme converge vers $\frac{0}{0}$ et à la limite il vient

$$\int_0^\pi \cos^2 px dx = \frac{1}{2}\frac{\sin 2p\pi}{2p} + \frac{\pi}{2}.$$

Quand $2p$ est un nombre entier, cette équation se réduit à

$$\int_0^\pi \cos^2 px dx = \frac{\pi}{2}.$$

En changeant $\cos^2 px$ en $1-\sin^2 px$, on trouve aussi, $2p$ étant entier,

$$\int_0^\pi \sin^2 px\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et par conséquent} \quad \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

et comme $\sin^2 x$ passe par les mêmes valeurs entre $x=0$, $x=\pi$ et entre $x=\pi$, $x=2\pi$, on a aussi

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \pi.$$

Enfin si p et q sont des nombres entiers inégaux, l'intégrale est visiblement nulle.

Les intégrales de la fin du N° 136 donnent de même, si m est pair,

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5.7.9\ldots\ldots(m-1)}{2.4.6.8.10\ldots\ldots\ldots m}\cdot\frac{\pi}{2},$$

et si m est impair,

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6.8\ldots\ldots(m-1)}{3.5.7.9\ldots\ldots\ldots m}.$$

Ces deux dernières conduisent à une expression remarquable de π due au géomètre anglais Wallis. Si dans la première on prend pour m un nombre pair infiniment grand et dans l'autre le nombre impair consécutif, les exposants tous deux infinis et ne différant que d'une unité, seront égaux à la limite ainsi que les deux intégrales définies, et l'on aura (*)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots\ldots\ldots}.$$

(*) Cette formule se démontre d'une manière plus rigoureuse en observant que comme x est toujours compris entre zéro et l'unité, la différentielle $\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ reste comprise entre $\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Il en est donc de même des sommes ou intégrales; or si m est un nombre impair, il en

En remarquant que $\frac{z}{(z^2+1)^p}$ est nul pour $z=0$ et pour $z=\infty$ quand p est un nombre positif supérieur à l'unité, les intégrales successives trouvées au N° 135 deviennent :

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)^n}=\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}=\frac{2n-5}{2n-4}\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)^{n-2}},\ldots..$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1}=\frac{\pi}{4},$$

pourvu que n soit un nombre entier. Il résulte de là que

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+1)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.5.7\ldots\ldots..2n-3}{2.4.6.8\ldots\ldots..2n-2}.$$

Proposons-nous encore de trouver l'intégrale définie suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1}$$

m et n étant deux nombres entiers et positifs, le premier plus petit que le second, ce qui fait que $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$ reste fini et nul pour $x=\infty$.

Comme les racines $n^{ièmes}$ de -1 sont $e^{\frac{(2i+1)\pi\sqrt{-1}}{n}}$, en donnant à i toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $n-1$, il est visible

sera de même de $m+2$ et en représentant par A l'intégrale correspondant à m, celle qui répond à $m+2$ est visiblement $A\frac{m+1}{m+2}$ qui converge vers A quand m converge vers l'infini ; ces deux intégrales tendent donc vers une même valeur qui est par conséquent celle de l'intégrale intermédiaire $\int_0^1 \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

que si l'on désigne par $e^{(1)}$, $e^{(3)}$, $e^{(5)}$..... $e^{(m+1)}$ les valeurs successives de $e^{\frac{(2i+1)\pi}{n}\sqrt{-1}}$, la fraction rationnelle

$$\frac{y^m}{y^n+1}$$

peut être décomposée en fractions simples de la manière suivante (N° 129) attendu que $m < n$,

$$\frac{y^m}{y^n+1} = \frac{\frac{1}{n}(e^{(1)})^{m-n+1}}{y-e^{(1)}} + \frac{\frac{1}{n}(e^{(3)})^{m-n+1}}{y-e^{(3)}} + \frac{\frac{1}{n}(e^{(5)})^{m-n+1}}{y-e^{(5)}} \cdots + \frac{\frac{1}{n}(e^{(2n-1)})^{m-n+1}}{y-e^{(2n-1)}},$$

et par conséquent on a, en changeant y en x^2,

$$\int \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{1}{n}\left\{\int \frac{(e^{(1)})^{m-n+1}\,dx}{x^2-e^{(1)}} + \int \frac{(e^{(3)})^{m-n+1}\,dx}{x^2-e^{(3)}} \cdots + \int \frac{(e^{(2n-1)})^{m-n+1}\,dx}{x^2-e^{(2n-1)}}\right\}.$$

Mais on sait que

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + C$$

et, en changeant a^2 en $-e^{(1)}$ ou bien a en $\sqrt{-1}\,e^{\frac{1}{2}(1)}$,

$$\int \frac{dx}{x^2-e^{(1)}} = \frac{+\sqrt{-1}}{e^{\frac{1}{2}(1)}}\,\text{arc tang}\,\frac{x\sqrt{-1}}{e^{\frac{1}{2}(1)}} + C = \frac{\sqrt{-1}}{e^{\frac{1}{2}(1)}}\,\text{arc cot}\,\frac{e^{\frac{1}{2}(1)}}{x\sqrt{-1}} + C.$$

Si donc on prend l'intégrale définie entre les limites $+\infty$ et $-\infty$, ce qui est permis puisque $e^{(1)}$ étant imaginaire, $\frac{1}{x^2-e^{(1)}}$ ne devient infini pour aucune valeur réelle attribuée à x, il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-e^{(1)}} = \frac{2\sqrt{-1}}{e^{\frac{1}{2}(1)}}\,\text{arc cot}\,\frac{e^{\frac{1}{2}(1)}}{\infty\sqrt{-1}} = \frac{2\sqrt{-1}}{e^{\frac{1}{2}(1)}}\,\text{arc cot}\,0 = \frac{\pi\sqrt{-1}}{e^{\frac{1}{2}(1)}},$$

et par conséquent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{n}\left\{\frac{(e^{(1)})^{\frac{2m+1}{2}}}{(e^{(1)})^n} + \frac{(e^{(3)})^{\frac{2m+1}{2}}}{(e^{(3)})^n} + \text{etc.}\right\}$$

qui, à cause des valeurs connues suivantes :

$$(e^{(1)})^n = e^{\pi\sqrt{-1}} = -1, \quad (e^{(3)})^n = e^{3\pi\sqrt{-1}} = -1, \text{ etc.},$$

prend la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = -\frac{\pi\sqrt{-1}}{n}\left\{ e^{\frac{2m+1}{2n}\pi\sqrt{-1}} + e^{\frac{2m+1}{2n}3\pi\sqrt{-1}} + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + e^{\frac{2m+1}{2n}(2n-1)\pi\sqrt{-1}} \right\},$$

ou bien

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = -\frac{\pi\sqrt{-1}}{n}\left\{ e^{a\pi\sqrt{-1}} + e^{3a\pi\sqrt{-1}} + e^{5a\pi\sqrt{-1}} \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + e^{(2n-1)a\pi\sqrt{-1}} \right\}$$

dans laquelle $\frac{2m+1}{2n}$ est remplacé par a. Le polynôme compris entre les parenthèses forme une progression géométrique dont la somme est

$$\frac{e^{(2n+1)a\pi\sqrt{-1}} - e^{a\pi\sqrt{-1}}}{e^{2a\pi\sqrt{-1}} - 1} = \frac{e^{(2m+1)\pi\sqrt{-1}} - 1}{e^{2a\pi\sqrt{-1}} - 1} e^{a\pi\sqrt{-1}}$$

$$= -\frac{2}{e^{a\pi\sqrt{-1}} - e^{-a\pi\sqrt{-1}}} = -\frac{1}{\sqrt{-1}\sin a\pi};$$

ce qui réduit la valeur de l'intégrale à

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Comme la différentielle conserve le même signe quand on change celui de x, l'intégrale depuis $-\infty$ jusqu'à zéro a la même valeur que depuis zéro jusqu'à $+\infty$; on a donc aussi

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{2n \sin \frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

On en déduit, en faisant $x^{2n} = z$ et $a = \dfrac{2m+1}{2n}$,

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

dans laquelle a est quelconque mais compris entre 0 et 1, puisque n est plus grand que m.

En remplaçant z par y^p, on est aussi conduit à l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^\infty \frac{y^{pa-1}}{y^p+1}\,dy = \frac{\pi}{p \sin a\pi}$$

et en posant $pa = q$,

$$\int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{y^p+1}\,dy = \frac{\pi}{p \sin \frac{q}{p}\pi}$$

dans laquelle $\dfrac{q}{p}$ ou a ne peut pas dépasser l'unité positive.

145. *Développement d'une fonction suivant les cosinus des arcs multiples.* — Une des intégrales définies précédentes conduit d'une manière fort simple au développement d'une fonction φx, suivant les cosinus des arcs multiples de la variable; car si l'on pose

$$\varphi x = \frac{1}{2}a + b\cos x + c\cos 2x + d\cos 3x + \cdots\cdots + h\cos nx + \cdots\cdots$$

et qu'on multiplie les deux membres par $\cos nx\,dx$, n étant un

nombre entier quelconque, on trouve, en intégrant les deux membres depuis zéro jusqu'à π et remarquant que, d'après ce qui précède, les intégrales de $\cos nx\, dx$, $\cos x \cos nx\, dx$, $\cos 2x \cos nx\, dx$, etc. sont nulles, tandis que l'intégrale de $\cos^2 nx\, dx$ est $\frac{\pi}{2}$ pour toute valeur de n autre que zéro, savoir :

$$\int_0^\pi \varphi x \cos nx\, dx = \frac{\pi}{2} h \quad \text{d'où} \quad h = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi x \cos nx\, dx.$$

Si l'on fait successivement n égal à 1, 2, 3, 4....., il vient

$$a = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi x dx, \quad b = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi x \cos x dx, \quad c = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi x \cos 2x dx,$$

$$d = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi x \cos 3x dx \text{ etc.}$$

qui déterminent les coefficients a, b, c, d.... au moyen d'intégrales définies. Une marche semblable conduira au développement de φx suivant les sinus des multiples de x. Avant de faire usage de cette série, il est nécessaire de s'assurer de sa convergence. En remplaçant φx par x, il vient :

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \right) \text{etc.}$$

dont le second membre est convergent. En dérivant on trouve cette série convergente remarquable

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}.$$

Cette dérivation ne pourrait pas être répétée, parce que la dérivée de $\frac{\sin nx}{n}$ ou $\cos nx$ est indéterminée quand n est infini, tandis que la dérivée de $\frac{\sin nx}{n^2}$ était nulle.

Pour $\varphi x = e^{-x}$, il vient

$$\frac{\pi}{2}e^{-x} = \frac{1-e^{-\pi}}{1+1} + \frac{1+e^{-\pi}}{1^2+1}\cos x + \frac{1-e^{-\pi}}{2^2+1}\cos 2x + \frac{1+e^{-\pi}}{3^2+1}\cos 3x$$
$$+ \frac{1-e^{-\pi}}{4^2+1}\cos 4x + \text{etc.}$$

146. *Intégrales définies exprimées par des séries.* — Nous verrons dans la seconde partie du calcul intégral, comment on parvient à trouver les intégrales définies de certaines différentielles dont on ne connaît pas les intégrales générales; mais le nombre des fonctions auxquelles ces procédés sont applicables est fort borné et il faut le plus souvent avoir recours à des méthodes d'approximation. Le théorème du (N° 142) en fournit une fort simple. Divisons en n parties égales l'intervalle $b-a$ des deux limites de l'intégrale $\int_a^b fxdx$; en représentant par i chaque division, on aura rigoureusement, quand n atteindra la limite des valeurs croissantes ou quand i atteindra la limite des valeurs décroissantes,

$$\int_a^b fxdx = \{fa + f(a+i) + f(a+2i) + f(a+3i) \cdots\cdots + f(b-i)\}\bar{i};$$

mais comme on doit se borner à prendre i suffisamment petit, cette somme ne sera plus qu'une valeur approchée de l'intégrale définie.

On trouve, de cette manière, en faisant $n = 10$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left\{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{101}{100}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{104}{100}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{109}{100}}} \cdots\cdots \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{181}{100}}}\right\}\frac{1}{10}$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{\sqrt[3]{1010}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1040}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1090}} \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1810}}.$$

Les différents moyens employés pour trouver une intégrale indéfinie développée en série, peuvent aussi servir à trouver la valeur approchée d'une intégrale définie; ainsi, de ce que la formule de Maclaurin donne

$$\varphi x = \varphi a + (x-a)\varphi' a + \frac{(x-a)^2}{1.2}\varphi'' a + \text{etc.},$$

il résulte que l'on a, en remplaçant φx par $\int fxdx$ et par conséquent $\varphi' x$ par fx, et φa qui reste indéterminé par une constante C,

$$\int fxdx = C + (x-a)\,fa + \frac{(x-a)^2}{1.2}f'a + \frac{(x-a)^3}{1.2.3}f''a + \text{etc.}$$

On a donc aussi

$$\int_m^n fxdx = (n-m)\,fa + \frac{(n-a)^2-(m-a)^2}{1.2}f'a$$

$$+ \frac{(n-a)^3-(m-a)^3}{1.2.3}f''a + \text{etc.}$$

dans laquelle on peut disposer de a pour rendre la série convergente. La série de Jean Bernoully donne aussi

$$\int_m^n fxdx = nfn - mfm - \left(\frac{n^2f'n - m^2f'm}{1.2}\right) + \frac{n^3f''n - m^3f''m}{1.2.3} - \text{etc.}$$

Enfin, de la formule (N° 138)

$$\int \varphi xdx = C + \frac{1}{2}\frac{1}{\varphi' a}\varphi^2 x - \frac{1}{3}\frac{\varphi'' a}{\varphi'^3 a}\varphi^3 x + \text{etc.}$$

dans laquelle a est une racine de l'équation $\varphi(x)=0$, on tire

$$\int_m^n \varphi xdx = \frac{1}{2}\frac{1}{\varphi' a}(\varphi^2 n - \varphi^2 m) - \frac{1}{3}\frac{\varphi'' a}{\varphi'^3 a}(\varphi^3 n - \varphi^3 m) + \text{etc.},$$

pourvu que a soit la seule racine de $\varphi x = 0$ comprise entre m et n. Si m est égal à a, il vient

$$\int_a^n \varphi xdx = \frac{1}{2}\frac{1}{\varphi' a}\varphi^2 n - \frac{1}{3}\frac{\varphi'' a}{\varphi'^3 a}\varphi^3 n + \text{etc.}$$

Il est souvent plus expéditif de développer directement fx en série suivant les puissances ascendantes de x, de multiplier ensuite la série par dx et d'intégrer chaque terme entre les limites fixées. On trouve

ainsi, en supposant que le développement de fx soit $a + bx + cx^2 + ex^3 +$ etc., savoir

$$\int_m^n fxdx = a(n-m) + \frac{b}{2}(n^2 - m^2) + \frac{c}{3}(n^3 - m^3) + \frac{e}{4}(n^4 - m^4) + \text{etc.}$$

Remarquons que si le développement de fx est convergent pour toutes les valeurs de x comprises entre m et n, la série qui forme l'intégrale sera aussi convergente, puisqu'une moyenne arithmétique entre plusieurs séries convergentes est évidemment une série convergente, et qu'une intégrale définie n'est autre chose qu'une moyenne arithmétique (N° 142).

CHAPITRE X.

Quadrature des surfaces planes. — Signification d'une intégrale définie. — Quadrature des courbes polaires. — Rectification des courbes planes. — Rectification des courbes gauches. — Rectification des courbes polaires. — Cubature des solides de révolution. — Quadrature des surfaces de révolution. — Problèmes divers.

147. *Quadrature des surfaces planes.* — Le calcul intégral apprend à remonter d'une différentielle donnée à sa fonction primitive. Il résulte de là que lorsqu'une quantité est connue par sa différentielle, la recherche de la valeur même de cette quantité n'est plus qu'un problème de calcul intégral; ainsi la détermination de l'aire d'une courbe ou d'une portion de son arc, et la détermination de la surface ou du volume d'un corps terminé par une surface courbe, sera ramenée à une intégration, dès que l'on aura trouvé l'expression de la différentielle de l'aire ou de l'arc de cette courbe et de la surface ou du volume de ce corps. Proposons-nous donc de trouver ces différentielles.

Soit $y = fx$ l'équation d'une courbe BC (fig. 30) rapportée à des axes rectangulaires, et u l'aire comprise entre la courbe BM, l'axe des X, l'ordonnée variable MP correspondant à l'abscisse x et une ordonnée quelconque fixe BE. u augmentant et diminuant avec l'abscisse AP ou x, est nécessairement une fonction de cette variable. En donnant à x un accroissement $PP' = h = \Delta x$, u prend un accroissement $\Delta u = MM'PP'$, et si on construit un rectangle QQ'P'P équivalent à MM'P'P, il est visible que QQ' devra couper la courbe en M'' placé

entre les points M et M′, puisqu'il doit y avoir compensation entre les surfaces extérieures et intérieures QM″M et Q′M″M′; PP″ est donc une fraction de PP′ ou h, représentée par θh, et l'ordonnée P″M″ sera exprimée par $f(x+\theta h)$ et par conséquent on a pour toute valeur de h,

$$\Delta u = \Delta x f(x+\theta h), \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = f(x+\theta h),$$

θ étant compris entre zéro et 1, et il vient à la limite, en observant que, puisque θ reste compris entre 0 et 1, θh s'évanouit avec h,

$$\frac{du}{dx} = fx = y, \quad \text{d'où} \quad du = y dx \quad \text{et} \quad u = \int y dx + C = \int fx dx + C.$$

Telle est l'expression de l'aire comprise entre une courbe, l'axe des X et deux ordonnées dont l'une correspond à une abscisse variable x et l'autre, à une abscisse fixe mais indéterminée. On y serait arrivé immédiatement par la considération des infiniment petits en remarquant que si $PP' = dx$, la surface PP′M′M sera l'accroissement ou la différentielle du de u; et comme PP′M′M ne diffère pas sensiblement du rectangle PP′NM dont l'aire est ydx, on aura, comme précédemment,

$$du = y dx \quad \text{et} \quad u = \int y dx + C.$$

Cette valeur de u est indéterminée puisqu'elle renferme une constante arbitraire C. Elle ne sera déterminée que lorsqu'on aura fixé le commencement de l'intégrale, c'est-à-dire, la limite de la surface opposée à MP. Si l'aire u s'étend depuis l'ordonnée fixe DE jusqu'à MP, en représentant l'abscisse AE par a, on voit que pour $x = a$, on doit avoir $u = 0$; en représentant donc par φx l'intégrale $\int fx dx$, on aura

$$0 = \varphi a + C \quad \text{d'où} \quad u = \int y dx - \varphi a = \varphi x - \varphi a,$$

pour l'expression de l'aire comptée depuis l'abscisse $AE = a$ jusqu'à une abscisse quelconque $AE = x$. Si l'aire devait être prise entre les deux ordonnées fixes DE et FG correspondant aux abscisses $AE = a$ et $AG = b$, il suffirait de faire $x = b$ et il viendrait

$$u = \int_a^b y dx = \int_a^b fx dx = \varphi b - \varphi a.$$

On appelle *quadrature* l'opération par laquelle on détermine l'aire d'une courbe, parce que l'on cherchait autrefois le carré équivalent. Toute intégrale de la forme $\int fxdx$ pouvant être considérée comme devant servir à la quadrature d'une certaine courbe ayant pour équation $y = fx$, on dit qu'un problème est *ramené à une quadrature*, lorsque la solution ne dépend plus que d'une semblable intégration. Si les axes au lieu d'être rectangulaires, étaient obliques, il est visible que l'aire du parallélogramme PP'QQ' serait $hf(x+\theta h)\sin\alpha$, α étant l'angle des axes et l'on trouverait

$$u = \sin\alpha\int_a^b fx\,dx.$$

148. *Signification d'une intégrale définie.* — L'expression précédente de l'aire d'une portion de courbe comprise entre deux ordonnées peut servir à démontrer géométriquement le théorème du N° 142 sur la valeur d'une intégrale définie; en effet, l'intégrale $\int fxdx$, quelle que soit la quantité qu'elle est destinée à représenter, peut être considérée comme exprimant l'aire d'une portion de la courbe qui a pour équation $y = fx$, et l'intégrale définie $\int_a^b fxdx$ est l'aire de la courbe comprise entre les ordonnées correspondantes aux abscisses $x = a$ et $x = b$. Si donc DF (fig. 31) est cette courbe, et si AG $= b$ et AE $= a$, l'intégrale définie sera l'aire DEGF; or en divisant EG en un nombre infini de parties infiniment petites Ea, ab, bc... représentant les valeurs successives de dx, et en élevant les ordonnées aa', bb', cc', etc., les rectangles DEaa', $abb'a'$, $bcc'b'$ etc., dont les aires sont données par le produit de chaque ordonnée par dx, représenteront toutes les valeurs que peut prendre la différentielle $fxdx$ entre les limites $x = a$, et $x = b$; comme la surface EGFD est la somme de tous ces rectangles, si la courbe est continue entre ces limites, l'intégrale définie est aussi la somme de toutes les valeurs que prend la différentielle entre les limites de l'intégrale.

Il est à remarquer qu'il résulte du N° 142 que l'intégrale et par conséquent l'aire DEGF est aussi représentée par le produit de EG par une moyenne entre toutes les ordonnées équidistantes DE, aa', bb', cc'.... GF. On voit aussi que si entre les limites $x = a =$ AE et $x = b =$ AG (fig. 32) la courbe passait au-dessous de l'axe des X,

comme les ordonnées ou fx deviendraient négatives, $\int_a^b fxdx$ serait la différence des aires DBE et GBF, ainsi qu'on l'a vu au N° 142. Pour avoir chacune de ces aires, il faudrait chercher l'x du point B ou AB et prendre successivement l'intégrale entre les limites AE et AB puis AB et AG.

Appliquons la formule des quadratures à quelques courbes.

1° Pour la parabole dont l'équation est

$$y^2 = 2px,$$

on trouve

$$u = \int_a^b ydx = \int_a^b \sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_a^b x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}).$$

Si l'aire se compte à partir du sommet, a est nul et il vient, en remplaçant b par x,

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2px}\,x = \frac{2}{3}xy.$$

2° Pour l'ellipse dont l'équation est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

il vient

$$u = \int ydx = \frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right\} + C.$$

Si on compte cette aire à partir de l'axe des Y, x et u doivent être nuls en même temps et l'on a

$$u = \frac{b}{2a}\left\{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right\} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}ab\arcsin\frac{x}{a}.$$

En faisant $x = a$, on a pour l'aire du quart de l'ellipse,

$$u = \pi\frac{ab}{4}.$$

3° Pour l'hyperbole équilatère, rapportée à ses asymptotes, dont l'équation est $xy = a^2$, il vient

$$u = \int y dx = a^2 \int \frac{dx}{x} = a^2 \log x + C.$$

Si on compte l'aire à partir de l'ordonnée du sommet de la courbe, pour lequel l'x est a, on trouve

$$u = a^2 \log \frac{x}{a}.$$

En faisant a égal à l'unité, u devient égal à $\log x$, ce qui apprend que *dans cette hyperbole équilatère, la portion de l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote représente le logarithme népérien de l'abscisse.* C'est pour ce motif que ces logarithmes ont été aussi nommés *logarithmes hyperboliques*. En considérant une hyperbole quelconque au lieu de l'hyperbole équilatère, et en la rapportant à ses asymptotes qui formeront un système d'axes obliques, on trouve que la propriété précédente subsiste encore, mais les logarithmes ne sont plus pris dans le système népérien; la valeur de la base dépend de l'angle formé par les deux asymptotes.

4° Pour trouver l'aire d'une portion de la cycloïde qui a pour équation différentielle

$$dx = \pm \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

transportons, pour faciliter l'intégration, l'origine des coordonnées de A en E (fig. 9), en prenant EK et EF pour axes des X' et Y'. On fera pour cela

$$x = \pi a + x', \quad y = 2a - y'$$

et l'équation de la courbe deviendra

$$dx' = \frac{(2a - y')\, dy'}{\pm \sqrt{2ay' - y'^2}}.$$

En observant que pour l'arc EA', $\frac{dy'}{dx'}$ est positif et que par conséquent

il faut prendre le signe plus, l'aire ENL comprise entre la courbe et l'axe des X' est

$$u = \int y'dx' = \int \frac{(2a - y')\, y'\, dy'}{\sqrt{2ay' - y'^2}} = \int \sqrt{2ay' - y'^2}\, dy'$$

$$= \frac{y' - a}{2}\sqrt{2ay' - y'^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{y' - a}{a} + C.$$

Si l'on prend l'intégrale depuis $y' = 0$ jusqu'à $y' = \text{A'K} = 2a$, on aura $\frac{a^2\pi}{2}$ pour l'aire EA'K. On sait que $\text{FA'} = \pi a$ et par conséquent l'aire du rectangle EFA'K est donnée par $\pi a.2a$ ou $2\pi a^2$. En retranchant l'aire EA'K exprimée par $\pi\frac{a^2}{2}$, il reste $\frac{3}{2}\pi a^2$ pour l'aire de la demi-cycloïde EFA'; l'aire de la cycloïde est donc égale à trois fois l'aire du cercle générateur.

3° L'hypocycloïde du N° 62 et qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

donne pour le quart de sa surface u, en remplaçant x par lz^3 et en faisant usage de l'intégrale définie trouvée au N° 144,

$$\frac{1}{4}u = \int_0^l \left(l^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx = 3l^2 \int_0^1 \frac{z^2dz}{\sqrt{1 - z^2}} - 6l^2 \int_0^1 \frac{z^4dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$+ 3l^2 \int_0^1 \frac{z^6dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{3}{32}\pi l^2.$$

6° La chaînette, lorsqu'on la rapporte à un axe des Y vertical passant par le point le plus bas et à un axe horizontal des X placé à une distance a au-dessous de ce point, a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

et en comptant l'aire u à partir de l'axe des Y, on trouve

$$u = \int_0^x \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Si l'on remplace $e^{\frac{x}{a}}$ par sa valeur tirée de l'équation de la courbe mise sous la forme

$$\frac{2y}{a} = e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{e^{\frac{x}{a}}}, \quad \text{ou} \quad \left(e^{\frac{x}{a}}\right)^2 - \frac{2y}{a} e^{\frac{x}{a}} = -1,$$

il vient

$$u = a\sqrt{y^2 - a^2}.$$

Enfin pour avoir l'aire comprise entre deux courbes MM′, NN′ et deux ordonnées MP, M′P′ (fig. 33), il suffit évidemment de déterminer par la méthode précédente, les aires MM′P′P et NN′P′P, et d'en prendre la différence; mais on peut quelquefois arriver à l'expression cherchée d'une manière plus facile, en observant que, si $Y = fx$ et $y = \varphi x$ sont les équations des deux courbes MM′ et NN′, $Y dx$ et $y dx$ seront les aires des rectangles élémentaires $mm'p'p$ et $nn'p'p$, et par conséquent $(Y - y)dx$ est l'aire de la tranche $mm'n'n$, et comme la surface MM′N′N se compose de la somme des tranches telles que $mm'n'n$, on aura

$$u = \int_a^b (Y - y)\, dx = \int_a^b (fx - \varphi x)\, dx.$$

L'aire comprise entre quatre courbes MM′, NN′, MN et M′N′ (fig. 34) s'obtiendrait en déterminant successivement les aires MM′P′P, M′N′Q′P′, NN′Q′Q et MNPQ, et en observant que

$$MM'N'N = MM'P'P + M'N'Q'P' - NN'Q'Q - MNPQ.$$

149. *Quadrature des courbes polaires.* — Si l'équation de la courbe était donnée en coordonnées polaires et qu'on voulût connaître l'aire comprise entre deux rayons vecteurs OA et OM et l'arc AM (fig. 16) de cette courbe, la formule pour la quadrature s'obtiendrait par une marche analogue à celle que l'on a employée pour le cas des coordonnées rectangulaires. Nous nous bornerons à chercher la formule de

la quadrature, en employant la considération des infiniment petits. En désignant par u l'aire AOM, si on donne à l'angle AOM ou t un accroissement MOM′ ou dt, en observant que le secteur MOM′ ou du étant infiniment petit, le secteur MOM′ peut être considéré comme circulaire et sa surface a pour expression

$$du = \frac{1}{2}\,\text{OM. arc MM}' = \frac{1}{2}\,r^2dt, \quad \text{d'où} \quad u = \frac{1}{2}\int r^2dt + C.$$

En appliquant cette formule à la quadrature de la spirale d'Archimède qui a pour équation $r = nt$, on trouve

$$u = \frac{1}{2}\int n^2t^2\,dt = \frac{n^2t^3}{6} + C,$$

et en prenant la surface depuis l'angle t' jusqu'à l'angle t'',

$$u = \frac{n^2}{6}(t''^3 - t'^3).$$

Pour la spirale logarithmique dont l'équation est $r = \alpha a^{mt}$, il vient

$$u = \frac{1}{2}\int \alpha^2 a^{2mt}dt = \frac{1}{4m}\alpha^2\int a^{2mt}\,2mdt = \frac{\alpha^2}{4m}\,\frac{a^{2mt}}{\log a} + C = \frac{r^2}{4m\log a} + C.$$

150. *Rectification des courbes planes.* — On a vu (N° 59) que la différentielle d'un arc de courbe est donnée par l'équation

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1};$$

on tire de là

$$s = \int dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}.$$

Telle est la *formule pour la rectification des courbes planes* rapportées à des axes rectangulaires. Pour l'appliquer à des exemples, il suffit de remplacer $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur en x tirée de l'équation de la courbe et d'effectuer l'intégration indiquée.

1° Considérons d'abord le cercle qui a pour équation $x^2 + y^2 = r^2$. Il vient

$$s = \int dx \sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + 1} = \int \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \arcsin\frac{x}{r} + C,$$

et si l'on prend l'intégrale entre les limites $x = a$ et $x = b$,

$$s = r \arcsin\frac{b}{r} - r \arcsin\frac{a}{r}.$$

2° Pour la parabole, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad s = \int dx \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \int \frac{ydy}{p} \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}$$

$$= \frac{1}{p} \int dy \sqrt{p^2 + y^2} = \frac{1}{2p}[y\sqrt{p^2 + y^2} + p^2 \log(y + \sqrt{p^2 + y^2})] + C,$$

ou bien, en prenant la courbe depuis le sommet jusqu'à l'ordonnée y,

$$s = \frac{1}{2p}\left(y\sqrt{p^2 + y^2} + p^2 \log\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}\right).$$

3° L'ellipse donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad s = \int dx \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^4 - a^2x^2}}$$

$$= \int dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^4 - a^2x^2}} = \int \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{1 - e^2\frac{x^2}{a^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\, dx,$$

en remplaçant $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ par e^2. L'intégrale de cette différentielle n'est

pas exprimable en quantités algébriques, trigonométriques ou logarithmiques; mais on en trouve une valeur approchée en remplaçant le radical $\sqrt{1-e^2\frac{x^2}{a^2}}$ par la série

$$1-\frac{1}{2}e^2\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{8}e^4\frac{x^4}{a^4}-\text{etc.}$$

qui est toujours convergente, parce que e et $\frac{x}{a}$ sont des fractions. On trouve ainsi

$$s=\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}-\frac{1}{2}e^2\int\frac{\frac{x^2}{a^2}dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}-\frac{1}{8}e^4\int\frac{\frac{x^4}{a^4}dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}-\text{etc.},$$

dont chaque terme est intégrable (N° 136).

4° Pour la cycloïde, il vient

$$s=\int dx\sqrt{\frac{2ay-y^2}{y^2}+1}=\sqrt{2a}\int\frac{dy}{\sqrt{2a-y}}=-2\sqrt{4a^2-2ay}+C.$$

Si l'intégrale se prend depuis $y=0$ jusqu'à $y=2a$, c'est-à-dire, dans toute l'étendue de la demi cycloïde, on trouve $s=4a$ et par conséquent la cycloïde entière est égale à $8a$ ou à quatre diamètres du cercle générateur.

5° Pour l'hypocycloïde traitée plus haut et qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}},$$

on trouve

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}},\quad \frac{1}{4}s=\int_0^l\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=\int_0^l\frac{l^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=\frac{3}{2}l.$$

6° Dans la chaînette dont on s'est déjà occupé (N° 148, 6°), on trouve,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),\quad s=\frac{1}{2}\int_0^x dx\sqrt{e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}+2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

On tire de l'équation de la chaînette, comme au N° 148, 6°,

$$e^{\frac{x}{a}}=\frac{y}{a}+\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1},\quad e^{-\frac{x}{a}}=\frac{y}{a}-\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1}$$

et ces valeurs, substituées dans l'expression de l'arc s, lui font prendre cette forme

$$s=\sqrt{y^2-a^2}.$$

Il résulte de cette valeur, comparée à celle de l'aire u trouvée plus haut, que l'on a $u=as$.

151. *Rectification des courbes gauches.* — Si la courbe était à double courbure, la formule pour la rectification serait

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2},$$

d'après ce qu'on a vu (N° 80), et l'on aurait

$$s=\int dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2},$$

dans laquelle on remplacerait $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ par leur valeur en z tirée des deux équations de la courbe. Par exemple, pour la spirale dont les équations sont (N° 92)

$$x=r\sin\frac{z}{ar},\quad y=r\cos\frac{z}{ar},$$

on trouve

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{a}\cos\frac{z}{ar}, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{a}\sin\frac{z}{ar}$$

et par conséquent

$$s = \int dz \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}\left(\cos^2\frac{z}{ar} + \sin^2\frac{z}{ar}\right)}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} \int dz = z\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + C.$$

152. *Rectification des courbes polaires.* — Considérons une courbe plane rapportée à des coordonnées polaires. Sa dérivée pourrait aussi être obtenue en imitant la marche suivie pour les courbes rectangulaires (N° 59); mais nous nous bornerons à la démontrer par la considération des infiniment petits. Soient donc AM (fig. 16) cette courbe et $r = ft$ son équation. Si on donne à t un accroissement infiniment petit $\mathrm{MOM}' = dt$, l'arc AM ou s augmentera de $\mathrm{MM}' = ds$ et en décrivant du point O comme centre l'arc de cercle MP, le triangle MPM′ considéré comme rectiligne, donne

$$ds = \sqrt{\mathrm{MP}^2 + \mathrm{M'P}^2}.$$

Or, l'arc de cercle MP est égal à MO × angle $\mathrm{MOM}' = r\,dt$ et M′P étant l'accroissement du rayon vecteur MO, n'est autre chose que dr; on a donc

$$ds = \sqrt{r^2 dt^2 + dr^2}, \quad \text{d'où} \quad s = \int dt \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

Pour la spirale d'Archimède, on trouve

$$r = nt \quad \text{et} \quad s = \int dt\sqrt{n^2t^2 + n^2} = \frac{n}{2}\left\{ t\sqrt{t^2+1} + \log\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\right\} + C.$$

Pour la spirale logarithmique,

$$r = \alpha a^{mt}, \quad s = \int dt\sqrt{\alpha^2 a^{2mt} + \alpha^2 m^2 a^{2mt}\log^2 a} = \alpha\sqrt{1 + m^2\log^2 a}\int a^{mt}\,dt$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{1 + m^2\log^2 a}}{m\log a}\,a^{mt} + C = \frac{\sqrt{1 + m^2\log^2 a}}{m\log a}\,r + C.$$

153. *Cubature des solides de révolution.* — Soit $y = fx$ l'équation d'une courbe BC (fig. 30). En tournant autour de l'axe des X, elle engendre une surface de révolution et nous nous proposons de déterminer le volume renfermé dans cette surface et limité par deux plans perpendiculaires à l'axe X et engendrés par les deux ordonnées BE et GF.

Prenons un point quelconque M ayant pour coordonnées (x, y) et désignons par v le volume engendré par BMPE. Si l'on donne à x un accroissement $PP' = h = \Delta x$, v sera augmenté du volume Δv engendré par MM'P'P. Or, quel que soit l'accroissement h, on conçoit qu'il est toujours possible de construire un rectangle QQ'P'P de manière que le volume qu'il engendrera en tournant autour de l'axe des X soit équivalent au volume engendré par MM'P'P et il est visible que QQ' devra pour cela rencontrer l'arc MM' en un point M'' situé entre M et M', puisque les deux volumes de révolution ne sont équivalents que si les volumes engendrés par M'M''Q' et MM''Q situés l'un au-dessus et l'autre au-dessous de QQ', sont eux-mêmes équivalents; la distance PP'' sera donc une portion de PP' ou h, et pourra être exprimée par θh, θ étant compris entre zéro et l'unité. Le volume engendré par le rectangle QQ'P'P est exprimé par $\pi . PP' . M''P''^2 = \pi h [f(x + \theta h)]^2$ et il viendra

$$\Delta v = \pi \Delta x [f(x + \theta h)]^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} = \pi [f(x + \theta h)]^2.$$

Comme cette relation doit subsister pour toute valeur de h, on peut faire converger h vers zéro, sans que θ cesse d'être inférieur à l'unité, et il vient alors

$$\frac{dv}{dx} = \pi (fx)^2 = \pi y^2,$$

d'où l'on tire

$$dv = \pi y^2 dx, \quad v = \pi \int y^2 dx.$$

On serait arrivé au même résultat par la considération des infiniment petits, en observant que si PP' est égal à dx, le volume de la tranche infiniment mince engendrée par PMM'P' est $\pi y^2 dx$.

Pour la parabole, on a

$$y^2 = 2px, \quad v = \pi \int y^2 dx = 2\pi p \int x dx = \pi p x^2 + C,$$

et, en prenant l'intégrale depuis le sommet,

$$v = \pi p x^2 = \frac{1}{2} \pi y^2 x;$$

le volume est donc la moitié de celui du cylindre circonscrit. Pour l'ellipse on a

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

$$v = \pi \int y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2}\int (a^2 - x^2)\, dx = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) + C,$$

et en prenant le volume entier de l'ellipsoïde de révolution, ce qui revient à prendre l'intégrale depuis $x = -a$ jusqu'à $x = a$, on trouve

$$v = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Pour l'hypocycloïde, dont l'équation est

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}},$$

on a

$$v = \pi \int_{-l}^{+l} \left(l^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \pi \int_{-l}^{+l} \left(l^2 - 3\, l^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3\, l^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) dx = \frac{32}{105}\pi l^3.$$

Le volume engendré par l'aire MM'N'N (fig. 33) comprise entre deux courbes MM', NN' et deux parallèles MN et M'N' à l'axe des Y, s'obtient en évaluant séparément les volumes engendrés par PMM'P' et PNN'P' et en prenant leur différence; on a donc, en représentant par v le volume cherché, par $y = fx$ et $y = \varphi x$ les équations des deux courbes et par m et n les valeurs extrêmes de x, en supposant que les courbes ne rencontrent pas l'axe des X entre les limites m et n,

$$v = \pi \int_m^n (fx)^2\, dx - \pi \int_m^n (\varphi x)^2\, dx = \pi \int_m^n [(fx)^2 - (\varphi x)^2]\, dx.$$

Si les équations des deux courbes CD et C'D' (fig. 33) sont

$$Y = fx \quad \text{et} \quad y = \varphi x,$$

on peut mettre la valeur de v sous la forme

$$v = \pi \int_m^n (Y^2 - y^2)\, dx = \pi \int_m^n (Y + y)(Y - y)\, dx.$$

Or, si les deux branches CD et C'D' sont symétriques des deux côtés d'une droite AB parallèle à l'axe des X, il est évident que PM + PM' ou $Y + y$ sera constant et égal au double de la distance PN $= l$ de la droite à l'axe, et l'expression du volume devient

$$v = 2\pi l \int_m^n (Y - y)\, dx,$$

ou plutôt d'après ce qu'on a vu à la fin du N° 148,

$$v = 2\pi l . u,$$

en désignant par u l'aire comprise entre les deux courbes. Il résulte de là que le volume d'un semblable corps est représenté par le produit de l'aire CC'DD' de la surface génératrice, par la circonférence ayant pour rayon la distance de l'axe de rotation à la droite qui sépare l'aire en deux parties symétriques. Ainsi le volume engendré par un cercle tournant autour d'une droite est égal au produit de l'aire du cercle par la circonférence décrite par son centre.

Le théorème subsisterait encore si la courbe supérieure était inversement symétrique à la branche inférieure, comme cela aurait lieu pour une ellipse; car on pourrait, sans changer le volume, tourner la branche inférieure de manière à la rendre directement symétrique à la branche supérieure. Le volume engendré a donc la même expression que celui du cercle.

154. *Quadrature des surfaces de révolution.* — Soit $y = fx$ l'équation d'une courbe AB (fig. 36) qui, en tournant autour de l'axe des X, engendre une surface de révolution. Représentons par u la surface engendrée par l'arc AM $= s$ et par (x, y) les coordonnées du point M. Si l'on donne à x un accroissement PP' $= h = \Delta x$, assez petit pour que MM' soit concave ou convexe dans toute son étendue, on sait que la surface Δu engendrée par MM' est comprise entre celle qu'engendre la corde MM' et celle qu'engendre un polygone enveloppant MNM', que nous formerons en menant au point M la tangente MN. On trouve facilement pour les surfaces troncconiques engendrées par MN et MM',

$$\pi \sqrt{h^2 + h^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \left(2y + h\frac{dy}{dx}\right), \quad \pi \sqrt{h^2 + \Delta y^2}\,(2y + \Delta y),$$

et pour la surface annulaire engendrée par NM′,

$$\pi\left(y + h\frac{dy}{dx}\right)^2 - \pi(y + \Delta y)^2$$

$$= \pi h\left[h\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - h\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + 2y\frac{dy}{dx} - 2y\frac{\Delta y}{\Delta x}\right];$$

on est donc conduit aux deux inégalités suivantes, en divisant les deux membres par h ou Δx,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} > \pi\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\left(2y + h\frac{\Delta y}{\Delta x}\right),$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} < \pi\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(2y + h\frac{dy}{dx}\right)$$

$$+ \pi\left[h\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - h\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + 2y\frac{dy}{dx} - 2y\frac{\Delta y}{\Delta x}\right],$$

qui doivent subsister quel que petit que soit h, et par conséquent pour la limite de ses valeurs décroissantes ou pour $h = 0$. A cette limite, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ deviennent $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$, les seconds membres des deux inégalités se réduisent à $2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; on a donc

$$\frac{du}{dx} = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

d'où l'on tire

$$du = 2\pi y\,dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \quad \text{et} \quad u = 2\pi\int y\,dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$u = 2\pi\int y ds,$$

résultat auquel conduit immédiatement la théorie des infiniment petits, puisque si l'on prend PP′ égal à dx, la surface tronconique engendrée par MM′ ou du est égale à $2\pi y . ds = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Pour le paraboloïde de révolution, on a

$$u = 2\pi \int y \sqrt{\frac{p^2}{y^2} + 1}\, \frac{ydy}{p} = \frac{\pi}{p} \int \sqrt{p^2 + y^2}\, 2ydy = \frac{2}{3}\frac{\pi}{p}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Si la surface commence au sommet du paraboloïde, il vient

$$u = \frac{2}{3}\frac{\pi}{p}\left\{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right\}.$$

Pour l'ellipsoïde, on trouve

$$u = 2\pi \int \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{\frac{b^4x^2}{a^2b^2(a^2 - x^2)} + 1}\, dx$$

$$= 2\pi \frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2}$$

et en représentant $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ par e^2,

$$u = \pi \sqrt{1 - e^2} \left\{ x\sqrt{a^2 - e^2x^2} + \frac{a^2}{e} \text{arc sin} \frac{ex}{a} \right\} + C.$$

En prenant l'intégrale dans toute l'étendue de l'ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire, depuis $x = -a$ jusqu'à $x = +a$. on trouve

$$u = 2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \left\{ \sqrt{1 - e^2} + \frac{\text{arc sin } e}{e} \right\} = 2\pi a^2 (1 - e^2) + 2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}\, \frac{\text{arc sin } e}{e}.$$

Si a était plus petit que b, la forme de l'intégrale serait différente et l'on aurait en posant $\sqrt{b^2 - a^2} = be'$,

$$u = 2\pi a^2 \left(\frac{1}{1 - e'^2} + \frac{1}{2e'} \log \frac{1 + e'}{1 - e'} \right).$$

Si on suppose e et e' nuls dans ces deux valeurs, l'ellipsoïde devient une sphère, et on trouve $u = 4\pi a^2$.

Pour l'hypocycloïde tournant autour de l'axe des X, on a

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$u = 2\pi \int_{-l}^{+l} y\,dx \sqrt{\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} + 1} = 2\pi \int_{-l}^{+l} l^{\frac{1}{3}} y \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = -2\pi l^{\frac{1}{3}} \int_{-l}^{+l} y^{\frac{2}{3}}\,dy = \frac{12}{5}\pi l^2.$$

155. *Problèmes divers.* — Dans les applications du calcul intégral qui précèdent, nous avons cherché certaines propriétés de courbes données, relatives aux aires, aux arcs, etc.; mais on peut aussi se proposer de déterminer ces courbes par la condition que les aires, les arcs, etc., jouissent de certaines propriétés déterminées. Supposons, par exemple, que l'on demande l'équation de la courbe dans laquelle l'aire comprise entre celle-ci, une abscisse et une ordonnée, est proportionnelle au cube de l'abscisse. En désignant cette aire par u et l'abscisse par x, on a pour équation de condition

$$u = ax^3.$$

Or, en dérivant les deux membres, il vient

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2,$$

et comme on sait que $\frac{du}{dx}$ est égal à y, on trouve pour équation de la courbe,

$$y = 3ax^2$$

qui appartient à une parabole.

Si l'aire u devait être proportionnelle au logarithme de l'abscisse, on aurait

$$u = a \log x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{a}{x} \quad \text{ou} \quad xy = a$$

qui appartient à une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.

Proposons-nous encore de trouver la courbe dans laquelle le carré de l'arc est proportionnel à l'abscisse, c'est-à-dire, dans laquelle on a

$$s^2 = 8ax \quad \text{ou} \quad s = 2\sqrt{2ax}.$$

En dérivant et remplaçant $\frac{ds}{dx}$ par $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, on trouve

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\frac{2a}{x}},\quad \text{d'où}\quad dy=dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}},$$

et en intégrant depuis $(x=0,\ y=0)$, il vient

$$y=a\ \text{arc sin}\ \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}+\sqrt{2ax-x^2},$$

qui appartient à une cycloïde. Enfin pour trouver la courbe dans laquelle l'aire u est proportionnelle à l'arc s, ou dans laquelle on a

$$u=as,$$

on dérivera par rapport à x les deux membres de cette équation, et en remplaçant $\frac{du}{dx}$ et $\frac{ds}{dx}$ par y et $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, il vient

$$y=a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad \text{d'où}\quad dx=\frac{ady}{\sqrt{y^2-a^2}},$$

et en intégrant depuis $(x=0,\ y=a)$, on trouve

$$\sqrt{y^2-a^2}-y=-ae^{-\frac{x}{a}}.$$

Si on résout cette équation par rapport à y, il vient

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

qui appartient à la chaînette.

CHAPITRE XI.

Cubature des corps terminés par des surfaces quelconques. — Applications. — Projection d'une surface plane. — Quadrature d'une surface quelconque. Applications. — Cubatures et quadratures dans des cas particuliers. — Transformation des intégrales doubles.

156. *Cubature des corps terminés par des surfaces quelconques.* — Soit $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface BCD (fig. 37) rapportée à trois axes rectangulaires, (x, y, z) les coordonnées d'un point M et v le volume d'une portion du corps limitée par la surface QMND et deux plans QMPq et NMPn parallèles aux plans des XZ et des YZ. Le volume v est évidemment une fonction de (x, y), puisqu'il change avec la position du point M, et un accroissement $h = nn'$ donné à x fera prendre à v un accroissement représenté par la tranche NN'nn'PP'MM' et exprimé par $\frac{dv}{dx}h + \frac{d^2v}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} +$ etc. Un accroissement $k = qq'$ donné à y dans cette dernière expression, que nous représenterons par u, donnera à la tranche NN'nn'PP'MM' un accroissement représenté par le prisme MM'mm'PP'pp' et exprimé par $\frac{du}{dy}k + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} +$ etc., en sorte que l'on aura, en remplaçant u par sa valeur,

$$\text{MM}'mm'\text{PP}'pp' = \frac{d^2v}{dxdy}hk + \frac{d^3v}{dx^2dy}\frac{h^2k}{1.2} + \frac{d^3v}{dxdy^2}\frac{hk^2}{1.2}\text{etc.}$$

Considérons à part le prisme MM'mm'PP'pp' (fig. 38) et concevons un parallélipipède RR'rr'PP'pp' équivalent au précédent et construit

sur la même base; comme il doit y avoir compensation entre les volumes placés au-dessus et au-dessous du plan RR'rr' et compris entre ce plan et la surface MM'mm', il en résulte nécessairement que ce plan doit couper la surface MM'mm' dans l'intérieur du quadrilatère curviligne MM'mm'; donc si z' est la hauteur de ce parallélipipède, z' sera une ordonnée de la surface, correspondant à des coordonnées $(x+h')$ et $(y+k')$, h' et k' étant moindres que h et k; on pourra donc poser

$$z' = f(x+h',\ y+k') = f(x+\theta h,\ y+\theta' k),$$

θ et θ' restant compris entre zéro et l'unité. En égalant les volumes du prisme et du parallélipipède et en observant que $z=f(x,y)$, il vient

$$\frac{d^2v}{dxdy}hk + \frac{d^3v}{dx^2dy}\frac{h^2k}{1.2} + \text{etc.} = hk.f(x+\theta h,\ y+\theta' k).$$

Si l'on supprime le facteur commun hk et si on observe que cette égalité doit subsister pour toute valeur de h et k, y compris zéro, sans que θ et θ' cessent d'être compris entre zéro et l'unité, il vient en passant à la limite,

$$\frac{d^2v}{dxdy} = f(x,y) = z, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2v}{dxdy}dxdy = zdxdy.$$

Or le premier membre représente la différentielle deuxième de v prise successivement par rapport à (x, y); on aura donc, en intégrant deux fois et successivement par rapport à ces deux variables indépendantes, entre les limites 0 et x, pour la première, et 0 et y pour la seconde,

$$v = \int\int zdxdy = \int\int f(x,y)\,dxdy,$$

l'un des signes d'intégration se rapportant à la variable x, y étant traité comme constant, et l'autre à la variable y. L'ordre suivant lequel on effectue la double opération indiquée par cette *intégrale double* est indifférent; car si on avait donné aux deux variables indépendantes les accroissements h et k dans un ordre inverse, on aurait trouvé

$$\frac{d^2v}{dydx} = z, \quad \text{au lieu de} \quad \frac{d^2v}{dxdy} = z,$$

et il est visible que pour remonter à la valeur de v, il eut fallu intégrer dans un ordre inverse. Cette proposition ne cesse d'être vraie que

lorsqu'il y a solution de continuité dans la fonction z, c'est-à-dire, lorsque celle-ci devient infinie pour des valeurs des variables comprises entre les limites des intégrations.

On serait arrivé au même résultat par la considération des infiniment petits, en remarquant que le volume QMNDqPnA (fig. 37) peut être considéré comme composé de tranches QMmQ'qPpq' infiniment minces, parallèles au plan des XZ, et que chaque tranche est composée de prismes MM'$m'm$PP'$p'p$ infiniment étroits. Or le volume d'un prisme est $zdxdy$; le volume d'une tranche parallèle à XZ est donc la somme de toutes les valeurs de $zdxdy$, c'est-à-dire $dy \int zdx$ qui est formé du produit de l'épaisseur dy par $\int zdx$ ou la surface QMPq, et le volume total ou la somme des tranches est $\int dy \int zdx$, que l'on écrit ordinairement de cette manière :

$$\int\int zdxdy,$$

pourvu, bien entendu, que la fonction z reste finie et continue dans les limites des intégrations, sans quoi les sommes ne seraient plus représentées par les intégrales.

Les deux intégrations successives introduisent deux constantes arbitraires, et si l'on se place au point de vue purement analytique, la première intégration ayant lieu par rapport à y, sans que x varie, la première constante arbitraire pourra contenir des x d'une manière quelconque, puisqu'on traite celle-ci comme invariable pendant la première opération, et la seconde constante pourra être une fonction arbitraire de y pour le même motif. Mais dans les applications, ces constantes prennent des valeurs déterminées; en effet, il résulte de ce qu'on vient de voir, que la première intégration est destinée à donner le volume de l'une des tranches dont se compose le corps, c'est-à-dire, l'aire de la section, multipliée par l'épaisseur dy de la tranche; il faut donc déterminer la constante de manière à embrasser l'aire entière de la section QMPq. La seconde intégration, destinée à prendre la somme de ces tranches, devra être étendue entre les deux limites du corps dans le sens de l'axe des Y, ce qui fixera la valeur de la deuxième constante arbitraire.

Si le volume au lieu d'être limité postérieurement par les plans des XZ et des YZ, l'était par des plans parallèles à ceux-ci et distants de x'' et y'', les deux intégrations, au lieu de se faire entre les limites zéro et x', zéro et y', devraient visiblement être faites entre les limites (x', x''), (y', y'').

Si le corps était compris, dans le sens de l'axe des Z, entre deux surfaces ayant pour équations

$$Z = F(x, y) \quad \text{et} \quad z = f(x, y),$$

il est évident que les prismes MM'mm'PP'pp', dont se compose le volume total, devraient être remplacés par la différence des deux prismes terminés aux deux surfaces, et qu'on aurait par conséquent

$$v = \int\int (Z - z)\, dxdy = \int\int \{ F(x, y) - f(x, y) \}\, dxdy.$$

157. *Applications.* — La détermination des constantes arbitraires ne présente aucune difficulté lorsque le corps est terminé, comme dans le numéro précédent, dans le sens des axes des X et des Y par des plans parallèles aux plans des YZ et des XZ; si, par exemple, il s'agit de déterminer le volume AqPnDQMN limité par des plans QP et NP parallèles aux plans coordonnés et distants de ceux-ci de y' et x', la surface QDNM étant celle d'un ellipsoïde rapporté à ses diamètres principaux, on aura pour équation de la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{d'où} \quad z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

et en intégrant d'abord par rapport à y, depuis $y = 0$ jusqu'à $y = y'$, il viendra

$$v = \int dx \int c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dy = \frac{c}{2}\int dx \left\{ y'\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} + b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \operatorname{arc\,sin} \frac{ay'}{b\sqrt{a^2 - x^2}} \right\},$$

dans laquelle y' est constant, et l'on n'aura plus qu'à intégrer une différentielle de la forme $\varphi x dx$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x'$.

Considérons encore le paraboloïde hyperbolique qui a pour équation

$$z = axy,$$

et cherchons le volume compris entre cette surface, le plan des XY, deux plans parallèles à XZ et distants de y' et y'', et enfin deux plans parallèles à YZ et distants de x' et x''; la première intégration devra

se faire entre les limites fixes y' et y'' et la seconde entre les limites fixes x' et x''. On trouvera

$$v = a(x'' - x')(y'' - y')\frac{x'y' + x'y'' + x''y' + x''y''}{4}.$$

En désignant par z', z'', z''', z'''' les quatre ordonnées de la surface qui correspondent aux quatre sommets de la base rectangulaire et observant que l'on a, à cause de l'équation de la surface,

$$z' = ax'y', \quad z'' = ax'y'', \quad z''' = ax''y', \quad z'''' = ax''y'',$$

cette valeur de v devient

$$v = (x'' - x')(y'' - y')\frac{z' + z'' + z''' + z''''}{4},$$

dans laquelle $(x'' - x')(y'' - y')$ est l'aire de la base rectangulaire de notre prisme, et $\frac{z' + z'' + z''' + z''''}{4}$ est une moyenne arithmétique entre ses quatre arêtes.

Si le volume n'était pas terminé par des plans parallèles aux plans coordonnés, s'il était par exemple, limité dans le sens de l'axe des Y par un cylindre DPMF (fig. 39) ayant ses génératrices parallèles à l'axe des Z, et dans le sens de l'axe des X, par un plan PnNM parallèle au plan des YZ, l'ordonnée y' du numéro précédent, qui représente la largeur totale Pn de la section MNnP ne serait plus la même pour toutes les tranches et par conséquent ne serait plus constante pendant la seconde intégration; mais comme l'équation de la base DE du cylindre est donnée, on connaîtra la valeur de Pn ou y' en fonction de On ou x, valeur qu'il faudra substituer avant d'effectuer la seconde intégration. Quant aux limites de cette seconde quadrature, on les prendra de manière à embrasser toutes les tranches parallèles à YZ.

Lorsque la limite latérale du volume, au lieu d'être un cylindre, est une surface quelconque donnée, la règle à suivre reste encore la même. On détermine en fonction de x l'aire d'une section parallèle au plan des YZ et distant d'une quantité x, on multiplie cette aire par dx ou par l'épaisseur de la tranche, et on intègre de nouveau entre les limites extrêmes du volume dans le sens de l'axe des X, de manière à embrasser le volume entier.

Quand dans une intégrale double $\int\int z dx dy$, la fonction z reste continue dans toute l'étendue de la double intégration, l'ordre des intégrations est différent. C'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque les limites sont des plans parallèles aux plans coordonnés. Cela ne serait plus vrai s'il y avait solution de continuité. Qu'il s'agisse, par exemple, d'évaluer le volume DPnOFMNC; une première intégration faite par rapport aux y conduit à l'aire de la section MNnP, et la seconde intégration a pour effet de prendre la somme des tranches depuis FC jusqu'à MN, ce qui embrasse le corps entier. Si, au contraire, on commence par intégrer par rapport à x, on déterminera l'aire de la tranche QQ'RR', mais la seconde intégration n'aura plus pour effet de prendre la somme de toutes les tranches parallèles à XZ depuis CN jusqu'à FM, car jusqu'au point M la largeur des tranches est égale à On, tandis que depuis M jusqu'à F cette largeur est continuellement variable, c'est-à-dire qu'il y a en M solution de continuité dans la largeur des tranches.

Proposons-nous, par exemple, de trouver le volume d'un cylindre élevé perpendiculairement au plan des XY, ayant pour base un cercle du rayon r dont le centre soit placé au point qui a pour coordonnées m, n et limité supérieurement par un paraboloïde elliptique qui a pour équation

$$z = ax^2 + by^2.$$

En désignant ce volume par v, il vient

$$v = \int\int z dx dy = \int dx \int (ax^2 + by^2)\, dy = \int dx \left(ax^2 y + \frac{1}{3} by^3 + C \right).$$

Or, l'équation de la base du cylindre étant

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

on en tire

$$y = n \pm \sqrt{r^2 - (x - m)^2}$$

et les deux valeurs de y représentent les deux limites de cette première intégrale qui devient, en substituant,

$$v = \int 2dx \sqrt{r^2 - (x - m)^2} \left[ax^2 - \frac{b}{3}(x - m)^2 + bn^2 + \frac{b}{3} r^2 \right].$$

Une seconde intégration prise entre les valeurs extrêmes de x, c'est-à-dire, depuis $x = m - r$ jusqu'à $x = m + r$, donne enfin

$$v = \pi r^2 \left(am^2 + bn^2 + \frac{1}{4} ar^2 + \frac{1}{4} br^2\right).$$

Pour interpréter cette valeur, remarquons que si au centre du cercle on élève une ordonnée l jusqu'à la surface, et si l'on élève une seconde ordonnée l' au point pour lequel on a $x = r$ et $y = r$, il vient, à cause de l'équation de la surface,

$$l = am^2 + bn^2, \quad l' = ar^2 + br^2$$

et par conséquent

$$v = \pi r^2 \left(l + \frac{1}{4} l'\right);$$

le volume cherché est donc équivalent à un cylindre à base circulaire ayant r pour rayon de la base et $l + \frac{1}{4} l'$ pour hauteur.

158. *Projection d'une surface plane.* — Avant de nous occuper du problème de la quadrature des surfaces courbes, commençons par chercher le rapport qui existe entre une surface plane et sa projection orthogonale sur un plan donné; soit ABCD (fig. 40) une surface plane renfermée dans le plan XY et terminée par deux courbes quelconques BD, AC et deux ordonnées BF, DG. Projetons-la orthogonalement sur le plan XY′ et soit A′B′C′D′ sa projection. En désignant par a l'angle YOY′ que forment les deux plans, par Y et y les deux ordonnées PM et PN, et par Y′ et y' les deux ordonnées PM′ et PN′, les aires ABDC et A′B′C′D′ seront représentées par

$$\int (\mathrm{Y} - y)\, dx \quad \text{et} \quad \int (\mathrm{Y}' - y')\, dx,$$

les deux intégrales étant prises entre les mêmes limites OF et OG; or les triangles rectangles PMM′ et PNN′ donnent

$$y' = y \cos a, \quad \mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \cos a,$$

d'où

$$\mathrm{Y}' - y' = (\mathrm{Y} - y) \cos a,$$

et par conséquent, en représentant par S et s les aires ABCD et A'B'C'D', il vient

$$s = \int (Y' - y')\, dx = \cos a \int (Y - y)\, dx = S \cos a.$$

Ainsi, pour avoir la projection d'une aire plane sur un plan donné, il suffit de la multiplier par le cosinus de l'angle que forment les deux plans.

Il suit de là, que si l'on projette une surface plane sur trois plans formant un système de plans rectangulaires, le carré de la surface plane sera égale à la somme des carrés des trois projections, puisque la somme des carrés des trois cosinus est égale à l'unité.

159. *Quadrature d'une surface quelconque. Applications.* — Considérons maintenant une surface MNDQ (fig. 57) limitée par deux sections MN et MQ parallèles aux plans YZ et XZ. Soient (x, y, z) les coordonnées du point M, et u cette surface; u sera dans tous les cas une fonction de (x, y), et si on y donne à x un accroissement $nn' = h$, cette surface prendra un accroissement exprimé par

$$\frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

représentant la surface de la bande MM'NN'. Si dans cette dernière expression on donne aux y un accroissement $qq' = k$, celle-ci sera, comme on l'a vu quand on s'est occupé de la série de Taylor étendue aux fonctions de deux variables, augmentée de

$$\frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2k}{1.2} + \text{etc.}$$

qui est la surface du quadrilatère courbe MM'$m'm$. Or, je dis qu'il existe nécessairement sur cette surface et dans l'intérieur du quadrilatère un point tel que si on y mène un plan tangent, celui-ci formera avec les faces latérales du prisme prolongées, un parallélogramme équivalent au quadrilatère curviligne; en effet, concevons la projection PP'pp' du quadrilatère courbe MM'mm', divisée d'une manière quelconque en n parties s, s', s''..... correspondant à n divisions du quadrilatère. Si en un point quelconque pris dans chacune de ces dernières divisions on mène des plans tangents à la surface, les portions de ces plans comprises dans les plans projettants des contours de ces divi-

sions seront représentées par $\frac{s}{\cos \varepsilon}$, $\frac{s'}{\cos \varepsilon'}$,..... ou $s \sec \varepsilon$, $s' \sec \varepsilon'$,.... ε, ε'..... désignant leurs inclinaisons sur le plan des XY.

Si toutes les projections s, s', s''..... sont équivalentes, en désignant par n leur nombre, l'une d'elles sera $\frac{PP'p'p}{n}$ ou $\frac{hk}{n}$ et la somme des facettes tangentes à la surface sera donnée par

$$s(\sec \varepsilon + \sec \varepsilon' + \sec \varepsilon''.....) = hk\left(\frac{\sec \varepsilon + \sec \varepsilon' + \sec \varepsilon''.....}{n}\right),$$

c'est-à-dire, qu'elle sera égale à l'aire du rectangle $PP'p'p$ multipliée par une moyenne arithmétique entre les sécantes des inclinaisons des facettes sur la base. Ce résultat étant indépendant du nombre de faces, sera encore vrai à la limite, c'est-à-dire, lorsque l'ensemble des facettes deviendra la surface courbe $MM'm'm$ elle-même; et alors les inclinaisons des faces du polyèdre sur la base ne sont autres que les inclinaisons des plans tangents aux différents points du quadrilatère courbe; on voit donc que la surface du quadrilatère courbe est donnée par le produit $hk \sec \eta$, de la projection $PP'p'p$ ou hk, par une moyenne arithmétique $\sec \eta$ entre les sécantes des inclinaisons sur la base des plans tangents menés aux différents points de cette surface. Si cette surface est continue dans l'étendue du quadrilatère, ces inclinaisons doivent varier d'une manière continue depuis la plus grande jusqu'à la plus petite et par conséquent il doit exister dans l'intérieur un certain point auquel correspond cette valeur moyenne $\sec \eta$ et en y menant un plan tangent prolongé jusqu'aux faces du prisme, l'aire du parallélogramme que l'on formera, ayant aussi pour projection le rectangle $PP'p'p$, aura également pour mesure $\frac{hk}{\cos \eta} = hk \sec \eta$, ce qui vérifie la proposition énoncée plus haut.

Si les coordonnées du point en question étaient (x, y, z), $\cos \eta$ serait égal à $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$ et par conséquent $\sec \eta$ serait donné par $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$; mais ce point étant un de ceux du quadrilatère curviligne, a pour coordonnées $x + \theta h$ et $y + \theta' k$, en

désignant par θ et θ' des coefficients inconnus dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1; les dérivées sous le radical devront donc être remplacées par

$$\frac{dz}{dx} + \theta h \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{\theta^2 h^2}{1.2}\frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.},$$

$$\frac{dz}{dy} + \theta' k \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{\theta'^2 k^2}{1.2}\frac{d^3z}{dy^3} + \text{etc.},$$

et il vient, en égalant les deux expressions de la surface du quadrilatère, et supprimant le facteur commun hk,

$$\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h}{1.2} + \text{etc.}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} + \theta h \frac{d^2z}{dx^2} + \text{etc.}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} + \theta' k \frac{d^2z}{dy^2} + \text{etc.}\right)^2}.$$

Cette égalité existe, quelque petits que soient h et k. A la limite on trouve

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

$$\frac{d^2u}{dxdy}dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy$$

et par conséquent, en intégrant deux fois par rapport aux deux variables indépendantes,

$$u = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy.$$

La considération des infiniment petits conduit à cette formule d'une manière fort expéditive; en effet, si h et k sont infiniment petits et égaux à dx et dy, la surface $MM'm'm$ sera sensiblement plane et sera comprise dans le plan tangent en M. Le cosinus de l'inclinaison du plan tangent sur le plan XY est $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$ et comme

la projection de $MM'm'm$ sur le même plan est $dxdy$, ce quadrilatère a pour surface

$$dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Or la surface de la bande $MNN'M'$ qui se compose de tous les quadrilatères semblables au précédent et correspondant à la même abscisse x et aux différentes valeurs de y, est représentée par

$$\int dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=dx\int dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

et la surface entière, composée de la somme de toutes les bandes parallèles au plan des YZ correspondant aux différentes valeurs de x, est représentée par

$$\int dx\int dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\quad\text{ou}\quad\iint dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

L'ordre suivant lequel on effectue la double intégration est encore indifférent, comme on l'a vu plus haut, pourvu que le radical ne cesse pas d'être fini et continu entre les limites des intégrations.

Dans les applications cette intégrale double doit être traitée de la même manière que dans le cas des cubatures. Si la surface est limitée par des plans parallèles aux plans des XZ et YZ, il faut tirer de l'équation de la surface les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, les substituer dans la formule précédente et intégrer d'abord par rapport à x, depuis $x=x'$ jusqu'à $x=x''$. On intégrera ensuite par rapport à y entre les limites

$$y=y'\quad\text{et}\quad y=y''.$$

Prenons pour exemple la surface ayant pour équation

$$z^2=2xy,\quad \frac{dz}{dx}=\frac{y}{z},\quad \frac{dz}{dy}=\frac{x}{z};$$

il vient

$$u=\iint dxdy\sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}}=\iint\frac{y+x}{\sqrt{2xy}}dxdy,$$

et en intégrant successivement entre les limites indiquées ci-dessus, on trouve

$$u=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left\{(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})(\sqrt{y''^3}-\sqrt{y'^3})+(\sqrt{y''}-\sqrt{y'})(\sqrt{x''^3}-\sqrt{x'^3})\right\}.$$

Si la surface NDQM était comptée depuis DN et DQ ou depuis les plans des XZ et des YZ, on ferait x' et y' nuls dans l'intégrale précédente.

Quand la surface FGC (fig. 39) est limitée par une courbe FG ayant DE pour projection, la valeur de y'' ou la largeur Pn de la bande MN ne sera plus constante pendant la seconde intégration, et il faudra suivre une marche en tout point semblable à celle indiquée (N° 157) pour le cas de la cubature.

Prenons pour exemple la sphère dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z},\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}$$

et proposons-nous d'étendre l'intégrale à toute la portion ABC de la sphère comprise dans l'angle trièdre AXYZ. La courbe qui limite cette surface est évidemment un grand cercle AB de la sphère ayant pour équation

$$x^2+y'^2=r^2;\quad \text{d'où l'on tire } y'=\sqrt{r^2-x^2}$$

dans laquelle On est x et nP' est y'; et comme l'intégrale doit être prise entre les limites n et P', c'est-à-dire, $y'=0$ et $y'=n\text{P}'=\sqrt{r^2-x^2}$, il vient après une première intégration,

$$u=\iint dxdy\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=r\iint\frac{dxdy}{z}=r\int dx\int_0^{y'}\frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},$$

$$u=r\int dx\arcsin\frac{y'}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\int dx\arcsin\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{\pi rx}{2}+C;$$

et en prenant cette seconde intégrale depuis O jusqu'à A, ou depuis $x=0$ jusqu'à $x=r$, on trouve

$$U=\frac{\pi r^2}{2}$$

pour la surface d'un huitième de la sphère.

160. *Cubatures et quadratures dans des cas particuliers.* — Lorsqu'un corps ou une surface courbe est décomposable en tranches ou en bandes dont les volumes ou les surfaces sont connus, on trouve l'expression du volume ou de la surface du corps en n'effectuant qu'une seule intégration. Prenons pour exemple l'onglet cylindrique DCBED (fig. 41) formé par l'intersection du cylindre ADBEC'C'' et d'un plan DCE. La surface convexe EBCDB peut être considérée comme composée de bandes infiniment étroites $MmNn$ dont l'aire est $MN \times Nn$; or, si l'on mène un plan FMN perpendiculaire à l'intersection DE et que l'on pose

$$GN = x, \quad OH = GF = a, \quad OG = y, \quad BC = b, \quad OB = r,$$

en remarquant que les triangles FMN et HCB sont semblables, on aura

$$MN = b\frac{a+x}{a+r},$$

et en appelant u la surface convexe EMN, il viendra, en remarquant que Nn est l'élément ds de l'arc EN, que nous supposons être un cercle,

$$u = \int b\frac{a+x}{a+r}ds;$$

mais l'équation du cercle EN donne

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad ds = dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

donc

$$u = \frac{br}{a+r}\int\frac{(a+x)}{\sqrt{r^2-x^2}}dx = \frac{br}{a+r}\left(a \arcsin\frac{x}{r} - \sqrt{r^2 - x^2}\right) + C,$$

et en prenant l'intégrale depuis $x = -a$ jusqu'à $x = r$, on trouve pour la surface EBC,

$$\left[a \arccos\left(-\frac{a}{r}\right) + \sqrt{r^2 - a^2}\right]\frac{br}{a+r},$$

$\arccos\left(-\frac{a}{r}\right)$ étant l'arc qui a pour cosinus $-\frac{a}{r}$. Une marche

analogue fera connaître le volume de cet onglet que l'on considérera comme composé de tranches perpendiculaires à BH et ayant la forme de rectangles. On trouve facilement pour ce volume,

$$v = \frac{ab}{a+r}\left[r^2 \arccos\left(-\frac{a}{r}\right) + \frac{2r^2+a^2}{3a}\sqrt{r^2-a^2}\right].$$

Pour avoir la surface d'une voûte à arc de cloître EABDC (fig. 42) qui se projette verticalement suivant le demi cercle AMB, on considérera chaque face AEC comme composée de bandes parallèles $mm'n'n$ qui ont pour surface $mn \times \mathrm{MM'}$; or, il est facile de voir que $mn = ma = \mathrm{MN}$, et si l'on fait $\mathrm{MP} = x$ et $\mathrm{OP} = y$, l'équation du cercle AHB établit entre x et y la relation

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

En appelant u la surface AEC, et prenant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = r$, il vient

$$u = \int mn \times \mathrm{MM'} = \int_0^r 2x ds = 2\int_0^r x dx \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$$

$$= 2r\int_0^r \frac{x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2r^2.$$

On obtiendra de même le volume renfermé entre le plan horizontal ABDC et les quatre faces AEC, AEB, BED et DEC, en considérant ce volume comme composé de tranches horizontales $mnbam'n'b'a'$ qui ont toutes la forme de carrés et dont le volume est $mn^2.\mathrm{PP'}$. On trouve

$$v = \int_0^r 4x^2 dy = \int_0^r 4(r^2 - y^2) dy = \frac{8}{3}r^3.$$

161. *Transformation des intégrales doubles.* — La recherche de la valeur d'une intégrale double est souvent facilitée par des transformations qui consistent à substituer aux coordonnées rectangulaires (x, y, z), de nouvelles coordonnées (p, q, r) convenablement choisies. Supposons qu'il existe entre les anciennes variables indépendantes (x, y) et les nouvelles (p, q), les relations

$$x = f(p, q), \quad y = F(p, q) \ldots . (1)$$

comme les variables (x, y) sont indépendantes, on peut différencier ces deux équations par rapport à y en laissant x constant, c'est-à-dire, en posant $dx = 0$, ou par rapport à x, en posant $dy = 0$. Dans le premier cas il vient

$$0 = \frac{df}{dp}dp + \frac{df}{dq}dq, \quad dy = \frac{dF}{dp}dp + \frac{dF}{dq}dq,$$

d'où

$$dy = \left(\frac{dF}{dq} - \frac{dF}{dp}\frac{\frac{df}{dq}}{\frac{df}{dp}} \right) dq \ldots\ldots (2).$$

Dans le second cas, on trouve

$$dx = \frac{df}{dp}dp + \frac{df}{dq}dq.$$

Cette différentielle est prise dans l'hypothèse de y constant ou de $dy = 0$, ce qui n'est possible, à cause de l'équation (2), que si $dq = 0$; cette dernière équation se réduit donc à

$$dx = \frac{df}{dp}dp.$$

Les formules pour les cubatures et les quadratures

$$v = \int\int z\,dxdy, \quad u = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy$$

deviennent en remplaçant $z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ par leur valeur en (x, y), puis en remplaçant ces variables par leur valeur donnée en (p, q),

$$v = \iint \psi(p, q) \left(\frac{df}{dp}\frac{dF}{dq} - \frac{dF}{dp}\frac{df}{dq} \right) dpdq,$$

$$u = \iint \psi'(p, q) \left(\frac{df}{dp}\frac{dF}{dq} - \frac{dF}{dp}\frac{df}{dq} \right) dpdq.$$

La valeur de $\psi(p, q)$ se détermine immédiatement, si l'on connaît

l'équation de la surface en coordonnées rectangulaires ainsi que les valeurs de (x, y) en (p, q), c'est-à-dire, si on a

$$z = \varphi(x, y), \quad x = f(p, q), \quad y = F(p, q),$$

puisque, en désignant pour abréger, par f et F les valeurs de x et de y, il vient

$$z = \varphi(f, F) = \psi(p, q).$$

Pour ce qui est de $\psi'(p, q)$ ou $\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$, on verra bientôt comment on peut trouver sa valeur d'une manière générale, en fonction des dérivées partielles des fonctions f et F et des nouvelles coordonnées; mais il est visible qu'on pourra dans tous les cas, chercher d'abord sa valeur en (x, y) et remplacer ensuite ces coordonnées par leur valeur en (p, q).

Si l'on prend pour (p, q, r) les coordonnées polaires dans l'espace, c'est-à-dire, la distance r d'un point à l'origine, l'angle p formé par ce rayon vecteur avec l'axe des X et l'angle q formé par le plan des XY avec le plan passant par le rayon vecteur et l'axe des X, on a les relations suivantes :

$$x = r\cos p, \quad y = r\sin p\cos q, \quad z = r\sin p\sin q$$

et les intégrales prennent la forme

$$v = \iint \psi(p, q)\left(r^2\sin^2 p\sin q - r\frac{dr}{dp}\cos p\sin p\sin q - r\frac{dr}{dq}\cos q\right)dpdq,$$

$$u = \iint \psi'(p, q)\left(r^2\sin^2 p\sin q - r\frac{dr}{dp}\cos p\sin p\sin q - r\frac{dr}{dq}\cos q\right)dpdq$$

dans lesquelles $\frac{dr}{dp}$ et $\frac{dr}{dq}$ sont les dérivées partielles tirées de l'équation de la surface mise sous la forme $r = F'(p, q)$.

En prenant pour p, q, r les distances d'un point de la surface aux trois axes coordonnés, c'est-à-dire, en posant

$$p^2 = y^2 + z^2, \quad q^2 = x^2 + z^2, \quad r^2 = y^2 + x^2,$$

les intégrales doubles deviennent

$$v = \iint \psi(p, q) \frac{r\left(p\frac{dr}{dq} + q\frac{dr}{dp}\right) dp dq}{\sqrt{p^2 - q^2 + r^2}\sqrt{-p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$u = \iint \psi'(p, q) \frac{r\left(p\frac{dr}{dq} + q\frac{dr}{dp}\right) dp dq}{\sqrt{p^2 - q^2 + r^2}\sqrt{-p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Les limites de ces nouvelles intégrales doubles, comme celles des anciennes, doivent être fixées de manière à embrasser la totalité du volume ou de la surface que ces intégrales doivent représenter.

Enfin si l'on adoptait pour coordonnées, la perpendiculaire r abaissée d'un point de la surface sur l'axe des X, la distance x du pied de cette perpendiculaire à l'origine et l'inclinaison q de cette perpendiculaire sur le plan XY, on aurait

$$x = f(r, q)$$

pour équation de la surface et en outre

$$y = r\cos q, \quad z = r\sin q,$$

et les deux intégrales doubles prendraient la forme suivante, en écrivant x au lieu de la fonction f qui lui est égale et en remarquant que $\frac{dF}{dq}$ et $\frac{dF}{dr}$ ou $\frac{dy}{dq}$ et $\frac{dy}{dr}$ sont égaux à $-r\sin q$ et $\cos q$,

$$v = \iint r\sin q\left(\frac{dx}{dr} r\sin q + \frac{dx}{dq}\cos q\right) dr dq$$

$$u = \iint \psi'(r, q)\left(\frac{dx}{dr} r\sin q + \frac{dx}{dq}\cos q\right) dr dq.$$

Pour calculer $\psi'(r, q)$ ou $\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$, remarquons que les équations

$$y = r\cos q, \quad z = r\sin q$$

donnent

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad q = \text{arc tang}\,\frac{z}{y}$$

et que par conséquent l'équation en (x, y, z) est représentée par le système des trois équations

$$x = f(r, q), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad q = \text{arc tang}\,\frac{z}{y},$$

ou plutôt, par la première, en y concevant r et q remplacés par leur valeur en y et z donnée par les deux autres. En dérivant successivement cette première équation par rapport à x et par rapport à y, on trouve

$$1 = \left(\frac{dx}{dr}\frac{z}{r} + \frac{dx}{dq}\frac{y}{r^2}\right)\frac{dz}{dx},$$

$$0 = \frac{dx}{dr}\left(\frac{y}{r} + \frac{z}{r}\frac{dz}{dy}\right) + \frac{dx}{dq}\left(\frac{y\frac{dz}{dy} - z}{r^2}\right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{r}{r\frac{dx}{dr}\sin q + \frac{dx}{dq}\cos q},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dx}{dq}\sin q - r\frac{dx}{dr}\cos q}{r\frac{dx}{dr}\sin q + \frac{dx}{dq}\cos q}$$

et en substituant, la seconde intégrale double devient

$$u = \iint \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dq}\right)^2}\, drdq.$$

Quand la surface est de révolution autour de l'axe des X, l'équation de la courbe génératrice est de la forme

$$x = fr;$$

x est donc alors indépendant de q, $\frac{dx}{dq}$ est nul et les formules pour les cubatures et les quadratures deviennent

$$v = \iint \frac{dx}{dr} r^2 \sin^2 q dr dq,$$

$$u = \iint r \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2} dr dq,$$

ou, en effectuant l'intégration par rapport à q, entre les limites zéro et 2π, et remarquant que l'intégrale définie de $\sin^2 q dq$ est égale à π (N° 144),

$$v = \pi \int r^2 dx, \quad u = 2\pi \int r \sqrt{dx^2 + dr^2} = 2\pi \int r ds.$$

On retrouve ainsi les formules qui avaient été démontrées par une marche particulière, pour les corps et les surfaces de révolution (Nos 153, 154).

CHAPITRE XII.

Différentielles elliptiques. Transformation du radical en deux radicaux binômes du second degré. — Le facteur c^2 est toujours réel et plus petit que l'unité. — Transformation des différentielles elliptiques en trois différentielles irréductibles. — Première formule de réduction. — Seconde formule de réduction. — Troisième formule de réduction. — Transformation des trois différentielles irréductibles en transcendantes elliptiques. — Développement en séries des transcendantes elliptiques des deux premières espèces. — Construction des tables. — Développement en série de la fonction elliptique de troisième espèce, le paramètre étant positif. — Cas du paramètre négatif.

162. *Différentielles elliptiques. Transformation du radical en deux radicaux du second degré.* — Il existe une classe nombreuse de différentielles dont l'intégration en termes finis est impossible, mais qui peuvent toutes, par des transformations, être ramenées à un petit nombre de formes générales conduisant à des séries très convergentes. Ces différentielles sont comprises dans l'expression générale

$$\frac{P'dx}{\sqrt{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4}} \quad \text{ou} \quad \frac{Pdx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + x^4}}$$

dans laquelle P représente une fonction rationnelle quelconque de x. On les appelle d'une manière générale *différentielles elliptiques*, parce que le problème de la rectification de l'ellipse conduit à des différentielles de cette forme. On peut toujours faire en sorte que le polynôme placé sous le radical soit remplacé par un produit de la

forme $(p + qy^2)(p' + q'y^2)$; en effet si l'on décompose le polynôme en deux facteurs trinômes du second degré, de manière que l'on ait

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + x^4 = (\alpha + \beta x + x^2)(\alpha' + \beta' x + x^2),$$

qu'on remplace dans chaque trinôme x par $m + \frac{n}{1+y}$ et qu'après avoir réduit au même dénominateur, on égale à zéro les coefficients des premières puissances de y, les constantes indéterminées m et n seront données par les deux équations

$$2\alpha + 2\beta m + 2m^2 + \beta n + 2mn = 0$$

$$2\alpha' + 2\beta' m + 2m^2 + \beta' n + 2mn = 0$$

et les deux facteurs trinômes seront remplacés par $\frac{p + qy^2}{(1+y)^2}$ et $\frac{p' + q'y^2}{(1+y)^2}$ dans lesquels les constantes représentent

$$p = \alpha + \beta m + m^2 + \beta n + 2mn + n^2, \quad q = \alpha + \beta m + m^2,$$

$$p' = \alpha' + \beta' m + m^2 + \beta' n + 2mn + n^2, \quad q' = \alpha' + \beta' m + m^2.$$

Représentons par r, r' et r'', r''' les racines des équations

$$\alpha + \beta x + x^2 = 0, \quad \alpha' + \beta' x + x^2 = 0$$

c'est-à-dire les quatre racines de

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + x^4 = 0.$$

On sait que l'on a

$$\alpha = rr', \quad \beta = -r - r', \quad \alpha' = r''r''', \quad \beta' = -r'' - r'''.$$

En substituant ces valeurs dans les équations précédentes, on trouve en résolvant et convenant de représenter par $r - r''.r - r'''$, le produit des deux binômes $r - r''$ et $r - r'''$,.....(1)

$$m = \frac{rr' - r''r''' - \sqrt{r - r''.r - r'''.r' - r''.r' - r'''}}{r + r' - r'' - r'''}$$

$$n = \frac{2\sqrt{r - r''.r - r'''.r' - r''.r' - r'''}}{r + r' - r'' - r'''}$$

$$p=-\sqrt{r-r''.r-r'''.r'-r''.r'-r'''}\left\{\frac{\sqrt{r-r''.r-r'''}-\sqrt{r'-r''.r'-r'''}}{r+r'-r''-r'''}\right\}^2$$

$$q=\sqrt{r-r''.r-r'''.r'-r''.r'-r'''}\left\{\frac{\sqrt{r-r''.r-r'''}+\sqrt{r'-r''.r'-r'''}}{r+r'-r''-r'''}\right\}^2$$

$$p'=\sqrt{r-r''.r-r'''.r'-r''.r'-r'''}\left\{\frac{\sqrt{r-r''.r'-r''}+\sqrt{r-r'''.r'-r'''}}{r+r'-r''-r'''}\right\}^2$$

$$q'=-\sqrt{r-r''.r-r'''.r'-r''.r'-r'''}\left\{\frac{\sqrt{r-r''.r'-r''}-\sqrt{r-r'''.r'-r'''}}{r+r'-r''-r'''}\right\}^2$$

et le grand radical se trouve remplacé par

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{r-r''.r-r'''.r'-r''.r'-r'''}}{(r+r'-r''-r''')^2(1+y)^2}$$

$$\times\sqrt{(\sqrt{r-r''.r-r'''}-\sqrt{r'-r''.r'-r'''})^2-(\sqrt{r-r''.r-r'''}+\sqrt{r'-r''.r'-r'''})^2y^2}$$

$$\times\sqrt{(\sqrt{r-r''.r'-r''}+\sqrt{r-r'''.r'-r'''})^2-(\sqrt{r-r''.r'-r''}-\sqrt{r-r'''.r'-r'''})^2y^2}$$

qui, en faisant

$$z=y\frac{\sqrt{r-r''.r-r'''}+\sqrt{r'-r''.r'-r'''}}{\sqrt{r-r''.r-r'''}-\sqrt{r'-r''.r'-r'''}},\dots(2)$$

devient.....(3)

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{r-r''.r-r'''.r'-r''.r'-r'''}}{(r+r'-r''-r''')^2(1+y)^2}\times$$

$$(\sqrt{r-r''.r-r'''}-\sqrt{r'-r''.r'-r'''})(\sqrt{r-r''.r'-r''}+\sqrt{r-r'''.r'-r'''})\sqrt{1-z^2}$$

$$\times\sqrt{1-z^2\left\{\frac{\sqrt{r-r''.r-r'''}-\sqrt{r'-r''.r'-r'''}}{\sqrt{r-r''.r-r'''}+\sqrt{r'-r''.r'-r'''}}\right\}^2\left\{\frac{\sqrt{r-r''.r'-r''}-\sqrt{r-r'''.r'-r'''}}{\sqrt{r-r''.r'-r''}+\sqrt{r-r'''.r'-r'''}}\right\}^2}.$$

Il suit de là que la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+x^4}}$$

peut être transformée dans la suivante.....(4)

$$\frac{2\sqrt{-1}}{\left(\sqrt{r-r''.r'-r'''}+\sqrt{r-r'''.r'-r''}\right)\sqrt{1-z^2}}$$

$$\times\frac{dz}{\sqrt{1-z^2\left\{\dfrac{\sqrt{r-r''.r-r'''}-\sqrt{r'-r''.r'-r'''}}{\sqrt{r-r''.r-r'''}+\sqrt{r'-r''.r'-r'''}}\right\}^2\left\{\dfrac{\sqrt{r-r''.r'-r''}-\sqrt{r-r'''.r'-r'''}}{\sqrt{r-r''.r'-r''}+\sqrt{r-r'''.r'-r'''}}\right\}^2}}$$

que l'on peut mettre sous cette autre forme, en effectuant la multiplication sous le radical,....(5)

$$\frac{2\sqrt{-1}}{\sqrt{r-r'''.r'-r''}+\sqrt{r-r''.r'-r'''}}$$

$$\times\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z^2\left\{\dfrac{\sqrt{r-r''.r'-r'''}-\sqrt{r-r'''.r'-r''}}{\sqrt{r-r''.r'-r'''}+\sqrt{r-r'''.r'-r''}}\right\}^2}}$$

ou bien encore, en multipliant par $\sqrt{r-r''.r'-r'''}+\sqrt{r-r'''.r'-r''}$ les deux termes de la fraction sous le radical dans l'expression précédente et par $\sqrt{r-r''.r'-r''}-\sqrt{r-r'''.r'-r'''}$ les deux termes de la fraction hors du radical,....(6)

$$-\frac{2\sqrt{-1}}{r''-r'''}\cdot\frac{\sqrt{r-r''.r'-r''}-\sqrt{r-r'''.r'-r'''}}{\sqrt{r-r''.r-r'''}+\sqrt{r'-r''.r'-r'''}}\,\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\times\frac{dz}{\sqrt{1-z^2\dfrac{(r-r')^2(r''-r''')^2}{\left[2rr'+2r''r'''-(r+r')(r''+r''')+2\sqrt{r-r''.r-r'''.r'-r''.r'-r'''}\right]^2}}}$$

c'est-à-dire qu'on peut dans tous les cas lui donner la forme

$$\frac{\mu dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}},\ldots(7)$$

μ et c^2 étant deux constantes connues.

165. *Le facteur c^2 est toujours réel et plus petit que l'unité.* — Avant d'introduire la fonction rationnelle P qui multiplie la différentielle générale elliptique, constatons que le coefficient c^2 est toujours réel et plus petit que l'unité.

Si les quatre racines r, r', r'', r''' sont réelles, la valeur de c^2 est évidemment réelle, puisque, en les rangeant dans l'ordre r, r', r'', r''' d'après leur grandeur algébrique, tous les facteurs placés sous les radicaux dans la transformée (5) seront positifs. Quant à μ il sera de la forme $n\sqrt{-1}$.

Si deux racines conjuguées, r et r' par exemple, sont imaginaires et de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et $a - b\sqrt{-1}$, en employant la transformée (6), il est visible que l'on aura

$$(r - r')^2 = (2b\sqrt{-1})^2 = -4b^2, \quad rr' = a^2 + b^2, \quad r + r' = 2a,$$

$$\sqrt{r - r''.r' - r''.r - r'''.r' - r'''} =$$

$$= \sqrt{(a - r'' + b\sqrt{-1})(a - r'' - b\sqrt{-1})(a - r''' + b\sqrt{-1})(a - r''' - b\sqrt{-1})}$$

$$= \sqrt{(a - r'')^2 + b^2}\sqrt{(a - r''')^2 + b^2}$$

et par conséquent c^2 sera encore réel, mais il change de signe à cause de la valeur de $(r - r')^2$ qui est $(2b\sqrt{-1})^2 = -4b^2$.

Si les deux couples de racines conjuguées r, r' et r'', r''' sont imaginaires et de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$ et $a' \pm b'\sqrt{-1}$, les facteurs $(r - r')^2$ et $(r'' - r''')^2$ dans la transformée (6) deviennent $(2b\sqrt{-1})^2 = -4b^2$, $(2b'\sqrt{-1})^2 = -4b'^2$ et comme on a aussi

$$rr' = a^2 + b^2, \quad r''r''' = a'^2 + b'^2, \quad r + r' = 2a, \quad r'' + r''' = 2a',$$

$$\sqrt{r - r''.r - r'''.r' - r''.r' - r'''} =$$

$$= \sqrt{a - a' + (b - b')\sqrt{-1})(a - a' + (b + b')\sqrt{-1})(a - a' - (b - b')\sqrt{-1})(a - a' - (b + b')\sqrt{-1})}$$

$$= \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}\sqrt{(a - a')^2 + (b + b')^2},$$

il est visible que c^2 est encore réel et positif.

Enfin, le coefficient c^2 est dans tous les cas plus petit que l'unité,

puisque la transformée (5) apprend que ce facteur est de la forme $\frac{u-v}{u+v}$. Il résulte aussi de cette discussion que les valeurs de m et n sont toujours réelles et qu'il en est de même de la valeur de z^2 exprimée en y^2, car en multipliant les deux membres de la fraction par $\sqrt{r-r''.r-r'''}+\sqrt{r'-r''.r'-r'''}$, on trouve

$$z^2 = y^2\frac{\left[(r+r')^2-(r+r')(r''+r''')+2r''r'''-2rr'-2\sqrt{r-r''.r-r'''.r'-r''.r'-r'''}\right]^2}{(r-r')^2(r+r'-r''-r''')^2}$$

ou

$$z^2 = \alpha^2 y^2$$

et l'on vient de voir que cette fraction α^2 positive ou négative se compose de termes toujours réels dans toute hypothèse faite sur les valeurs des racines r, r', r'', r'''.

164. *Transformation des différentielles elliptiques en trois différentielles irréductibles.* — Considérons maintenant la fonction rationnelle P qui multiplie la différentielle dont on vient de s'occuper. Si l'on y remplace, comme plus haut, x par $m+\frac{n}{1+y}$, on obtiendra évidemment pour P une nouvelle fonction rationnelle en y, ne contenant que des facteurs réels, puisque m et n sont réels, et qui dans sa plus grande généralité ne peut être qu'une fraction rationnelle décomposable par la division, dans sa partie entière et sa partie fractionnaire. Celle-ci se décomposera ensuite, par la méthode des fractions rationnelles, en fractions simples. Le développement de P se composera donc d'une suite de termes ayant les formes suivantes :

$$a,\quad ay^m,\quad \frac{a}{y-b},\quad \frac{ay+a'}{y^2+b},\quad \frac{ay+a'}{(y^2+b)^n},\quad \frac{a}{(y-b)^n},$$

dans lesquels a, a', b sont réels, et ces différentielles deviennent, en remplaçant y par sa valeur $\frac{z}{\alpha}=\alpha' z$,

$$a,\quad a\alpha'^m z^m,\quad \frac{a}{\alpha' z-b},\quad \frac{a\alpha' z+a'}{\alpha'^2 z^2+b},\quad \frac{a\alpha' z+a'}{(\alpha'^2 z^2+b)^n},\quad \frac{a}{(\alpha' z-b)^n}.$$

L'intégration complète de la différentielle $\frac{Pdx}{R}$, R désignant le

radical $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+x^4}$, sera donc ramenée aux intégrations des différentielles suivantes dans lesquelles μ est un facteur constant,

$$\frac{\mu dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}},\quad \frac{\mu z^m dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}},\quad \frac{\mu dz}{(z-b)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}},$$

$$\frac{\mu(az+a')dz}{(z^2+b)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}},\quad \frac{\mu(az+a')dz}{(z^2+b)^n\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}},\quad \frac{\mu dz}{(z-b)^n\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}}.$$

Parmi ces différentielles, les unes sont *irréductibles* et leur intégrale ne s'obtient que par les méthodes d'approximation dont nous parlerons plus loin. Telles sont les deux suivantes :

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}},\quad \frac{dz}{(z^2+b)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}},$$

auxquelles nous joignons la différentielle $\dfrac{\sqrt{1\mp c^2z^2}\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

Nous allons voir que les autres s'intègrent d'une manière complète par les méthodes connues ou sont réductibles à l'une de ces trois dernières formes.

165. *Première formule de réduction.* — Occupons-nous d'abord de la différentielle

$$\frac{z^m dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}.$$

Lorsque m est impair ou de la forme $2n+1$, l'intégration peut se faire d'une manière complète, car en remplaçant z^2 par u, la différentielle devient

$$\frac{u^n du}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1-c^2u}}=\frac{u^n du}{2\sqrt{1-(c^2+1)u+c^2u^2}}$$

qu'on sait être intégrable (N° 154).

Supposons m pair et égal à $2n$. Si on différencie $z^{2n-3}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}$, on trouve

$$d\left(z^{2n-3}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}\right)$$

$$=\frac{z^{2n-4}dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}[2n-3-(1+c^2)(2n-2)z^2+c^2(2n-1)z^4],$$

d'où l'on tire en intégrant les deux membres et en divisant par $c^2(2n-1)$,

$$\int \frac{z^{2n}dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}} = \frac{z^{2n-3}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}{c^2(2n-1)}$$

$$+\frac{(1+c^2)(2n-2)}{c^2(2n-1)}\int\frac{z^{2n-2}dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}} - \frac{2n-3}{c^2(2n-1)}\int\frac{z^{2n-4}dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}.$$

Cette *formule de réduction* fait dépendre l'intégration de la différentielle contenant z^{2n}, de l'intégration de deux différentielles entièrement semblables, mais dans lesquelles $2n$ est remplacé par $2n-2$ et $2n-4$. On pourra donc, par des substitutions successives, ramener cette différentielle aux deux suivantes

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}, \quad \frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}.$$

La première est une des trois différentielles irréductibles. La seconde mise sous la forme

$$\frac{-\frac{1}{c^2}(1-c^2z^2)+\frac{1}{c^2}}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}dz = -\frac{1}{c^2}\frac{\sqrt{1-c^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}dz + \frac{1}{c^2}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}$$

est ramenée à deux des trois différentielles irréductibles. Ce qu'on vient de dire subsisterait encore si au lieu de $-c^2$ on écrivait $+c^2$.

Passons à la différentielle

$$\frac{dz}{(z-b)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{(z+b)\,dz}{(z^2-b^2)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}} = \frac{zdz}{(z^2-b^2)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}$$

$$+\frac{bdz}{(z^2-b^2)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}.$$

La première partie devient, en remplaçant z^2 par u,

$$\frac{du}{2(u-b^2)\sqrt{1-(c^2+1)u+c^2u^2}}$$

qui est intégrable. La seconde partie se confond avec la deuxième différentielle irréductible mentionnée plus haut. Il en serait de même si $+c^2$ était remplacé par $-c^2$.

166. *Seconde formule de réduction.* — Considérons la différentielle

$$\frac{(az+a')\,dz}{(z^2+b)^n\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}$$

dans laquelle le coefficient c^2 peut être pris indifféremment avec le signe plus ou avec le signe moins. Elle se décompose en deux parties $\frac{azdz}{(z^2+b)^n\sqrt{\ }\sqrt{\ }}+\frac{a'dz}{(z^2+b)^n\sqrt{\ }\sqrt{\ }}$ dont la première s'intègre immédiatement en remplaçant z^2 par u. Il ne reste donc à intégrer que la seconde. Si l'on différencie la fonction $\frac{z\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}{(z^2+b)^{n-1}}$, on est conduit à l'identité.....(1)

$$\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}\,d\left\{\frac{z\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}{(z^2+b)^{n-1}}\right\}$$

$$=\frac{b+z^2[1-2(n-1)-2b(1+c^2)]+z^4\{3bc^2+(1+c^2)(2n-4)\}-c^2z^6(2n-3)}{(z^2+b)^n}dz.$$

Remplaçons dans le second membre z^2+b par u ou z^2 par $u-b$; le numérateur étant développé, prendra la forme

$$A+Bu+Cu^2+Du^3$$

dans laquelle les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$A=(2n-2)[b+b^2(1+c^2)+b^3c^2]$$

$$B=-(2n-3)[1+2b(1+c^2)+3b^2c^2]$$

$$C=+(2n-4)(1+c^2+3bc^2)$$

$$D=-(2n-5)c^2,$$

valeurs qui obéissent à cette loi :

$$B=-\frac{2n-3}{2n-2}\frac{dA}{db},\quad C=\frac{1}{1.2}\frac{2n-4}{2n-2}\frac{d^2A}{db^2},\quad D=-\frac{1}{1.2.3}\frac{2n-5}{2n-2}\frac{d^3A}{db^3}.$$

Le second membre de l'équation différentielle (1) devient en substituant,

$$\frac{A}{u^n}+\frac{B}{u^{n-1}}+\frac{C}{u^{n-2}}+\frac{D}{u^{n-3}},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{A}{(z^2+b)^n}+\frac{B}{(z^2+b)^{n-1}}+\frac{C}{(z^2+b)^{n-2}}+\frac{D}{(z^2+b)^{n-3}}$$

et après avoir divisé les deux membres par $\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}$ et intégré, on trouve

$$\int\frac{dz}{(z^2+b)^n\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}=\frac{z\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}{A(z^2+b)^{n-1}}$$

$$-\frac{B}{A}\int\frac{dz}{(z^2+b)^{n-1}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}-\frac{C}{A}\int\frac{dz}{(z^2+b)^{n-2}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}$$

$$-\frac{D}{A}\int\frac{dz}{(z^2+b)^{n-3}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}.$$

Cette nouvelle *formule de réduction* fait dépendre l'intégrale cherchée de trois intégrales semblables, mais dans lesquelles l'exposant n est réduit à $n-1$, $n-2$, $n-3$. Elle peut donc servir à exprimer l'intégrale cherchée en fonction d'intégrales de plus en plus simples. Quand n sera réduit à 2, C est nul et l'intégrale de

$$\frac{dz}{(z^2+b)^2\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}$$

ne dépendra plus que des deux intégrales suivantes :

$$\int\frac{dz}{(z^2+b)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}},\quad\int\frac{dz}{(z^2+b)^{-1}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}.$$

Les deux premières sont deux des intégrales irréductibles; la troisième peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{(z^2+b)\,dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}} = \int \frac{b\,dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}} + \int \frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}}$$

c'est-à-dire, qu'elle se calculera au moyen de la première intégrale irréductible et d'une intégrale dont on s'est occupé au N° 165 pour la ramener aux deux premières intégrales irréductibles.

Il est à observer que l'on ne peut faire diminuer n jusqu'à devenir égal à l'unité, parce qu'il résulte des valeurs trouvées pour A, que ce coefficient serait nul et la valeur de l'intégrale, composée de termes infinis.

On peut déduire d'une manière plus simple l'intégrale de

$$\frac{dz}{(z^2+b)^n\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}},$$

de la valeur supposée connue, de l'intégrale irréductible

$$\int \frac{dz}{(z^2+b)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}};$$

en effet si l'on désigne celle-ci par $\varphi\,(z, b)$, on aura en dérivant successivement les deux membres par rapport à b,

$$\int \frac{dz}{(z^2+b)^2\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}} = -\frac{d\varphi}{db},$$

$$\int \frac{dz}{(z^2+b)^3\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}} = \frac{1}{1.2}\,\frac{d^2\varphi}{db^2},$$

et ainsi de suite. On peut donc poser cette formule générale

$$\int \frac{dz}{(z^2+b)^n\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}} = \pm\frac{1}{1.2.3\ldots.(n-1)}\,\frac{d^{n-1}\varphi}{db^{n-1}}.$$

167. *Troisième formule de réduction.* — Considérons enfin la différentielle

$$\frac{dz}{(z-b)^n\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{(z+b)^n dz}{(z^2-b^2)^n \sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}}$$

et si l'on développe le numérateur, on aura à intégrer une suite de termes de la forme

$$\frac{z^m dz}{(z^2-b^2)^n \sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}}.$$

Quand m est impair, en remplaçant z^2 par u, la différentielle est intégrable par les fonctions élémentaires. Si m est pair et égal à $2m$, en posant $z^2-b^2=u$, on pourra remplacer $\frac{z^{2m}}{(z^2-b^2)^n}$ par $\frac{(u+b^2)^{2m}}{u^n}$, qui, en développant le binôme, se compose de termes de la forme $\frac{a}{u^r}$ parce que $2m < n$.

La différentielle se décomposera donc en d'autres de la forme

$$\frac{adz}{(z^2-b^2)^r \sqrt{1-z^2}\sqrt{1\mp c^2z^2}},$$

qui est du genre de celle dont on s'est occupé plus haut.

168. *Transformation des trois différentielles irréductibles, en transcendantes elliptiques.* — Les trois différentielles irréductibles auxquelles nous venons de ramener toute différentielle $\frac{Pdx}{R}$, savoir :

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\pm c^2z^2}},\quad \frac{dz}{(z^2+b)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1\pm c^2z^2}},\quad \frac{dz\sqrt{1\pm c^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}$$

prennent la forme $\frac{dz'}{\sqrt{1+z'^2}\sqrt{1\mp c^2z'^2}}$ etc., lorsque z est égal à $z'\sqrt{-1}$ ou lorsque α^2 est négatif dans $z^2=\alpha^2y^2$ de la fin du N° 165.

Si le terme en x^4 sous le radical R était négatif, il suffirait de multiplier le dénominateur par $\sqrt{-1}$ et les trois différentielles prendraient l'une des formes $\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}\sqrt{1\mp c^2z^2}}$, etc., etc., ou

$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{\mp c^2z^2-1}}$, etc., etc., et enfin si α^2 est négatif dans $z^2=\alpha^2y^2$ ou si $z=y\alpha\sqrt{-1}$, z devra être remplacé par $z'\sqrt{-1}$ et les différentielles deviendront

$$\frac{dz'}{\sqrt{z'^2+1}\sqrt{1\mp c^2z'^2}},\quad \frac{dz'}{\sqrt{1+z'^2}\sqrt{\pm c^2z'^2-1}},\ \text{etc.}$$

Toutes ces différentielles peuvent être transformées dans d'autres plus commodes pour l'intégration, mais les transformations doivent être choisies de manière que les différentielles restent continues et par conséquent ne deviennent pas imaginaires dans les limites des valeurs que l'on peut attribuer aux nouvelles variables. Il faut et il suffit visiblement pour cela que pour toute valeur de la variable qu'on va substituer à z ou z', les deux radicaux $\sqrt{1-z^2}$ et $\sqrt{1\pm c^2z^2}$ restent de même signe. Or cela arrive visiblement pour toutes les valeurs de l'arc φ, si l'on donne à z ou z' les valeurs suivantes dans les différents cas qui peuvent se présenter, savoir :

1° $\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-c^2z^2}$, z doit être <1, posons donc $z=\sin\varphi$,

2° $\sqrt{z^2-1}\sqrt{c^2z^2-1}$, $z>\frac{1}{c}$, $z=\frac{1}{c\sin\varphi}$,

3° $\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+c^2z^2}$, $z<1$, $z=\cos\varphi$,

4° $\sqrt{1+z'^2}\sqrt{1+c^2z'^2}$, $z'=\operatorname{tang}\varphi$,

5° $\sqrt{1+z'^2}\sqrt{1-c^2z'^2}$, $z'<\frac{1}{c}$, $z'=\frac{\cos\varphi}{c}$,

6° $\sqrt{z^2-1}\sqrt{1-c^2z^2}$, $z>1$, $<\frac{1}{c}$, $z=\frac{1}{\sqrt{1-(1-c^2)\sin^2\varphi}}$,

7° $\sqrt{z^2-1}\sqrt{1+c^2z^2}$, $z>1$, $z=\frac{1}{\cos\varphi}$,

8° $\sqrt{1-z^2}\sqrt{c^2z^2-1}$, $z<1$, $>\frac{1}{c}$, impossible,

9° $\sqrt{1+z'^2}\sqrt{c^2z'^2-1}$, $z'>\frac{1}{c}$, $z'=\frac{1}{c\cos\varphi}$.

En effectuant ces substitutions, on reconnait sans peine que toutes les différentielles se ramènent à l'une des trois formes,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \frac{d\varphi}{(\sin^2\varphi+b)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

k étant toujours plus petit que l'unité. Prenons pour exemple le cas 9°. La première différentielle devient

$$\frac{\frac{1}{c}\,d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{1}{c^2}}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{c^2+1}\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2+1}\sin^2\varphi}}.$$

La seconde prend la forme

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{c^2+1}\left(b+\frac{1}{c^2\cos^2\varphi}\right)\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2+1}\sin^2\varphi}}=\frac{1}{b\sqrt{c^2+1}}\cdot\frac{(\sin^2\varphi-1)\,d\varphi}{\left(\sin^2\varphi-\frac{bc^2+1}{bc^2}\right)\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2+1}\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{1}{b\sqrt{c^2+1}}\left\{\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2+1}\sin^2\varphi}}+\frac{1}{bc^2}\cdot\frac{d\varphi}{\left(\sin^2\varphi-\frac{bc^2+1}{bc^2}\right)\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2+1}\sin^2\varphi}}\right\}.$$

La troisième différentielle devient

$$\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{c^2+1}\,(1-\sin^2\varphi)\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2+1}\sin^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\left\{-\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2+1}\sin^2\varphi}}\right.$$

$$\left.+\frac{d\varphi}{(\sin^2\varphi-1)\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2+1}\sin^2\varphi}}\right\}$$

et l'on voit que les différentielles transformées ont toutes l'une des trois formes indiquées.

Il suit de là que l'intégration de la différentielle elliptique la plus compliquée dépend dans tous les cas des trois intégrales suivantes,

dans lesquelles k^2 est réel et plus petit que l'unité, et n est réel, positif ou négatif, savoir :

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \quad \int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Elles ont été appelées *fonctions elliptiques* ou *transcendantes elliptiques* de *première*, de *seconde* et de *troisième espèce*. Comme elles sont des fonctions déterminées de φ et de k pour les deux premières, et de φ, k et n pour la troisième, Legendre les a désignées par $F\varphi$ ou $F(\varphi,k)$ pour la première, par $E\varphi$ ou $E(\varphi,k)$ pour la seconde et par $\Pi\varphi$ ou $\Pi(\varphi, k, n)$ pour la troisième. Verhulst dans son *Traité des fonctions elliptiques*, leur donne les noms de *digamma*, de *epsilon* et de *kappa*, et les désigne par

$$\text{dig.}(\varphi,k), \quad \text{eps.}(\varphi,k), \quad \text{kap.}(\varphi, k, n).$$

k se nomme *module*, n *paramètre*, et φ *amplitude* de la fonction.

De même que certaines intégrales ne sont exprimables qu'en logarithmes et en lignes trigonométriques, de même les intégrales des différentielles de la forme $\frac{Pdx}{R}$ ne sont exprimables qu'en *digamma*, *epsilon* et *kappa*. Ces dernières fonctions sont donc introduites dans l'analyse au même titre que les logarithmes et les lignes trigonométriques, y servent à peu près aux mêmes usages et jouissent de propriétés analogues, dont la démonstration fait plus particulièrement l'objet de la *théorie des fonctions elliptiques*.

169. *Développement en séries des transcendantes elliptiques des deux premières espèces. Construction des tables.* — Les valeurs de ces nouvelles fonctions peuvent être représentées par des séries convergentes infinies qui permettent de calculer ce qu'elles deviennent pour toute valeur du paramètre et du module et pour des valeurs de l'amplitude croissant de minute en minute, comme les valeurs des logarithmes et des lignes trigonométriques l'ont été pour tous les nombres et pour tous les arcs de cercle. Ces valeurs consignées dans des tables forment ce qu'on appelle des *tables des fonctions digamma, epsilon* ou *kappa* qui servent au même usage que les tables de logarithmes ou de sinus.

Si dans la fonction dig (φ, k) on remplace sin φ par y, elle reprend la forme

$$\text{dig}(\varphi, k) = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}(1-k^2y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Développons $(1 - k^2y^2)^{-\frac{1}{2}}$ en série; celle-ci sera toujours convergente, puisque y et k^2 sont inférieurs à l'unité, et le calcul de la fonction dig (φ, k) se réduira à l'intégration d'une suite de termes de la forme $\frac{y^m dy}{\sqrt{1-y^2}}$. On trouve ainsi, après avoir remis pour y sa valeur $\sin\varphi$, et en faisant commencer l'intégrale avec l'amplitude φ,

$$\operatorname{dig}(\varphi, k) = \varphi\left\{1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \text{etc.}\right\}$$

$$- \sin\varphi\cos\varphi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}k^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4\left(\frac{1}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{4.2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\left(\frac{1}{6}\sin^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}\right) + \text{etc.}\right].$$

Cette série est d'autant plus convergente que le module k est plus petit.

On trouve de la même manière pour la fonction *epsilon*,

$$\text{eps.}(\varphi, k) = \varphi\left\{1 - \frac{1^2}{2^2}k^2 - \frac{1^2}{2^24^2}3k^4 - \frac{1^23^2}{2^24^26^2}5k^6 - \text{etc.}\right\}$$

$$+ \sin\varphi\cos\varphi\left[\frac{1.1}{2.2}k^2 + \frac{1}{2.4}k^4\left(\frac{1}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{4.2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2.4.6}k^6\left(\frac{1}{6}\sin^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}\right) + \text{etc.}\right].$$

170. *Développement en série, de la fonction elliptique de troisième espèce, le paramètre étant positif.* — Le développement en série convergente, de la fonction *kappa* est plus compliqué, parce qu'elle contient, outre le module k^2 toujours réel et fractionnaire, un paramètre n dont la valeur n'est pas limitée. Lorsque n est positif on y parvient de la manière suivante : posons

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = (1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4\varphi$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi + \text{etc.}$$

Cette série est toujours convergente, puisque k et $\sin\varphi$ sont plus petits

que l'unité. Remplaçons $\sin^2\varphi$, $\sin^4\varphi$, $\sin^6\varphi$..... par leur valeur en $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 6\varphi$..... donnée au N° 49; on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\left\{A+B\cos 2\varphi+C\cos 4\varphi+D\cos 6\varphi+\text{etc.}\right\}(1+b)$$

dans laquelle b et les coefficients A, B, C.... ont les valeurs suivantes :

$$b=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}},$$

$$A=1+\frac{1^2}{2^2}b^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}b^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}b^6+\text{etc.}$$

$$B=-2b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}b^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}b^4+\text{etc.}\right)$$

$$C=2b^2\left(\frac{1.3}{2.4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}b^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}b^4+\text{etc.}\right)$$

$$D=-2b^3\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}b^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}b^4+\text{etc.}\right)$$

$E=$ etc.

Ces dernières valeurs sont toujours convergentes, parce que b est plus petit que l'unité et la série $A+B\cos 2\varphi+$ etc. est aussi convergente, même si l'on prend tous les termes positivement et à plus forte raison si on leur laisse leurs signes, car les valeurs de A, B, C, etc. sont visiblement inférieures à

$$1+b^2+b^4+\text{etc.}=\frac{1}{1-b^2},$$

$$-b(1+b^2+b^4.....)=-\frac{b}{1-b^2},$$

$$+b^2\frac{1}{1-b^2},$$

$$-b^3\frac{1}{1-b^2},$$

et que par conséquent la série est inférieure à

$$\frac{1}{1-b^2}(1+b\cos 2\varphi+b^2\cos 4\varphi+b^4\cos 6\varphi+\text{etc.})$$

qui elle-même est convergente, ainsi qu'on l'a vu au N° 36. D'un autre côté, si l'on pose

$$b' = \frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1},$$

b' sera plus petit que l'unité et on trouve le développement suivant,

$$\frac{\sqrt{1+n}}{1+n\sin^2\varphi} = 1 + 2b'\cos 2\varphi + 2b'^2\cos 4\varphi + 2b'^3\cos 6\varphi + \text{etc.},$$

développement qu'on vérifie en remplaçant $\sin^2\varphi$ par $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$, en faisant disparaître ensuite le dénominateur et en remplaçant partout les produits de la forme $\cos m\varphi \cos 2\varphi$ par

$$\frac{1}{2}\cos(m+2)\varphi + \frac{1}{2}\cos(m-2)\varphi.$$

On reconnaît ainsi que tous les termes se détruisent identiquement.

D'après ce qu'on a vu au N° 36, le développement précédent est toujours convergent.

En substituant ces deux développements dans la fonction *kappa*, remplaçant $\cos\mu\varphi\cos\nu\varphi$ par $\frac{1}{2}\cos(\mu+\nu)\varphi + \frac{1}{2}\cos(\mu-\nu)\varphi$ et intégrant, il vient, en faisant commencer l'intégrale avec l'amplitude φ,

$$\int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$= A'\varphi + B'\sin 2\varphi + C'\sin 4\varphi + D'\sin 6\varphi + \text{etc.}$$

dans laquelle on fait

$$h = \frac{\sqrt{1+n}}{1+b}, \quad hA' = A + Bb' + Cb'^2 + Db'^3 + \text{etc.}$$

$$hB' = \frac{b'^2+1}{b'}hA' + \frac{b'^2-1}{b'}A$$

$$hC' = \frac{b'^4+1}{b'^2}hA' + \frac{b'^4-1}{b'^2}A + \frac{b'^2-1}{b'}B$$

$$hD' = \frac{b'^6+1}{b'^3}hA' + \frac{b'^6-1}{b'^3}A + \frac{b'^4-1}{b'^2}B + \frac{b'^2-1}{b'}C$$

$$hE' = \text{etc.}$$

171. *Cas du paramètre négatif.* — La formule du numéro précédent serait encore convergente si n était négatif et très petit, puisqu'il suffirait de remplacer h par $\frac{\sqrt{1-n}}{1+b}$; mais il n'en serait plus de même si n étant négatif, était supérieur à l'unité; car alors b' serait imaginaire et la série précédente cesserait d'être convergente. On mettrait dans ce cas la différentielle sous la forme suivante :

$$\frac{d\varphi}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\frac{1}{k}d\varphi}{1-n\sin^2\varphi}[e^2+(m'^2-\sin^2\varphi)]^{-\frac{1}{2}}$$

dans laquelle e^2 représente $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n}$ et m'^2 remplace $\frac{1}{n}$. En développant ensuite le binôme

$$[e^2+(m'^2-\sin^2\varphi)]^{-\frac{1}{2}} = (e^2+a)^{-\frac{1}{2}},$$

on est conduit à une série convergente, du moins lorsque e^2 ou $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n}$ est supérieur à a, ce qui a lieu lorsque e^2 est supérieur à m'^2, c'est-à-dire lorsque n est plus grand que $2k^2$. En s'arrêtant aux termes de 5ᵉ puissance de a et ordonnant suivant les puissances croissantes de $\sin\varphi$, puis intégrant, il vient,

$$\begin{aligned} kem^2\,\text{kappa} = \int\frac{d\varphi}{m'^2-\sin^2\varphi} &- \frac{\varphi}{e^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{m'^2}{e^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{m'^4}{e^4}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{m'^6}{e^6}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{m'^8}{e^8}\right) \\ &- \frac{1}{e^4}\left(\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{2m'^2}{e^2}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{3m'^4}{e^4}-\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{4m'^6}{e^6}\right)\int\sin^2\varphi d\varphi \\ &- \frac{1}{e^6}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{3m'^2}{e^2}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{6m'^4}{e^4}\right)\int\sin^4\varphi d\varphi \\ &- \frac{1}{e^8}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}-\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{4m'^2}{e^2}\right)\int\sin^6\varphi d\varphi \\ &- \frac{1}{e^{10}}\left(\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\right)\int\sin^8\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Les intégrales indiquées s'obtiennent en remplaçant $\sin\varphi$ par x, ce qui leur fait prendre les formes

$$\int\frac{dx}{(m'^2-x^2)\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{etc.}$$

En substituant les valeurs de ces intégrales et remplaçant dans la première intégrale par sin η, le facteur m' ou $\frac{1}{m}$ qui est moindre que l'unité, il vient enfin, l'intégrale commençant avec l'amplitude φ,

$$kem^2 \,\text{kappa} = \frac{1}{2\sin 2\eta}\log\left(\frac{\sin(\eta+\varphi)}{\sin(\eta-\varphi)}\right)^2$$

$$-\frac{\varphi}{e^2}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{e^2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{e^4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{1}{e^6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{1}{e^8}\\
&-\frac{1.3}{2.4}\frac{m'^2}{e^2}-\frac{1}{2}\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{2m'^2}{e^4}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{3m'^2}{e^6}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{4m'^2}{e^8}\\
&+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{m'^4}{e^4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{3m'^4}{e^6}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{6m'^4}{e^8}\\
&-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{m'^6}{e^6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{4m'^6}{e^8}\\
&+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{m'^8}{e^8}
\end{aligned}\right.$$

$$+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{e^4}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{2m'^2}{e^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{3m'^4}{e^4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{4m'^6}{e^6}\\
&+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e^2}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{3m'^2}{e^4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{6m'^4}{e^6}\\
&+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{1}{e^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{4m'^2}{e^6}\\
&+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{1}{e^6}
\end{aligned}\right.$$

$$+\frac{\sin^3\varphi\cos\varphi}{e^6}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{3m'^2}{4e^2}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{6m'^2}{4e^4}\\
&+\frac{5}{6}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{4e^2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{4m'^2}{4e^4}\\
&+\frac{5.7}{6.8}\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{1}{4e^4}
\end{aligned}\right.$$

$$+\frac{\sin^5\varphi\cos\varphi}{e^8}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{4m'^2}{6e^2}\\
&+\frac{7}{8}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{1}{8e^2}
\end{aligned}\right.$$

$$+\frac{\sin^7\varphi\cos\varphi}{e^{10}}\left\{\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{1}{8}\right.$$

Si avant d'intégrer on remplace $\sin^2\varphi$, $\sin^4\varphi$..... par leur valeur en $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$..... (N° 49) on trouve encore

$$km^2e^3\,\text{kappa} = \frac{e^2}{2\sin 2\eta}\log\left(\frac{\sin(\eta+\varphi)}{\sin(\eta-\varphi)}\right)^2$$

$$-\varphi\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{2}{1}\cdot\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{2^2e^2}+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{2^4e^4}+\frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{1}{2^6e^6}+\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{1}{2^8e^8}\\
&\qquad-\frac{1.3}{2.4}\,\frac{m'^2}{e^2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{2m'^2}{2^2e^4}-\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{3m'^2}{2^4e^6}-\frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{4m'^2}{2^6e^8}\\
&\qquad\qquad+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{m'^4}{e^4}+\frac{2}{1}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{3m'^4}{2^2e^6}+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{6m'^4}{2^4e^8}\\
&\qquad\qquad\qquad-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{m'^6}{e^6}-\frac{2}{1}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{4m'^6}{2^2e^8}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{m'^8}{e^8}
\end{aligned}\right.$$

$$+\frac{\sin 2\varphi}{2^2e^2}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{2m'^2}{e^2}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{3m'^4}{e^4}-\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{4m'^6}{e^6}\\
&+\frac{4}{1}\,\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^2e^2}-\frac{4}{1}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{3m'^2}{2^2e^4}+\frac{4}{1}\,\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{6m'^4}{2^2e^6}\\
&\qquad+\frac{6.5}{1.2}\,\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{1}{2^4e^4}-\frac{6.5}{1.2}\,\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{4m'^2}{2^4e^6}\\
&\qquad\qquad+\frac{8.7.6}{1.2.3}\,\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{1}{2^6e^6}
\end{aligned}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sin 4\varphi}{2^4e^4}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{3m'^2}{e^2}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{6m'^4}{e^4}\\
&+\frac{6}{1}\,\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{1}{2^2e^2}-\frac{6}{1}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{4m'^2}{2^2e^4}\\
&\qquad+\frac{8.7}{1.2}\,\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{1}{2^4e^4}
\end{aligned}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\sin 6\varphi}{2^6e^6}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}-\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{4m'^2}{e^2}\\
&\qquad+\frac{8}{1}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{1}{2^2e^2}
\end{aligned}\right.$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 8\varphi}{2^8e^8}\left\{\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\right.$$

CHAPITRE XIII.

—

Equations différentielles implicites. Différentielles immédiates et médiates. Intégrales immédiates et médiates. — Toute équation différentielle implicite a une intégrale. — Condition d'intégrabilité immédiate des différentielles implicites. — Intégration des fonctions qui satisfont à la condition d'intégrabilité immédiate. — Existence d'un facteur propre à rendre différentielle exacte une différentielle donnée. — Détermination de ce facteur. — Séparation des variables. Équations homogènes. Théorème sur les différentielles homogènes. — Second théorème sur les différentielles homogènes. — Procédés divers d'intégration. Problèmes divers. Problème des trajectoires.

172. *Équations différentielles implicites. Différentielles immédiates et médiates. Intégrales immédiates et médiates.* — Dans les chapitres précédents, on ne s'est occupé que de l'intégration des différentielles d'une seule variable $\varphi x dx$, ou des équations différentielles explicites à deux variables

$$\varphi y dy = \psi x dx;$$

considérons maintenant les équations implicites à deux variables

$$\psi(x, y)\, dy + \varphi(x, y)\, dx = 0.$$

On ne peut pas affirmer *à priori*, comme dans le cas précédent, que cette équation est une différentielle exacte, c'est-à-dire, qu'elle peut être obtenue par la seule opération de la différenciation d'une certaine fonction primitive

$$f(x, y) = 0;$$

car si en différenciant cette dernière, on obtient la différentielle exacte

$$mdy + ndx = 0,$$

en effectuant sur cette dernière équation une opération légitime qui n'en change pas la signification, par exemple, en multipliant ses deux membres par une fonction quelconque de (x,y) ou en combinant cette différentielle avec $f(x, y) = 0$, soit pour éliminer une constante, soit pour y faire quelque réduction, on sera dans tous les cas conduit à une équation différentielle

$$Mdy + Ndx = 0$$

différente de la précédente, quoique restant une déduction et par conséquent une différentielle de l'équation primitive

$$f(x, y) = 0,$$

mais elle ne se déduira plus de celle-ci par le seul procédé de la différenciation. De là résulte la nécessité de distinguer deux espèces d'équations différentielles à deux variables, les équations différentielles *immédiates* qui sont obtenues par la seule différenciation et qui par conséquent sont toujours des équations différentielles exactes, et les équations différentielles *médiates* qui résultent de la différenciation d'une fonction primitive combinée avec des opérations algébriques, et qui par conséquent ne deviennent équations différentielles exactes qu'après avoir subi certaines transformations; ainsi

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0,$$

est la différentielle immédiate de

$$\frac{x}{y} + C = 0,$$

tandis que

$$ydx - xdy = 0,$$

qui est une conséquence de l'équation différentielle précédente, n'en est plus que la différentielle médiate et ne deviendra différentielle

exacte que lorsqu'on aura rétabli le dénominateur en multipliant les deux membres par le facteur $\frac{1}{y^2}$. De même

$$y^2 - 2ax = 0$$

a pour différentielle immédiate

$$2ydy - 2adx = 0;$$

mais si l'on élimine a entre ces deux équations, cette dernière prendra la forme

$$2xdy - ydx = 0,$$

qui ne sera plus que la différentielle médiate de l'équation primitive. Les deux équations

$$2ydy - 2adx = 0, \quad 2xdy - ydx = 0,$$

pouvant toutes deux se déduire par la différenciation combinée avec d'autres opérations légitimes, de l'équation primitive

$$y^2 - 2ax = 0,$$

cette dernière est appelée intégrale de l'une et de l'autre, ce qui exige que la définition donnée précédemment, d'une intégrale, soit un peu modifiée; nous appellerons donc en général *intégrale* ou *équation intégrale d'une équation différentielle donnée*, toute équation primitive de laquelle on peut déduire cette différentielle. Si la seule opération de la différenciation suffit pour cela, l'intégrale est dite à son tour *immédiate*, et si certaines transformations dans cette différentielle immédiate sont nécessaires pour retrouver la différentielle donnée, cette intégrale est dite alors *médiate*.

173. *Toute équation différentielle implicite a une intégrale.* — A une équation différentielle quelconque à deux variables correspond toujours une équation primitive en (x, y) contenant une constante arbitraire, qui en forme l'intégrale; en effet, si on résout par rapport à $\frac{dy}{dx}$ l'équation donnée, en posant

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

et qu'on dérive successivement par rapport à x les deux membres de cette équation, en remplaçant chaque fois dans le second membre, $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur en (x, y), on parviendra à exprimer toutes les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$..... en fonction de ces deux variables. Cela posé, dans la formule de Jean Bernoully (N° 158), remplaçons $\frac{dy}{dx}$ par $f(x, y)$ et les dérivées supérieures par leur valeur en (x, y) dont il vient d'être question, valeurs que nous désignerons par $F(x, y)$, $\varphi(x, y)$....., cette formule deviendra

$$y = C + (x - a)f(x, y) - \frac{(x-a)^2}{1.2}F(x, y) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3}\varphi(x, y) - \text{etc.}$$

qui ne contient plus de trace de dérivée et forme par conséquent l'*intégrale* de la proposée. Comme a est une quantité dont on peut disposer à volonté, on pourra faire en sorte que, entre certaines limites des valeurs de x, $x - a$ soit assez petit pour que la série soit convergente.

L'intégrale se présente ici avec la constante arbitraire C isolée; mais il peut arriver, quand on emploie d'autres procédés, que C soit multiplié par une fonction de x ou de y, ce qui a lieu d'ailleurs dans l'intégrale précédente si l'on multiplie les deux membres par une fonction quelconque, ou qu'on élève les deux membres à une certaine puissance, etc. Lorsque la constante arbitraire C n'est pas isolée, en dérivant l'intégrale, cette constante ne disparaît pas par le seul effet de la dérivation et l'on ne retrouve pas immédiatement la dérivée donnée, puisque celle-ci ne contient pas C. Pour la reproduire, il faut éliminer cette quantité C entre l'intégrale et sa dérivée. On est ainsi conduit à une équation qui ne contient plus que des x, des y et $\frac{dy}{dx}$, laquelle doit donner pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur identiquement la même que l'équation dérivée proposée, puisque si elle en différait, on pourrait égaler les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ tirées de ces deux équations, ce qui conduirait à une équation en x et y qui, étant jointe à l'intégrale, laquelle forme une équation distincte de la précédente puisqu'elle contient C, donnerait pour (x, y) des valeurs constantes, résultat absurde.

174. *Condition d'intégrabilité immédiate des différentielles impli-*

cites. — On peut toujours reconnaître *à priori*, si une équation différentielle donnée

$$Mdy + Ndx = 0$$

est immédiate, c'est-à-dire, si elle est une différentielle exacte d'une fonction de deux variables ; en effet, si

$$f(x, y) = C$$

est l'intégrale, comme la différentielle immédiate de celle-ci est

$$\frac{df(x, y)}{dy} dy + \frac{df(x, y)}{dx} dx = 0,$$

cette dernière devra être identique avec la précédente, et l'on devra avoir

$$\frac{df(x, y)}{dy} = M, \quad \frac{df(x, y)}{dx} = N;$$

d'où il suit qu'il faut et qu'il suffit que les coefficients M et N soient les dérivées partielles d'une certaine fonction $f(x, y)$ inconnue à la vérité. En dérivant les deux membres de la première par rapport à x et les deux membres de la seconde par rapport à y, en observant que l'on a (N° 99)

$$\frac{d^2f(x, y)}{dx\,dy} = \frac{d^2f(x, y)}{dy\,dx},$$

on est conduit à l'égalité suivante

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$$

qui est donc une conséquence nécessaire de l'intégrabilité immédiate. Or je dis que cette égalité est aussi une condition suffisante pour assurer cette intégrabilité immédiate ; en effet, si l'on représente par $\varphi(x, y)$ l'intégrale de Ndx prise par rapport à la seule variable x, on aura

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dx} = N;$$

l'égalité $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$ conduit donc à la suivante

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d^2\varphi(x, y)}{dx\,dy} = \frac{d^2\varphi(x, y)}{dy\,dx} = \frac{d\left(\frac{d\varphi(x, y)}{dy}\right)}{dx}$$

et en multipliant les deux membres par dx et intégrant par rapport à x, on trouve

$$M=\frac{d\varphi(x,y)}{dy}+C$$

dans laquelle C peut contenir la variable y, puisque pendant l'intégration cette variable a été traitée en constante. L'équation différentielle proposée peut donc prendre la forme

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx}dx+\frac{d\varphi(x,y)}{dy}dy+Cdy=0,$$

qui est visiblement une différentielle immédiate, puisque les deux premiers termes forment la différentielle totale de $\varphi(x, y)$ et que Cdy est aussi une différentielle exacte, attendu que C ne contient que des y. Il suit de là que l'égalité

$$\frac{dM}{dx}=\frac{dN}{dy}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle implicite

$$Mdy+Ndx=0$$

soit une différentielle immédiate. On reconnaît ainsi que

$$xdy+ydx=0$$

est une différentielle immédiate et que

$$xdy-ydx=0$$

ne l'est pas.

175. ***Intégration des fonctions qui satisfont à la condition d'intégrabilité immédiate.*** — Lorsqu'une équation différentielle implicite

$$Mdy+Ndx=0$$

satisfait à la condition d'intégrabilité immédiate, la recherche de l'intégrale se réduit à une quadrature; en effet, en représentant celle-ci par $u=0$, ou sa différentielle totale par

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0,$$

on doit avoir

$$\frac{du}{dx} = N, \quad \frac{du}{dy} = M.$$

On tire de la première,

$$u = \int N dx + Y.$$

Cette intégrale doit être prise en traitant les y comme constants, puisque la dérivée $\frac{du}{dx}$ a été prise dans cette hypothèse; d'où il résulte que la constante arbitraire Y est, en général, une certaine fonction de y. Pour la déterminer, observons que, puisque

$$\frac{du}{dy} = M,$$

on doit avoir en remplaçant u par sa valeur,

$$M = \frac{d \int N dx}{dy} + \frac{dY}{dy},$$

d'où l'on tire

$$dY = \left(M - \frac{d \int N dx}{dy}\right) dy \quad \text{et} \quad Y = \int\left(M - \frac{d \int N dx}{dy}\right) dy + D,$$

D étant une constante. En remplaçant Y par cette valeur, dans u, on trouve enfin pour l'intégrale cherchée,

$$\int N dx + \int\left(M - \frac{d \int N dx}{dy}\right) dy + D = 0.$$

Observons que

$$M - \frac{d \int N dx}{dy}$$

ne peut jamais renfermer la variable x; cela résulte de ce que cette intégrale représente Y qui, comme nous le savons, est une fonction de y seul, si la différentielle proposée est une différentielle exacte. On peut d'ailleurs le faire voir directement en prouvant que la dérivée de $M - \frac{d \int N dx}{dy}$ prise par rapport à x, est toujours nulle; en effet cette dérivée est

$$\frac{dM}{dx} - \frac{d^2 \int N dx}{dy dx} \quad \text{ou} \quad \frac{dM}{dx} - \frac{d^2 \int N dx}{dx dy}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{dM}{dx} - \frac{d\left(\frac{d\int Ndx}{dx}\right)}{dy}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy},$$

parce que

$$\frac{d\int Ndx}{dx} = N,$$

et cette dérivée se réduit à zéro, si la différentielle proposée est une différentielle exacte, puisqu'on doit avoir dans ce cas

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}.$$

On pourra appliquer cette méthode aux équations différentielles suivantes :

$$ydx + xdy = 0, \quad xdx - ydy = 0,$$

$$\frac{x}{y}dx + \frac{y^2 - x^2}{2y^2}dy = 0, \quad \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0,$$

dont les intégrales sont

$$xy = C, \quad x^2 - y^2 = C, \quad y + \frac{x^2}{y} = C, \quad x = Cy.$$

176. *Existence d'un facteur propre à rendre différentielle exacte, une différentielle donnée.* — Lorsqu'une équation différentielle ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité immédiate, on ne peut en trouver l'intégrale qu'après lui avoir fait subir certaines transformations qui lui donnent cette propriété. Il existe sur ces transformations un théorème important qui consiste en ce que, *une équation différentielle quelconque à deux variables peut toujours devenir différentielle exacte en la multipliant par un certain facteur à déterminer dans chaque cas ;* en effet

$$Mdy + Ndx = 0$$

étant la différentielle donnée, on a vu (N° 175) qu'elle a nécessairement une intégrale médiate dans laquelle la constante arbitraire se trouve généralement combinée avec les variables. Si l'on

conçoit l'intégrale résolue par rapport à cette constante C et mise sous la forme $V = C$, on obtiendra pour $\frac{dy}{dx}$, en différenciant cette dernière, une valeur en (x, y) indépendante de C comme celle qui est donnée par l'équation proposée

$$Mdy + Ndx = 0.$$

Ces deux valeurs sont

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N}{M} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{dy}};$$

on doit donc avoir identiquement, c'est-à-dire, quelles que soient les valeurs de x et de y,

$$\frac{N}{M} = \frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{dy}},$$

car s'il n'y avait pas identité, cette égalité constituerait une relation entre x et y distincte de $V = C$, puisque cette dernière seule contient C. On aurait ainsi deux équations en (x, y) qui pourraient servir à déterminer ces variables dont les valeurs seraient constantes, ce qui est absurde. On doit donc avoir identiquement

$$\frac{dV}{dx} = \frac{N}{M}\frac{dV}{dy},$$

et si l'on remplace $\frac{dV}{dx}$ par sa valeur identique, dans

$$\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy = 0$$

que l'on sait être la différentielle totale exacte de $V = C$, celle-ci deviendra sans cesser d'être différentielle exacte,

$$\frac{dV}{dy}\left(\frac{N}{M}dx + dy\right) = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{1}{M}\frac{dV}{dy}(Ndx + Mdy) = 0.$$

Le facteur $\frac{1}{M}\frac{dV}{dy}$ rend donc la différentielle donnée $Mdy + Ndx$ exacte et égale à dV. On voit aussi qu'il y a un nombre infini de facteurs propres à remplir cette condition, car en désignant par φV une fonction quelconque de V, on obtiendra encore une différentielle exacte en multipliant

$$Mdy + Ndx = 0$$

par $\frac{1}{M}\frac{dV}{dy}\varphi V$, puisqu'elle devient

$$\varphi V \frac{1}{M}\frac{dV}{dy}(Mdy + Ndx) = 0, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \varphi V dV = 0,$$

laquelle est évidemment différentielle exacte.

C'est ainsi que l'équation

$$xdy - ydx = 0$$

devient, en multipliant par $\frac{1}{x^2}$,

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0,$$

qui est la différentielle exacte de

$$\frac{y}{x} = C.$$

177. *Détermination du facteur propre à rendre exacte une différentielle donnée.* — Ce qu'on vient de voir prouve seulement l'existence d'un facteur propre à rendre intégrable immédiatement une équation différentielle donnée; quant à la valeur de ce facteur, elle ne saurait résulter de ce qui précède, puisqu'il faudrait d'abord connaître la fonction V, ce qui suppose l'intégrale déjà connue. Pour déterminer ce facteur que nous désignerons par z, observons que

$$Mzdy + Nzdx = 0$$

devant être une différentielle exacte, on doit avoir

$$\frac{d(Mz)}{dx} = \frac{d(Nz)}{dy},$$

c'est-à-dire, en effectuant les dérivations,

$$M\frac{dz}{dx} - N\frac{dz}{dy} = z\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx}\right).$$

Cette équation, qui contient les deux dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ de la fonction z, est dite aux *dérivées partielles* et son intégrale ferait connaître la valeur du facteur z; mais nous verrons plus loin (N° 220) que cette intégration présente en général des difficultés qui obligent presque toujours à l'abandonner; cependant l'intégration est possible dans un cas particulier; c'est lorsque les coefficients M et N sont tels qu'en mettant l'équation aux dérivées partielles sous l'une des deux formes

$$\frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dx} - \frac{N}{M}\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx}\right)$$

ou

$$\frac{1}{z}\left(\frac{M}{N}\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx}\right),$$

les seconds membres ne contiennent, la première que la variable x, ou la seconde, la seule variable y; en effet, dans le premier cas, en désignant ce second membre par fx, l'équation devient, après qu'on a remplacé $\frac{N}{M}$ dans le premier membre par sa valeur $-\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = fx \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right) = fxdx$$

et en remarquant que la parenthèse est la différentielle totale dz de z,

$$\frac{dz}{z} = fxdx \quad \text{d'où} \quad z = e^{\int fxdx}.$$

On voit que dans ce premier cas le facteur z n'est fonction que de la

seule variable x. On fera voir de la même manière que dans le second cas, il n'est fonction que de la seule variable y et qu'il est représenté par $e^{-\int f y dy}$.

La différentielle

$$(1 + x - 2y)\,dx + (1 - x)\,dy = 0$$

donne

$$\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx}\right)\frac{1}{M} = -\frac{1}{1-x},$$

et par conséquent

$$z = e^{-\int \frac{dx}{1-x}} = e^{\log(x-1)} = x - 1.$$

La différentielle

$$(x-1)(1 + x - 2y)\,dx - (x-1)^2\,dy = 0$$

doit donc être intégrable immédiatement. On trouve en effet, en employant la méthode du N° 175,

$$\int N dx = \left[\frac{x^3}{3} - yx^2 + (2y - 1)\,x\right],$$

$$\int\left(M - \frac{d\int N dx}{dy}\right) dy = -\int dy = -y + C,$$

et l'intégrale prend la forme

$$\frac{x^3}{3} - x^2 y + 2yx - x - y + C = 0.$$

On peut intégrer de cette manière toute équation différentielle réductible à la forme

$$dy + Py dx = Q dx,$$

P et Q étant des fonctions quelconques de x; car on trouve

$$M = 1,\quad N = Py - Q,\quad z = e^{\int P dx}$$

et il vient (N° 175), après avoir multiplié les deux membres par $e^{\int P dx}$,

$$\int N e^{\int P dx} dx = \int y P e^{\int P dx} dx - \int Q e^{\int P dx} dx = y e^{\int P dx} - \int Q e^{\int P dx} dx,$$

$$\int \left(M e^{\int P dx} - \frac{d \int N dx}{dy} \right) dy = 0,$$

et l'intégrale devient

$$y e^{\int P dx} - \int Q e^{\int P dx} dx + C = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int e^{\int P dx} Q dx + C \right),$$

dans laquelle les intégrales $\int P dx, \int e^{\int P dx} Q dx$ s'obtiennent par de simples quadratures, puisque P et Q ne contiennent, par hypothèse, que des x. L'équation différentielle dont on vient de s'occuper se nomme *équation différentielle linéaire du premier ordre*.

Appliquons cette formule d'intégration à la résolution du problème suivant : *un vase contenant V litres de vin perd une quantité v de liquide par seconde, tandis qu'une quantité v' d'eau par seconde y est introduite. On demande combien de vin et d'eau contiendra le vase au bout du temps t?*

Le volume de liquide contenu dans le vase au bout du temps t est $V + (v' - v)\,t$ parce que le liquide introduit est $v't$ et le liquide écoulé est vt. On a donc en désignant par x et y les quantités de vin et d'eau cherchées,

$$x + y = V + (v' - v)\,t.$$

D'un autre côté l'accroissement de la quantité d'eau dans le temps dt, représenté par la différentielle dy, se compose du volume $v'dt$ fourni pendant le temps dt, diminué du volume d'eau qui s'est écoulé dans le même temps. Or le volume écoulé composé d'eau et de vin est vdt

et comme le mélange contient x et y litres de vin et d'eau, la quantité d'eau écoulée est $v\frac{y}{x+y}dt$. Il vient donc

$$dy = v'dt - \frac{vy}{x+y}dt.$$

Si l'on élimine x entre ces deux équations, on trouve

$$dy + \frac{vydt}{V + (v'-v)t} = v'dt$$

qui est une équation linéaire du premier ordre. On trouve en intégrant et en déterminant la constante par la condition que y est égal à 0 pour $t=0$,

$$y = V\frac{\left(1+\frac{v'-v}{V}t\right)^{\frac{v'}{v'-v}} - 1}{\left(1+\frac{v'-v}{V}t\right)^{\frac{v}{v'-v}}},\quad x = \frac{V}{\left(1+\frac{v'-v}{V}t\right)^{\frac{v}{v'-v}}}.$$

Pour $v=v'$, on trouve

$$x = Ve^{-\frac{v}{V}t},\quad y = V\left(1-e^{-\frac{v}{V}t}\right).$$

Il est à remarquer qu'en désignant par z le facteur propre à rendre $Mdy + Ndx = 0$, différentielle exacte et par $u = C$ l'intégrale de cette différentielle, on doit avoir identiquement

$$z(Mdy + Ndx) = du$$

et par conséquent

$$Mdy + Ndx = \frac{du}{z} = 0,$$

équation à laquelle on satisfait soit en posant $u=C$, ce qui reproduit l'intégrale générale mentionnée plus haut, soit en posant $\frac{1}{z}=0$ ou $z=\infty$. Cette dernière équation donne une relation entre x et y qui ordinairement n'est qu'un cas particulier de l'intégrale générale correspondant

à une valeur particulière de la constante arbitraire, c'est-à-dire, une *intégrale particulière*. Quelquefois elle ne peut se déduire de l'intégrale générale, quelque valeur que l'on donne à la constante arbitraire et forme alors une *solution singulière* dont il sera question au N° 186. Si du était divisible par z, comme cela a lieu dans les deux exemples qui précèdent, ce dernier genre de solution n'existerait pas.

178. *Séparation des variables. Équations homogènes.* — Quand une équation différentielle ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité immédiate et qu'on ne peut déterminer par les méthodes précédentes le facteur propre à lui donner cette propriété, l'intégration n'est plus possible que dans des cas particuliers et par des moyens qui doivent être modifiés presque dans chaque exemple. Le plus simple consiste à séparer s'il est possible, les deux variables, afin de mettre l'équation sous la forme

$$fydy = Fxdx.$$

Cette séparation peut se faire immédiatement dans les équations de la forme

$$fx.Fydy = \varphi x.\psi ydx,$$

qu'on peut ramener à

$$\frac{Fy}{\psi y}dy = \frac{\varphi x}{fx}dx$$

et dont l'intégrale est

$$\int \frac{Fy}{\psi y}dy = \int \frac{\varphi x}{fx}dx + C.$$

La séparation des variables est toujours possible dans les équations différentielles algébriques qui sont telles, qu'en y remplaçant x par zy, les deux coefficients de dx et de dy prennent la forme $y^n\varphi z$ et $y^n\psi z$. Les équations sont dites alors *homogènes*. Cela a lieu toutes les fois que la somme des exposants des variables est la même dans chaque terme des deux coefficients, puisque si ceux-ci sont de la forme Ax^py^q, $Bx^{p'}y^{q'}$.... et qu'on ait

$$p + q = p' + q' = \text{etc.} = n,$$

en remplaçant x par yz, ils deviennent Ay^nz^p, $By^nz^{p'}$.... et l'équation différentielle

$$Mdy + Ndx = 0$$

se change en

$$y^n \varphi z dy + y^n \psi z dx = 0,$$

où φz et ψz sont des fonctions de la seule variable z et en remplaçant dx par $zdy + ydz$, cette équation devient

$$(\varphi z + z\psi z) y^n dy + y^{n+1} \psi z dz = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{y} + \frac{\psi z}{\varphi z + z\psi z} dz = 0$$

dans laquelle les variables y et z sont séparées. Après avoir intégré, on remettra pour z sa valeur $\frac{x}{y}$ et l'on aura l'intégrale cherchée. L'intégration d'une équation différentielle homogène est donc toujours possible, ou du moins, ne dépend que d'une quadrature.

Si l'on applique cette méthode aux équations différentielles

$$x^2 dy = y^2 dx + xydx, \quad \frac{x^2 + xy}{x - y} dy = ydx,$$

on obtient les transformées

$$\frac{dy}{y} + \frac{z + 1}{z} dz = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{z - 1}{2z} dz.$$

On opère aussi la séparation des variables dans une équation différentielle homogène, en transformant les coordonnées rectangulaires x, y en coordonnées polaires r et t; car il faudra poser

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad \frac{x}{y} = \cot t,$$

et par suite

$$M = y^n \varphi \left(\frac{x}{y}\right) = r^n \sin^n t \, \varphi (\cot t), \quad N = r^n \sin^n t \, \psi (\cot t);$$

l'équation différentielle deviendra donc en substituant,

$$\frac{dr}{r} = \frac{\psi (\cot t) - \cot t \, \varphi (\cot t)}{\cot t \, \psi (\cot t) + \varphi (\cot t)} dt.$$

Les deux équations différentielles précédentes traitées de cette manière se transforment dans les suivantes :

$$\frac{dr}{r} = (\tang t + \cosec^2 t)\, dt, \quad 2\frac{dr}{r} = (\tang t - \cot t - \cosec^2 t)\, dt.$$

179. *Théorème sur les différentielles homogènes.* — Lorsqu'une équation différentielle homogène satisfait à la condition d'intégrabilité, son intégrale prend une forme d'une simplicité remarquable. On vient de voir que l'équation différentielle

$$Mdy + Ndx = 0$$

peutêtre mise identiquement par de simples substitutions, sous la forme

$$(\varphi z + z\psi z)\, y^n\, dy + y^{n+1}\, \psi z dz = 0; \ldots\ldots (1)$$

si donc la première en x et y est une différentielle exacte, la deuxième en y et z doit l'être également; ce qu'on reconnaît directement, du reste en remarquant que, puisque l'on a

$$M = y^n \varphi z, \quad N = y^n \psi z,$$

la condition d'intégrabilité de la première équation, savoir

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$$

devient, attendu que z est fonction de x et de y,

$$y^n \frac{d\varphi z}{dz}\frac{dz}{dx} = ny^{n-1}\psi z + y^n \frac{d\psi z}{dz}\frac{dz}{dy},$$

et en observant que

$$z = \frac{x}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{dx} = \frac{1}{y}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{dy} = -\frac{x}{y^2},$$

elle prend la forme

$$y^{n-1}\frac{d\varphi z}{dz} = ny^{n-1}\psi z - y^{n-2} x \frac{d\psi z}{dz},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d\varphi z}{dz} + z\frac{d\psi z}{dz} = n\psi z \ldots\ldots (2)$$

et l'on reconnaît aisément que cette équation est précisément la condition pour que l'équation différentielle (1) en y et z soit une différentielle immédiate. Or, si l'on cherche l'intégrale de (1), en faisant usage de la formule du N° 175, savoir :

$$\int Ndx + \int\left(M - \frac{d\int Ndx}{dy}\right)dy + C = 0,$$

ce qui se fera en changeant x en y et y en z, l'intégrale de (1) devient

$$(\varphi z + z\psi z)\frac{y^{n+1}}{n+1} + \int\left\{y^{n+1}\psi z - \frac{y^{n+1}}{n+1}\left(\frac{d\varphi z}{dz} + z\frac{d\psi z}{dz} + \psi z\right)\right\}dz + C = 0$$

que la condition d'intégrabilité représentée par (2) réduit à

$$(\varphi z + z\psi z)\frac{y^{n+1}}{n+1} + C = 0.$$

En remettant pour φz et ψz leur valeur $\frac{N}{y^n}$ et $\frac{M}{y^n}$, on trouve que l'ingrale de l'équation différentielle

$$Mdy + Ndx = 0$$

est

$$\frac{My + Nx}{n+1} + C = 0 \ldots\ldots (3)$$

On reconnaît ainsi que l'intégrale de

$$(x^2 - 2y^2)dy + (x^2 + 2xy)dx = 0$$

qui satisfait aux conditions d'intégrabilité et d'homogénéité, est

$$\frac{(x^2 - 2y^2)y + (x^2 + 2xy)x}{3} + C = 0.$$

Si l'on emploie comme au N° 178, les coordonnées polaires, on trouve

pour l'intégrale générale de l'équation différentielle $Mdy + Ndx = 0$,

$$r = \frac{A \operatorname{cosec} t}{\sqrt[n+1]{\varphi(\cot t) + \cot t\psi(\cot t)}}$$

qui tient lieu de l'intégrale (3).

Quand n est égal à -1, la formule qu'on vient de démontrer ne saurait faire connaître l'intégrale et serait en défaut, puisque $\frac{1}{n+1}$ deviendrait infini. Ce cas est analogue à celui où $n = -1$ dans la formule

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

et l'intégrale se trouverait en séparant les variables comme au N° 178. Ainsi

$$\frac{x^2 + y^2}{y^3} dy - \frac{x}{y^2} dx = 0$$

donnerait par le théorème sur les différentielles homogènes, l'équation

$$\frac{1}{0} + C = 0,$$

qui n'apprend rien sur la relation entre x et y, tandis que, par la séparation des variables, on trouve

$$\log y - \frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2} + C = 0.$$

Il est à remarquer que lorsque $n = -1$, la condition d'intégrabilité (2) prend la forme

$$\frac{d\varphi z}{dz} + z\frac{d\psi z}{dz} + \psi z = 0$$

qui est la dérivée de

$$\varphi z + z\psi z = \text{const} = a.$$

L'équation différentielle (1) devient ainsi

$$ay^n dy + y^{n+1}\psi z dz = 0$$

ou

$$a\frac{dy}{y} + \psi z dz = 0.$$

L'intégrale de $Mdy + Ndx = 0$ prend donc la forme

$$a \log y = -\int \psi z dz \quad \text{ou} \quad y^a = e^{-\int \psi z dz}.$$

180. ***Second théorème sur les différentielles homogènes.*** — Une différentielle homogène

$$Mdy + Ndx = 0$$

jouit encore de cette propriété, que si elle ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, le facteur $\frac{1}{My + Nx}$ la rend toujours diffrenétielle exacte; en effet, on a vu (178) qu'elle prend la forme

$$(\varphi z + z\psi z)\, y^n dy + y^{n+1}\psi z dz = 0,$$

de sorte que l'on a identiquement

$$Mdy + Ndx = \left[\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\psi\left(\frac{x}{y}\right)\right] y^n dy + y^{n+1}\psi\left(\frac{x}{y}\right) d\left(\frac{x}{y}\right)$$

et il est visible que le facteur $\frac{1}{y^{n+1}(\varphi z + z\psi z)}$ rend le second membre et par conséquent le premier, différentielle exacte, puisqu'il lui fait prendre la forme

$$\frac{dy}{y} + \frac{\psi z}{\varphi z + z\psi z} dz = 0,$$

qui se compose de deux différentielles exactes. En remplaçant φz et ψz par leur valeur $\frac{M}{y^n}$ et $\frac{N}{y^n}$, on reconnaît que ce facteur n'est autre que $\frac{1}{My + Nx}$.

Remarquons qu'après avoir fait usage de ce facteur pour rendre intégrable une différentielle homogène donnée, on ne pourrait obtenir l'intégrale au moyen de la formule du numéro précédent, parce que la différentielle rendue exacte, se trouverait dans le cas d'exception

indiqué plus haut, le numérateur étant évidemment d'un degré moins élevé d'une unité que le dénominateur, dans la fraction homogène $\frac{Mdy + Ndx}{My + Nx}$.

181. *Procédés divers d'intégration. Problèmes divers. Problème des trajectoires.* — Quelquefois on peut, par un changement de variable, ou par une transformation, rendre intégrable une équation différentielle qui primitivement ne l'était pas; ainsi

$$(ax + by + c)^n dy + (a'x + b'y + c')^n dx = 0$$

deviendra homogène si l'on fait

$$ax + by + c = z, \quad a'x + b'y + c' = u$$

et pourra par conséquent être intégrée. De même si dans l'équation

$$dy + Pydx = Qy^n dx,$$

P et Q sont des fonctions de x, en faisant $y = z^{\frac{1}{1-n}}$, elle devient

$$dz - (n - 1) Pzdx = -(n - 1) Qdx$$

qui est intégrable comme l'équation linéaire du premier ordre (N° 177). Cette équation différentielle est connue sous le nom de *Équation de Jacques Bernoully.*

Les problèmes suivants offrent des applications des méthodes d'intégration exposées plus haut.

1° *Trouver une courbe telle que l'aire du quadrilatère formé par les deux axes rectangulaires, l'ordonnée et la tangente, soit proportionnelle au carré de l'ordonnée.*

Cette aire est représentée par $x\left(y - \frac{1}{2}x\frac{dy}{dx}\right)$ et la condition est exprimée par l'équation

$$x\left(2y - x\frac{dy}{dx}\right) = 2ay^2$$

qui est homogène et a pour intégrale

$$x^2 - 2axy + Cy = 0.$$

Elle représente une hyperbole. Si l'aire devait être proportionnelle au carré de l'abscisse, on trouverait pour solution une parabole ayant pour équation

$$x^2 + 2aCx = Cy.$$

2° *Trouver une courbe telle que la distance de l'un de ses points à l'origine soit partout moyenne proportionnelle entre la sous-normale et une constante a.*

On trouve sans peine l'équation de condition

$$ay\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

d'où l'on tire

$$dy - \frac{1}{a}ydx = \frac{x^2}{a}y^{-1}\,dx$$

qui rentre dans l'équation de Jacques Bernoully. Son intégrale est

$$y^2 = Ce^{\frac{2x}{a}} - x^2 - ax - \frac{a^2}{2}.$$

3° Pour dernière application, nous prendrons la théorie des *trajectoires*. C'est ainsi que l'on appelle en analyse, la courbe qui coupe sous un angle constant toutes les courbes représentées par une même équation

$$f(x, y, a) = 0,$$

dans laquelle le paramètre a prend toutes les valeurs possibles. La touchante à la courbe variable fait avec l'axe des X un angle dont la tangente trigonométrique est $-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$, en représentant par f la fonction $f(x, y, a)$. La touchante à la trajectoire, au point où elle croise la courbe variable, fait avec le même axe un angle ayant pour tangente trigonométrique $\frac{dy}{dx}$; ces deux tangentes font donc entre elles un

angle ayant pour tangente

$$\frac{\frac{dy}{dx}+\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}}{1-\frac{dy}{dx}\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}}=\frac{\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}-\frac{dy}{dx}\frac{df}{dx}}.$$

En représentant la tangente de cet angle constant par k, il vient donc

$$k=\frac{\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{df}{dx}},$$

et si, après avoir remplacé $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$ par leur valeur tirée de

$$f(x, y, a)=0,$$

on élimine a entre cette dernière et la valeur de k, on aura une équation différentielle qui sera indépendante de a et qui conviendra par conséquent à toutes les intersections des courbes variables par la trajectoire; elle sera donc l'équation différentielle de cette dernière. Si la trajectoire doit rencontrer la courbe variable sous un angle droit, auquel cas la trajectoire est dite *orthogonale*, il faudra faire alors $\frac{1}{k}=0$ et par conséquent

$$\frac{df}{dy}-\frac{dy}{dx}\frac{df}{dx}=0.$$

Cette équation différentielle représente toutes les trajectoires orthogonales possibles pour la courbe variable donnée et l'intégrale de cette équation contient une constante arbitraire que l'on détermine en assujetissant la courbe à une condition particulière, par exemple, à passer par un point donné.

Proposons-nous, par exemple, de *trouver la trajectoire orthogonale*

de tous les cercles tangents en un même point d'une droite donnée. En prenant ce point pour origine et la droite pour axe des Y, l'équation de l'un des cercles est

$$y^2 - 2ax + x^2 = 0;$$

on a donc

$$\frac{df}{dy} = 2y, \quad \frac{df}{dx} = 2x - 2a$$

et par conséquent

$$2y + 2\frac{dy}{dx}(a - x) = 0.$$

L'élimination de a entre cette dernière et l'équation du cercle donne

$$2xydx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$$

qui prend la forme de l'équation linéaire du premier ordre en faisant $x^2 = z$, et l'on trouve pour intégrale

$$x^2 = y\,(C - y),$$

c'est-à-dire, que la trajectoire orthogonale est un cercle quelconque tangent à l'axe des X, à l'origine. Si la trajectoire doit passer par un point dont les coordonnées sont (x', y'), on détermine C par la condition

$$x'^2 = y'\,(C - y').$$

Cherchons encore la trajectoire oblique d'une droite mobile passant par un point fixe. Cette droite est donnée par $y = ax$ et l'équation de condition prend la forme

$$k = \frac{\frac{dy}{dx} - a}{1 + a\frac{dy}{dx}}.$$

En éliminant le paramètre variable a, on trouve pour équation différentielle de la trajectoire,

$$(ky - x)\,dy + (kx + y)\,dx = 0.$$

Cette équation étant homogène, la séparation des variables s'opère immédiatement en passant aux coordonnées polaires, d'après ce qu'on a vu au N° 178 et il vient en remplaçant x et y par $r\cos t$ et $r\sin t$,

$$\frac{dr}{r}=\frac{dt}{k}; \quad \text{d'où} \quad r=Ce^{\frac{t}{k}}.$$

La trajectoire oblique est donc une spirale logarithmique. On a vu en effet (N° 73) que dans cette courbe, l'angle formé par le rayon vecteur avec la tangente est constant.

CHAPITRE XIV.

Intégration des équations différentielles du premier ordre et d'un degré quelconque. — Intégration dans certains cas particuliers. — Problèmes divers. — Lignes de courbure de l'ellipsoïde. — Solutions singulières des équations différentielles. — Solutions singulières déduites de l'équation dérivée. Exemples divers. — Signification géométrique des solutions singulières. — Théorie géométrique des solutions singulières.

182. *Intégration des équations différentielles du premier ordre et d'un degré quelconque.* — Souvent en posant certains problèmes en équation, on est conduit à des équations dérivées dans lesquelles le coefficient $\frac{dy}{dx}$ est élevé à une puissance supérieure à la première. On appelle encore intégrale toute équation primitive qui étant différenciée, donne pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur qui satisfait à l'équation dérivée donnée. Pour trouver l'intégrale d'une semblable équation, dont la forme la plus générale est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + A\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + B\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} \cdots\cdots + P\frac{dy}{dx} + Q = 0 \ldots\ldots (1)$$

A, B, C, P, Q, etc., étant des fonctions de (x, y), remarquons que si on la résout par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et qu'on représente par $f, f', f''\ldots\ldots$ les différentes racines, on pourra la mettre sous la forme

$$\left(\frac{dy}{dx} - f\right)\left(\frac{dy}{dx} - f'\right)\left(\frac{dy}{dx} - f''\right) \cdots\cdots = 0.$$

L'équation différentielle proposée exprime donc que l'un des facteurs du premier membre est nul, c'est-à-dire que le coefficient $\frac{dy}{dx}$ est égal à l'une des fonctions f, f', f''..... et que l'équation donnée tient lieu de l'une quelconque des suivantes

$$\frac{dy}{dx}=f, \quad \frac{dy}{dx}=f', \quad \frac{dy}{dx}=f''.....$$

dont les intégrales satisferont toutes à l'équation différentielle proposée et en seront par conséquent des intégrales.

De même que l'équation différentielle du degré n, quoique unique, indique les n valeurs que peut prendre $\frac{dy}{dx}$, de même on peut aussi renfermer dans une même équation les n intégrales qui satisfont à la proposée; en effet si $F(x, y, C)=0$, $F'(x, y, C')=0$, $F''(x, y, C'')=0$, etc. sont les intégrales correspondantes à chaque valeur de $\frac{dy}{dx}$, il suffira de poser l'équation

$$F(x, y, C) \cdot F'(x, y, C') \cdot F''(x, y, C'') \cdots\cdots = 0$$

qui indique que l'un quelconque des facteurs est nul et qui reproduit par conséquent chacune des intégrales. Cette dernière équation est dite pour cette raison l'*intégrale complète* de l'équation du degré n. Comme dans les applications, chaque facteur doit être égalé séparément à zéro, il est inutile de distinguer les différentes constantes arbitraires par des lettres particulières C, C', C'', etc.; l'intégrale complète peut se mettre sous la forme

$$F(x, y, C) \cdot F'(x, y, C) \cdot F''(x, y, C) \cdots\cdots = 0.$$

Ainsi l'équation

$$ydy^3 - xdx^3 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{x}{y} = 0$$

n'est autre que la suivante

$$\left(\frac{dy}{dx}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)\left[\frac{dy}{dx}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\right]\left[\frac{dy}{dx}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\right]=0$$

et son intégrale complète est

$$[y^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{4}{3}}+C][y^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{4}{3}}(-1+\sqrt{-3})+C][y^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{4}{3}}(-1-\sqrt{-3})+C]=0,$$

ou bien

$$y^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{4}{3}}=C.$$

183. *Intégration dans certains cas particuliers.* — La résolution par rapport à $\frac{dy}{dx}$ peut présenter des difficultés que l'on évite quelquefois, lorsque l'équation est résoluble par rapport à y ou par rapport à x; car en désignant $\frac{dy}{dx}$ par p, on pourra en tirer dans le premier cas,

$$y=\varphi(x, p)$$

d'où, en dérivant par rapport à x,

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad p=\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx}.$$

Comme $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dp}$ sont des fonctions connues de x et p, cette équation est une dérivée du premier degré et du premier ordre entre les variables p et x. Après l'avoir intégrée, il suffira d'éliminer p entre l'intégrale et l'équation proposée pour avoir l'équation en (x, y) que l'on cherche. Dans le deuxième cas on aura

$$x=\varphi(y, p),$$

d'où, en dérivant par rapport à x,

$$1=\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx}=\frac{d\varphi}{dy}p+\frac{d\varphi}{dp}\frac{pdp}{dy},$$

et comme $\frac{d\varphi}{dy}$ et $\frac{d\varphi}{dp}$ ne sont fonctions que de y et p, il suffira d'intégrer cette équation différentielle du premier degré et du premier ordre à deux variables y et p et d'éliminer ensuite p entre l'intégrale et l'équation différentielle donnée. Prenons pour exemple

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x\frac{dy}{dx}+y=0 \quad \text{ou} \quad p^2-2px+y=0.$$

En résolvant par rapport à y et dérivant, il vient

$$p = 2\frac{dp}{dx}(p - x),$$

équation homogène en p et x, qui a pour intégrale

$$p^2\left(p - \frac{3}{2}x\right) = C.$$

En éliminant p entre cette dernière et la proposée, on trouve pour l'intégrale cherchée

$$2x^3 - 3xy \pm 2(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = 2C,$$

ou plutôt, en confondant les deux solutions,

$$(2C + 3xy - 2x^3)^2 = 4(x^2 - y)^3.$$

184. *Problèmes divers.* — Les problèmes suivant serviront d'application aux méthodes d'intégration exposées dans les numéros qui précèdent.

1° *Trouver une courbe rapportée à des axes rectangulaires, telle que sa normale en un point quelconque soit égale à la distance de ce point à l'origine.*

Ce problème conduit à l'équation

$$y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{y^2 + x^2}$$

ou bien

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{x^2}{y^2} = 0.$$

Au point de vue analytique, l'intégrale complète de cette équation différentielle est

$$(y^2 - x^2 - C)(y^2 + x^2 - C) = 0, \quad \text{ou} \quad (y^2 - C)^2 - x^4 = 0;$$

mais si l'on se place au point de vue géométrique, on trouvera l'équation de la courbe cherchée en égalant séparément à zéro chacun des facteurs. La première solution

$$y^2 - x^2 - C = 0$$

donne une hyperbole équilatère rapportée à ses axes, et la seconde,

$$y^2 + x^2 - C = 0$$

donne un cercle rapporté à son centre.

2° *Trouver une courbe telle que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente soit égale à l'ordonnée du point de contact.*

L'équation différentielle du problème est

$$\frac{y - \frac{dy}{dx}x}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

et l'on trouve pour intégrale complète,

$$(x^2 + y^2 - Cy)(y - C) = 0,$$

et pour solutions, une droite parallèle à l'axe des X et un cercle rapporté à une tangente et à un diamètre perpendiculaire.

3° *Trouver une courbe telle que l'arc compté à partir d'un point fixe soit moyenne proportionnelle entre l'ordonnée et la double abscisse.*

On est conduit à l'équation

$$s = \sqrt{2xy}$$

qui étant dérivée, en observant que $\frac{ds}{dx}$ est égal à $\sqrt{1 + p^2}$, donne

$$\sqrt{2xy}\sqrt{1 + p^2} = xp + y.$$

Pour intégrer cette équation, on pose $y = xz^2$, et après avoir éliminé y, on trouve

$$\frac{dx}{x} = \pm\sqrt{2}\frac{dz}{z^2 - 1} - \frac{2z\,dz}{z^2 - 1};$$

les équations des deux courbes sont donc

$$C = (y - x)\left(\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad C = (y - x)\left(\frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

4° *Trouver une courbe telle que la perpendiculaire abaissée d'un point fixe sur les tangentes soit constante et égale à a.*

L'équation différentielle à laquelle conduit ce problème, en plaçant l'origine des coordonnées au point fixe, est

$$\frac{dy}{dx}x - y = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy \pm a\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{x^2 - a^2}.$$

En faisant $a^2 - x^2 = z^2$, on trouve après réductions,

$$zdy - ydz = \pm \frac{a\sqrt{y^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}dz,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{d\frac{y}{z}}{\sqrt{\frac{y^2}{z^2} - 1}} = \pm \frac{adz}{z\sqrt{a^2 - z^2}} = \pm \frac{adx}{x^2 - a^2}.$$

En intégrant les deux membres, il vient

$$\log\left\{\frac{y}{z} + \sqrt{\frac{y^2}{z^2} - 1}\right\} = \pm \log\left(\frac{a - x}{a + x}\right)^{\frac{1}{2}} + \log C.$$

Les deux solutions sont donc

$$y + \sqrt{y^2 + x^2 - a^2} - C(a - x) = 0, \quad y + \sqrt{y^2 + x^2 - a^2} - C(a + x) = 0,$$

ou bien, en faisant disparaître les radicaux,

$$a^2 - x^2 + C^2(a - x)^2 - 2Cy(a - x) = 0,$$

et

$$a^2 - x^2 + C^2(a + x)^2 - 2Cy(a + x) = 0.$$

Comme $a - x$ et $a + x$ sont des facteurs communs, ces solutions se décomposent chacune en deux autres qui sont, pour la première équation,

$$x = a, \quad x = \frac{2C}{1 - C^2} y - a \frac{1 + C^2}{1 - C^2},$$

et pour la seconde

$$x = -a, \; x = \frac{-2C}{1 - C^2} y + a \frac{1 + C^2}{1 - C^2}$$

qui représentent quatre lignes droites. La première et la troisième sont parallèles à l'axe des Y; la seconde et la quatrième sont des droites dirigées d'une manière quelconque, mais dont la distance à l'origine est égale à a ainsi qu'on peut s'en assurer. Les trois premières ne sont du reste que des cas particuliers de la quatrième, puisqu'on peut les en déduire en égalant successivement la constante arbitraire C à zéro, à l'infini et à $\frac{1}{C}$. Cette quatrième doit donc être considérée comme étant l'intégrale complète.

Si la même équation était intégrée par le procédé indiqué au N° 183, c'est-à-dire, en la résolvant par rapport à y et dérivant, on serait conduit à un résultat différent, ce qui provient de ce que $\frac{dp}{dx}$ peut disparaître de la dérivée. Cette différence dans les intégrales s'expliquera au N° 186.

185. *Lignes de courbure de l'ellipsoïde.* — Lorsque aucune des méthodes indiquées plus haut pour l'intégration d'une équation différentielle d'un degré supérieur n'est praticable, il faut avoir recours à des procédés particuliers pour lesquels il n'y a plus de règle fixe, et qui varient pour chaque cas. Un moyen qui réussit dans un assez grand nombre de cas consiste à dériver une ou plusieurs fois l'équation proposée et à éliminer une ou plusieurs constantes entre ces dérivées. L'équation finale privée de ces constantes est souvent moins rebelle à l'intégration que la proposée. Prenons pour exemple, le problème de la détermination des lignes de courbure tracées sur une surface donnée. On a vu dans le calcul différentiel (N° 118) que les projections de ces courbes sur le plan des XY ont pour équation différentielle

$$\frac{(1 + p^2)dx + pqdy}{rdx + sdy} = \frac{(1 + q^2)dy + pqdx}{tdy + sdx},$$

dans laquelle p, q, r, s, t sont les dérivées partielles du premier et du second ordre tirées de l'équation de la surface

$$z = f(x, y),$$

et sont par conséquent des fonctions de x et de y. En substituant les valeurs de p, q, r, s, t, on sera conduit à une équation différentielle du premier ordre et du second degré dont les intégrales en (x, y) sont les équations des projections dans le plan des XY des deux séries de lignes de courbure.

La présence d'une constante arbitraire dans l'intégrale indique que ces lignes sont en nombre infini et pour particulariser, il faudra déterminer la valeur de cette constante par la condition que la courbe passe par un point donné de la surface. Chacune de ces intégrales, jointe à l'équation de la surface, déterminera complètement la ligne de courbure.

En appliquant cette équation à l'ellipsoïde représenté par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on trouve

$$mxy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - my^2 - n)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

dans laquelle on a fait

$$m = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}, \quad n = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}.$$

Si l'on dérive cette équation, qu'on élimine n entre celle-ci et sa dérivée et qu'on supprime ensuite le facteur commun $m\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$, on ramène l'équation à la forme

$$\frac{\frac{d^2y}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{ou} \quad \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}; \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = C\frac{x}{y}.$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre cette dernière et l'équation différentielle trouvée plus haut, il vient

$$(mC^2 + C)x^2 - y^2(mC + 1) = nC \ldots\ldots (1)$$

qui est l'intégrale complète cherchée. Après l'avoir résolue par rapport à C, on la mettra sous la forme

$$\left(\frac{my^2+n-x^2+\sqrt{(my^2+n-x^2)^2+2mx^2y^2}}{2mx^2}-C\right)$$

$$\left(\frac{my^2+n-x^2-\sqrt{(my^2+n-x^2)^2+2mx^2y^2}}{2mx^2}-C\right)=0$$

et chacun des facteurs égalé à zéro représente la projection de l'une des deux lignes de courbure. Si l'on rend rationnelle l'une ou l'autre des deux équations, on retrouve l'équation (1); les deux projections sont donc des sections coniques.

Pour déterminer C, on assujétira la courbe à passer par un point donné (x', y', z') et l'on aura à résoudre l'équation

$$mx'^2C^2+(x'^2-my'^2-n)\,C-y'^2=0$$

qui donne pour C deux valeurs correspondant aux deux lignes de courbure.

Ces deux valeurs sont toujours visiblement de signes contraires à cause du terme négatif $-y'^2$ qui représente le produit des racines; d'où l'on conclut que ces projections sont, l'une, une ellipse et l'autre, une hyperbole; car l'équation de ces courbes peut se mettre sous la forme

$$Cx^2-y^2=\frac{nC}{mC+1}$$

qui appartient à l'une ou l'autre de ces sections coniques suivant que C est négatif ou positif.

186. *Solutions singulières des équations différentielles.* — Toute équation différentielle est susceptible d'un nombre infini d'intégrales, différant les unes des autres par la valeur de la constante arbitraire, puisque celle-ci peut prendre une valeur quelconque. Lorsque cette constante est indéterminée, l'intégrale est dite *générale*; mais lorsqu'on lui a assigné une certaine valeur, l'intégrale qui n'est plus qu'un cas particulier de l'intégrale générale, est dite *intégrale particulière*. En général, toute équation primitive sans constante arbitraire qui, étant différenciée, satisfait à une équation différentielle donnée, est comprise parmi ces intégrales particulières; cependant il existe des classes nombreuses d'équations différentielles auxquelles satisfont cer-

taines équations primitives que l'on ne peut déduire de l'intégrale générale, quelque valeur constante que l'on attribue à la constante arbitraire et qui conséquemment ne peuvent être rangées parmi les intégrales particulières. Ces équations se nomment *solutions singulières*. Pour les découvrir, désignons une équation différentielle par

$$f(x, y, p) = 0.....(1)$$

dans laquelle p ou $\frac{dy}{dx}$ entre à une puissance quelconque. Soit

$$F(x, y, C) = 0.....(2)$$

l'intégrale générale renfermant la constante arbitraire C. La dérivée immédiate de cette intégrale est

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} p = 0.....(3)$$

et pour que l'équation (2) soit l'intégrale de (1) il faut et il suffit qu'en éliminant C entre

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} p = 0,$$

on retrouve l'équation dérivée proposée (1). Mais examinons si l'équation

$$f(x, y, p) = 0$$

ne peut pas quelquefois être satisfaite par la même équation

$$F(x, y, C) = 0,$$

c'est-à-dire, résulter de l'élimination de C entre cette dernière et son équation dérivée, en donnant à C non plus une valeur constante, mais une certaine valeur variable fonction de (x, y). La dérivée totale de

$$F(x, y, C) = 0$$

serait dans cette hypothèse,

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dC} \left(\frac{dC}{dx} dx + \frac{dC}{dy} dy \right) = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(1+\frac{\frac{dF}{dC}}{\frac{dF}{dx}}\cdot\frac{dC}{dx}\right)\frac{dF}{dx}+\left(1+\frac{\frac{dF}{dC}}{\frac{dF}{dy}}\cdot\frac{dC}{dy}\right)\frac{dF}{dy}p=0;$$

si donc la valeur de C en (x, y), est telle que l'on ait

$$\frac{\frac{dF}{dC}}{\frac{dF}{dx}}\cdot\frac{dC}{dx}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\frac{dF}{dC}}{\frac{dF}{dy}}\cdot\frac{dC}{dy}=0,\ldots..(4)$$

cette équation dérivée reprendra la même forme que lorsque C était une constante, savoir

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}p=0$$

et par conséquent le résultat de l'élimination de C entre (2) et (3) sera encore $f(x, y, p)=0$, c'est-à-dire que l'équation (1) sera aussi satisfaite par (2), quoique C soit remplacé par une fonction en x, y, et que dès lors $F(x, y, C)=0$ ne soit plus une intégrale particulière. On peut remplir les deux conditions (4) de plusieurs manières; 1° en faisant

$$\frac{dC}{dx}=0, \quad \text{et} \quad \frac{dC}{dy}=0,$$

ce qui indique que C ne contient ni x, ni y, ou que C est une constante arbitraire. Alors la fonction F n'est autre chose que l'intégrale générale; 2° en posant

$$\frac{dF}{dC}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dF(x, y, C)}{dC}=0.$$

On obtient ainsi une équation en (x, y) et C, d'où l'on déduira une valeur de C que l'on substituera dans

$$F(x, y, C)=0.$$

Si cette valeur de C est constante, l'intégrale générale

$$F(x, y, C)=0$$

ne sera encore qu'une intégrale particulière; mais si elle renferme des

x et y, l'intégrale générale deviendra une solution singulière; 3° on satisfait encore aux deux équations de condition (4), en posant simultanément

$$\frac{1}{\frac{dF}{dx}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\frac{dF}{dy}} = 0,$$

équations dont l'une ne peut exister sans entraîner l'autre, à cause de la relation

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} p = 0.$$

La valeur de C tirée de l'une de ces dernières et substituée dans

$$F(x, y, C) = 0,$$

donnera encore, en général, une solution singulière.

187. *Solutions singulières déduites de l'équation dérivée. Exemples divers.* — Nous avons déduit, dans ce qui précède, les solutions singulières d'une équation différentielle, de son intégrale générale $F(x, y, C) = 0$, que l'on suppose par conséquent connue. — On peut aussi trouver les solutions sans connaître l'intégrale; en effet, soit

$$f(x, y, p) = 0$$

l'équation dérivée donnée,

$$F(x, y, C) = 0$$

son intégrale médiate et

$$\varphi(x, y, C, p) = 0$$

la dérivée immédiate de F. Puisque ces trois équations doivent coexister, il est visible qu'on peut considérer l'intégrale générale comme résultant de l'élimination de p entre

$$f(x, y, p) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, C, p) = 0;$$

si donc, on tire de cette dernière, la valeur de p

$$p = \psi(x, y, C)$$

représentée, pour abréger, par ψ et qu'on la substitue dans la première, l'intégrale générale prendra la forme

$$f(x, y, \psi) = 0,$$

la constante arbitraire étant renfermée dans la fonction ψ; or, on a

vu plus haut que la solution singulière s'obtient en éliminant la constante arbitraire entre l'intégrale et sa dérivée prise par rapport à cette constante et égalée à zéro; cette solution résultera donc de l'élimination de C entre

$$f(x, y, \psi) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df(x, y, \psi)}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dC} = 0.$$

Cette seconde équation est satisfaite en posant

$$\frac{df(x, y, \psi)}{d\psi} = 0,$$

et comme la fonction ψ tient lieu de p, on voit qu'il suffira d'éliminer p entre $f(x, y, p) = 0$ et $\frac{df(x, y, p)}{dp} = 0$.

Nous avons vu aussi dans le numéro précédent, que quelquefois l'une des équations

$$\frac{dF}{dy} = \frac{1}{0} \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dx} = \frac{1}{0}$$

peut donner des solutions singulières; il suit de là, que puisque l'intégrale générale $F = 0$ est maintenant

$$f(x, y, \psi) = 0,$$

les solutions singulières seront aussi données par l'une ou l'autre des équations

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{d\psi}\frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{0} \quad \text{et} \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{d\psi}\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{0},$$

équations auxquelles on satisfait en faisant $\frac{df}{d\psi} = \frac{1}{0}$, c'est-à-dire,

$$\frac{df}{dp} = \frac{1}{0}.$$

Prenons pour exemples les équations dérivées

$$(x^2 + 2y^2)p^2 - 4xyp + x^2 = 0, \quad p^2 - 2px + y = 0,$$

dont les intégrales générales sont

$$y^2 - 2Cy - x^2 - C^2 = 0, \quad (2C + 3xy - 2x^3)^2 = 4(x^2 - y)^3.$$

On tire de celles-ci

$$\frac{dF}{dC} = -2y - 2C \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dC} = 4(2C + 3xy - 2x^3)$$

et en faisant

$$\frac{dF}{dC} = 0,$$

on trouve $C = -y$ pour l'une et $2C = 2x^3 - 3xy$ pour l'autre, et les intégrales générales deviennent

$$2y^2 - x^2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - y = 0.$$

La première satisfait à l'équation dérivée donnée et en forme une solution singulière.

On serait arrivé aux mêmes résultats en égalant à zéro les dérivées des équations données, prises par rapport à p, car on est alors conduit aux équations

$$(x^2 + 2y^2)\,p - 2xy = 0 \quad \text{et} \quad 2p - 2x = 0,$$

et en éliminant p entre celles-ci et les équations données, on trouve encore

$$2y^2 - x^2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - y = 0.$$

Il est à remarquer que l'équation $x^2 - y = 0$, bien qu'elle ait été déduite de la seconde des équations dérivées par les procédés ordinaires, n'y satisfait cependant pas et n'en est pas une solution singulière.

L'équation

$$px - y = a\sqrt{1 + p^2}$$

dont on s'est occupé au N° 184, 4°, donne pour $\frac{df}{dp} = 0$,

$$x - \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = 0$$

et en éliminant p entre ces deux équations, on trouve pour solution singulière,

$$y^2 + x^2 = a^2$$

qui appartient à un cercle et donne la vraie solution du problème du

N° 184, 4°. On est conduit au même résultat en partant de l'intégrale complète

$$x = \frac{-2C}{1-C^2}y + a\frac{1+C^2}{1-C^2},$$

et dérivant par rapport à C.

L'équation dérivée

$$x + p^2y - p\sqrt{x^2+y^2-a^2} = 0$$

a pour solution singulière

$$x^2 + y^2 - 4xy = a^2.$$

Enfin l'équation

$$mxyp^2 + (x^2 - my^2 - n)p - xy = 0$$

qui représente les projections des lignes de courbure de l'ellipsoïde (N° 185), a pour solution singulière

$$(x^2 - my^2 - n)^2 + 4mx^2y^2 = 0.$$

Si les trois axes sont inégaux et rangés dans l'ordre de grandeur a, b, c, il est visible que m et n sont positifs et cette équation se décompose dans les deux suivantes

$$y = 0, \quad x = \pm\sqrt{n}$$

qui représentent deux points placés sur l'axe a, à égale distance du centre. Les points de la surface qui correspondent à ceux-ci ne sont autres que les ombilics (N° 115).

188. *Signification géométrique des solutions singulières.* — Les solutions singulières ont une signification géométrique fort remarquable. On a vu dans la théorie des courbes enveloppes, que si l'on élimine la constante a entre les deux équations

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{df(x, y, a)}{da} = 0,$$

le résultat de l'élimination était l'équation de la courbe, qui enveloppe toutes celles que l'on obtient en faisant passer a par toutes les valeurs possibles dans

$$f(x, y, a) = 0;$$

or, les solutions singulières résultent aussi de l'élimination de la constante arbitraire entre les deux équations

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF(x, y, C)}{dC} = 0;$$

d'où il suit qu'une solution singulière d'une équation dérivée, représente, en géométrie, la conrbe enveloppe de toutes les courbes que peut représenter l'intégrale générale en donnant à la constante arbitraire toutes les valeurs possibles, ou ce qui est la même chose, la solution singulière représente la courbe enveloppe de toutes les courbes que peut représenter l'équation dérivée. Ainsi, dans le second des problèmes du numéro précédent, le cercle qui forme la solution singulière est celui qui est tangent à toutes les droites également distantes de l'origine.

189. *Théorie géométrique des solutions singulières.* — Toute cette théorie des solutions singulières peut s'établir fort simplement par des considérations géométriques. Si ab, $a'b'$, $a''b''$..... (fig. 22) sont les différentes courbes représentées par l'équation dérivée

$$f(x, y, p) = 0,$$

ou son intégrale, les valeurs des trois variables x, y, p correspondant aux points m, m', m''..... M, déterminés par une parallèle pM à l'axe des X, doivent satisfaire à cette équation et comme y ou Ap est le même pour tous ces points, on connaîtra la valeur des pM correspondant à l'enveloppe de toutes les courbes variables, en déterminant la valeur de p qui rend x maximum, c'est-à-dire, en posant $\frac{dx}{dp} = 0$, $y = Ap$ restant constant; mais on a

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{\frac{df}{dp}}{\frac{df}{dx}};$$

d'où il suit que le maximum s'obtient soit en posant $\frac{df}{dp} = 0$, soit en posant $\frac{df}{dx} = \infty$. Si l'on mène la droite pM parallèlement à l'axe des X, on reconnaîtra de la même manière que la solution singulière

est donnée aussi par $\frac{df}{dy} = \infty$. En remplaçant p par sa valeur tirée de l'une ou l'autre de ces dernières, l'équation dérivée proposée ne représentera plus que le lieu des points extrêmes, c'est-à-dire, la courbe enveloppe. L'équation de cette courbe, en général, ne satisfera pas à l'intégrale, quelque valeur invariable que l'on donne à la constante arbitraire, car il faudrait pour cela que la courbe enveloppe se confondit avec l'une des courbes $ab, a'b', a''b''$...... qui sont les lieux géométriques de l'intégrale pour les différentes valeurs invariables de la constante arbitraire. L'équation de cette enveloppe est donc, en général, ce que nous avons appelé une *solution singulière*.

De même si $F(x, y, C) = 0$ est l'intégrale de la proposée, l'ordonnée maximum pM (fig. 22) s'obtiendra en cherchant la valeur de C qui rend x maximum, $y = Ap$ restant constant, c'est-à-dire, en posant $\frac{dx}{dC} = 0$; mais on a

$$\frac{dx}{dC} = -\frac{\frac{dF}{dC}}{\frac{dF}{dx}};$$

d'où il suit que ce maximum est donné par $\frac{dF}{dC} = 0$ ou par $\frac{dF}{dx} = \infty$ et l'élimination de C conduira comme plus haut à l'équation de la courbe enveloppe. Cette équation satisfera à l'équation dérivée pour le même motif que plus haut; mais comme la valeur de C tirée de $\frac{dF}{dC} = 0$ pour la substituer dans $F(x, y, C) = 0$ contiendra, en général, les variables x et y, cette valeur ne sera pas constante et ne conduira aussi qu'à une solution singulière.

La signification géométrique des solutions singulières conduit immédiatement à la résolution de ce problème : *Trouver une équation différentielle qui ait pour solution singulière, une équation donnée.* Il suffira de chercher, comme au (N° 77), l'équation de la courbe variable qui a pour enveloppe la courbe donnée. L'équation sera, il est vrai, de forme finie; mais si entre celle-ci et sa dérivée, on élimine la constante arbitraire, on sera conduit à l'équation différentielle demandée.

On a vu à la fin du N° 75, dans la théorie des courbes enveloppes, que si par des transformations on parvient à ramener l'équation de la

courbe variable à deux termes, dont l'un soit multiplié par une fonction quelconque du paramètre, la courbe enveloppe se réduit à un point. En rapprochant cette propriété de celle qui précède, on reconnait aussi que, si une équation différentielle ou son intégrale peuvent être réduites à deux termes rationnels, dont l'un soit multiplié par une fonction de la seule dérivée p, quand il s'agit de l'équation différentielle, ou de la seule constante arbitraire C, quand il s'agit de l'intégrale, la solution singulière se réduit à un point que l'on détermine en égalant à zéro les deux termes de l'équation. Les lignes de courbure de l'ellipsoïde, traitées au numéro précédent, offrent un exemple de ce cas, puisqu'on peut mettre leur équation dérivée sous la forme

$$(x^2 - my^2 - n)\frac{p}{mp^2 - 1} + xy = 0.$$

Il est à remarquer que l'interprétation géométrique des solutions singulières est assez souvent en défaut. On en a un exemple dans l'application que l'on vient de faire de cette théorie aux lignes de courbure de l'ellipsoïde. Cette équation donne, comme on l'a vu plus haut, pour solution singulière ou pour enveloppe, l'ombilic pour lequel on a trouvé (N° 115), $y = 0$, $x = \pm\sqrt{n}$, et cependant ces coordonnées ne satisfont pas à l'équation finie de la ligne de courbure.

On peut donner de ces solutions une autre interprétation géométrique qui n'est pas sujette aux mêmes exceptions ni aux mêmes erreurs; mais elle n'est pas de nature à trouver place ici. Je me borne à renvoyer au travail publié sur cette matière dans le tome XV des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Belgique.*

CHAPITRE XV.

Intégration des équations différentielles d'un ordre supérieur au premier. Une équation dérivée de l'ordre m a toujours une intégrale première de l'ordre $m-1$. Intégrales médiates et immédiates.— L'intégrale finale doit contenir m constantes arbitraires. Elle est unique. — Intégration des équations dérivées les plus simples des ordres supérieurs. — Exemples divers. — Intégration des équations linéaires à coefficients constants. — Cas des racines imaginaires. — Cas des racines égales. — Exemples divers. — Intégration des équations dérivées linéaires à coefficients variables. — Intégration des équations dérivées d'un ordre et d'un degré quelconques. — Intégration par les séries. — Intégration par la méthode des coefficients indéterminés. — Construction géométrique des intégrales. — Intégration générale des équations dérivées simultanées. — Équations linéaires simultanées à coefficients constants. — Cas des racines égales. Dérivation sous le signe. — Intégration des équations linéaires simultanées d'un ordre quelconque.

190. *Intégration des équations différentielles d'un ordre supérieur. Une équation différentielle de l'ordre m a toujours une intégrale première de l'ordre m — 1. Intégrales médiates et immédiates.* — Une équation dérivée est dite du $m^{ième}$ ordre quand la plus haute dérivée qu'elle contient est de l'ordre m. Une semblable équation donne lieu à des observations analogues à celles qui ont été faites sur les équations dérivées du premier ordre. Intégrer une équation d'un ordre quelconque, c'est en déduire une autre équation d'un ordre moins élevé. A une équation de l'ordre m correspond nécessairement une équation de l'ordre $m-1$; car si l'on tire de la première, la valeur de $\frac{d^m y}{dx^m}$ en fonction des dérivées inférieures, on pourra, en dérivant successive-

ment cette valeur et en remplaçant chaque fois $\frac{d^m y}{dx^m}$, exprimer toutes les dérivées supérieures $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$, $\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}$, etc., en fonction de $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, $\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}$, etc. Or, si dans l'équation de Jean Bernoully (N° 138) on remplace $\frac{d^m y}{dx^m}$ et les dérivées supérieures, par les valeurs mentionnées plus haut, on aura une équation qui ne contiendra que la dérivée $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ et les dérivées inférieures, et qui sera par conséquent une équation dérivée de l'ordre $m-1$, c'est-à-dire, une intégrale de la proposée.

On verra plus loin que cette intégrale de l'ordre $m-1$ n'est pas la seule que l'on puisse déduire de l'équation de l'ordre m.

De ce qu'une équation de l'ordre m a toujours une intégrale de l'ordre $m-1$, on ne peut pas conclure qu'en dérivant celle-ci, on retrouvera identiquement l'équation donnée; car sans changer la signification de cette intégrale, on peut lui avoir fait subir des transformations telles que par la dérivation, la constante arbitraire C, par exemple, ne disparaisse pas, et cette nouvelle équation, quoique de l'ordre m, ne pourra par conséquent être identique avec la dérivée donnée, qui ne renferme pas cette constante. Dans ce cas, comme dans celui des équations dérivées du premier ordre (N° 173), pour retrouver l'équation dérivée donnée, il faut éliminer la constante arbitraire entre l'intégrale et sa dérivée immédiate. De cette observation, naît, comme précédemment (N° 172) la distinction des dérivées et des intégrales en *médiates* et *immédiates*.

191. *L'intégrale finale doit contenir m constantes arbitraires. Elle est unique.* — De même qu'une équation dérivée de l'ordre m a nécessairement une intégrale de l'ordre $m-1$, celle-ci en a nécessairement une de l'ordre $m-2$ et ainsi de suite. Ces intégrales successives forment les *intégrales premières*, *secondes*, *troisièmes*, etc., de la dérivée donnée. La dernière intégrale ne renferme plus aucune dérivée et forme l'*intégrale finale* de la proposée. C'est l'équation que l'on désigne souvent par le mot *intégrale*. Comme chaque intégration introduit sa constante arbitraire dans les intégrales successives, il est visible que l'intégrale première renfermera une constante arbitraire, l'intégrale deuxième deux constantes, l'intégrale $n^{ième}$ n constantes, et l'intégrale finale m constantes, c'est-à-dire, autant qu'il y a d'unités dans l'ordre de l'équation dérivée proposée.

Il suit de là qu'une équation différentielle de l'ordre m a toujours m intégrales premières distinctes ; en effet si l'on désigne par C, C', C''... les constantes introduites par les intégrations successives, on pourra désigner les intégrales premières, deuxièmes, etc., par

$$f^{(m-1)}(C)=0,\quad f^{(m-2)}(C, C')=0,\quad f^{(m-3)}(C, C', C'')=0\ldots$$

les indices $(m-1)$, $(m-2)$, etc. indiquant l'ordre des dérivées contenues dans ces intégrales; or, si de la seconde équation on tire la valeur de C pour la substituer dans la première, on obtiendra une nouvelle équation de l'ordre $m-1$, c'est-à-dire, une intégrale première qui sera entièrement distincte de la précédente, puisque la constante arbitraire C aura disparu pour être remplacée par une autre constante C'. On pourra de même éliminer C et C' entre les trois premières équations et le résultat qui sera encore de l'ordre $m-1$, contiendra la constante C'' et formera par conséquent une nouvelle intégrale première. Comme on peut répéter cette élimination pour chaque constante, on voit qu'une équation de l'ordre m a toujours m intégrales premières distinctes. Si l'on élimine successivement les m constantes renfermées dans les $m-1$ intégrales successives à partir de l'intégrale seconde, de manière à y combiner les constantes deux à deux, comme la plus élevée est de l'ordre $m-2$, on obtiendra aussi des intégrales secondes distinctes. Il en sera de même des intégrales troisièmes, etc. L'intégrale finale ne devant contenir aucune dérivée, ne pourra se combiner avec aucune des intégrales précédentes et sera par conséquent unique.

Si l'on connaissait les m intégrales premières d'une équation dérivée de l'ordre m, on connaîtrait immédiatement son intégrale finale; car on aurait un nombre m d'équations renfermant $m-1$ dérivées, depuis $\frac{dy}{dx}$ jusqu'à $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, et en éliminant entre elles ces dérivées, on obtiendrait une équation sans dérivées, renfermant les m constantes arbitraires et qui serait l'intégrale finale. De même si l'on connaissait $m-1$ intégrales secondes ou $m-2$ intégrales troisièmes, etc., on obtiendrait l'intégrale finale par de simples éliminations.

Cette remarque fait voir qu'une dérivée de l'ordre m ne peut avoir plus de m intégrales premières *distinctes*; car s'il y en avait $m+1$, on pourrait éliminer entre elles non-seulement les $m-1$ dérivées, comme plus haut, mais encore y et on serait conduit à une

équation en x seul qui, dans ce cas, aurait une valeur constante, ce qui est absurde.

On prouverait de la même manière qu'une équation dérivée de l'ordre m ne peut avoir plus de $m-1$ intégrales secondes *distinctes*, ni plus de $m-2$ intégrales troisièmes, etc., et enfin qu'elle ne peut avoir qu'une seule intégrale finale, d'où il résulte que toute équation primitive renfermant m constantes arbitraires, qui satisfait à une équation dérivée de l'ordre m, se confond avec l'intégrale finale trouvée plus haut.

192. *Intégration des équations dérivées les plus simples des ordres supérieurs.* — L'intégration en termes finis des équations dérivées des ordres supérieurs présente, en général, des difficultés d'autant plus grandes que cet ordre est plus élevé. Ces difficultés sont même le plus souvent insurmontables lorsque l'équation est un peu compliquée; c'est pourquoi nous ne nous arrêterons pas à chercher la condition pour qu'elle soit une dérivée exacte ni à démontrer l'existence d'un facteur propre à lui donner ce caractère(*). Nous nous bornerons à examiner les cas les plus simples dans lesquels l'intégration est possible.

Considérons d'abord les équations dérivées appartenant à l'une des formes générales

$$f\left(x,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,\quad f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,\quad f\left(x,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,$$

$$f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,\quad f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

En résolvant la première équation par rapport à $\frac{d^ny}{dx^n}$, il vient

$$\frac{d^ny}{dx^n}=X,$$

(*) Dans la méthode des variations (voir la note du N° 268), on est conduit incidemment à cette condition d'intégrabilité immédiate trouvée par Euler.

X étant une certaine fonction de x seul; d'où l'on tire par des intégrations successives,

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int X dx + C = X_{,}, \quad \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int X_{,}dx + C' = X_{,,},$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int X_{,,}dx + C'', \text{ etc.}$$

et finalement

$$y = \int X_{n-1}dx + D = X_n + D$$

qui est l'intégrale finale.

Pour la deuxième forme d'équation dérivée, en représentant $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ par r, $\frac{d^n y}{dx^n}$ sera $\frac{dr}{dx}$ et l'équation devient

$$f\left(r, \frac{dr}{dx}\right) = 0$$

d'où l'on tire, en résolvant par rapport à $\frac{dr}{dx}$ et représentant par R et R' des fonctions de r seul,

$$\frac{dr}{dx} = R \quad \text{et} \quad dx = \frac{dr}{R}, \quad \text{d'où} \quad x = \int \frac{dr}{R} + C = R' + C.$$

En résolvant cette dernière par rapport à r, on trouve

$$r \quad \text{ou} \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = X,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int X dx + C' = X_{,}, \quad \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int X_{,}dx + C''.....$$

et enfin

$$y = \int X_{n-2}dx + D = X_{n-1} + D.$$

Pour la troisième équation dérivée, on fera encore

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = r$$

et elle deviendra

$$f\left(x, r, \frac{dr}{dx}\right) = 0,$$

parce que $\frac{d^n y}{dx^n}$ n'est autre chose que $\frac{dr}{dx}$. On est donc conduit à intégrer une équation dérivée du premier ordre à deux variables. Si dans la quatrième équation dérivée on fait

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=r,\quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=s,$$

elle devient

$$f\left(r,\frac{ds}{dx}\right)=0,$$

ou bien, en observant que $\frac{dr}{dx}=s$ et par conséquent $dx=\frac{dr}{s}$,

$$f\left(r,\frac{sds}{dr}\right)=0;$$

d'où l'on tire, R, R' et R'' étant des fonctions de r,

$$\frac{sds}{dr}=R,\quad sds=Rdr,$$

et enfin par des opérations successives,

$$s^2=2\int Rdr+C,\quad s \text{ ou } \frac{dr}{dx}=R',\quad dx=\frac{dr}{R'},\quad x=\int\frac{dr}{R'}=R''+C,$$

et en résolvant par rapport à r,

$$r \text{ ou } \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=X,\quad \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}=\int Xdx+C'=X,$$

et enfin

$$\frac{dy}{dx}=X_{n-3},\quad y=\int X_{n-3}\,dx+C'''=X_{n-2}+C'''.$$

En faisant

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=r,\quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\frac{dr}{dx}=s$$

dans la cinquième équation, on trouve, en remarquant que $dx=\frac{dr}{s}$,

$$f\left(r,s,\frac{sds}{dr}\right)=0,$$

équation qui est du premier ordre entre les variables r, s et qu'on intègre par les méthodes connues.

193. *Exemples divers.* — Les exemples et les problèmes qui suivent, sont des applications des méthodes exposées dans le numéro précédent :

1° $\frac{d^4y}{dx^4} = ax$ donne $y = C''' + C''x + \frac{C'x^2}{2} + \frac{Cx^3}{6} + \frac{ax^5}{120}$.

2° *Trouver la courbe dont le rayon de courbure est constant.*

Ce problème conduit à l'équation de condition

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a,$$

d'où l'on tire

$$x - C = \frac{a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - C}{\sqrt{a^2 - (x - C)^2}},$$

$$(x - C)^2 + (y - C')^2 = a^2.$$

3° *Trouver une courbe telle que l'aire comprise entre la tangente et la sous-tangente soit partout proportionnelle à l'aire comprise entre la courbe et l'ordonnée.*

Ce problème posé en équation donne

$$\frac{y^2}{\frac{dy}{dx}} = 2a \int y dx$$

et en différenciant,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{2 - 2a}{y}.$$

On trouve pour intégrale

$$x = \frac{y^{2a-1}}{C(2a-1)} + C'$$

qui appartient à une parabole d'un ordre supérieur.

4° *Trouver la courbe dont le rayon de courbure est proportionnel à la puissance $n^{ième}$ de la normale.*

Ce problème conduit à l'équation

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=a\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}y^n$$

ou bien

$$ay^n\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3-n}{2}},$$

a devant être positif ou négatif suivant que le rayon de courbure et la normale sont tournés en sens contraire ou dans le même sens, puisque $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif dans le premier cas et négatif dans le second. En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par z, elle devient

$$\frac{azdz}{(1+z^2)^{\frac{3-n}{2}}}=\frac{dy}{y^n}\quad \text{d'où}\quad a(1+z^2)^{\frac{n-1}{2}}=-y^{1-n}+C,$$

et en remettant pour z sa valeur,

$$a^{\frac{1}{1-n}}dx=\frac{dy}{\sqrt{[C-y^{1-n}]^{\frac{2}{n-1}}-a^{\frac{2}{n-1}}}}.$$

Si n est égal à 3, c'est-à-dire, si le rayon de courbure est proportionnel au cube de la normale, on trouve pour intégrale,

$$\frac{ay^2}{C-a}-(x-C')^2=\frac{a}{(C-a)^2}$$

qui représente une hyperbole ou une ellipse selon que $\frac{a}{C-a}$ est positif ou négatif.

Si n est égal à l'unité, c'est-à-dire, si le rayon de courbure est proportionnel à la normale, l'équation différentielle devient

$$a\frac{zdz}{1+z^2}=\frac{dy}{y}\quad \text{d'où}\quad dx=\frac{dy}{\sqrt{(Cy)^{\frac{2}{a}}-1}}.$$

L'intégration finale se trouve ainsi réduite à une quadrature. Cette dernière équation différentielle appartient à une cycloïde, à une parabole, à un cercle ou à une chaînette, selon que l'on fait a égal à -2, $+2$, -1 ou $+1$.

5° *Trouver une courbe telle que l'arc compté à partir d'un certain point fixe soit proportionnel à la distance du pied de la tangente à l'origine.*

L'équation à intégrer est

$$x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = ms$$

d'où l'on tire en dérivant, remplaçant $\frac{ds}{dx}$ par $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+p^2}$ et $\frac{dp}{dx}$ par $\frac{pdp}{dy}$,

$$m\frac{dy}{y} = \frac{pdp}{p^2\sqrt{1+p^2}}.$$

On trouve pour intégrale finale,

$$2Cx + D = C^2\frac{y^{-m+1}}{-m+1} - \frac{y^{m+1}}{m+1}.$$

Le problème que nous venons de résoudre est un cas particulier de celui connu sous le nom de problème du chien qui suit son maître à la nage. On suppose que tandis que le maître marche uniformément le long de la rive rectiligne d'un canal, son chien lancé à la nage se dirige constamment vers lui en avançant uniformément. La courbe que décrira le chien est celle dont on vient de trouver l'équation et que l'on nomme *courbe de poursuite*.

194. *Intégration des équations dérivées, linéaires à coefficients constants.* — On appelle équation dérivée linéaire, celle dans laquelle la variable dépendante et ses dérivées ne sont élevées qu'à la première puissance et ne sont pas multipliées entre elles. Sa forme la plus générale est

$$\frac{d^ny}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots\cdots U\frac{dy}{dx} + Vy + X = 0,$$

P, Q, U, V, X étant des fonctions de la seule variable indépendante x. Ces équations jouissent de propriétés particulières qui rendent leur intégration possible dans un grand nombre de cas. Considérons d'abord les équations linéaires à coefficients constants, c'est-à-dire, dans lesquelles P, Q, U, V, X sont des constantes. Comme on peut évidemment la priver de son dernier terme X en remplaçant y par $y' - \frac{X}{V}$, nous la mettrons sous la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + U\frac{dy}{dx} + Vy = 0.$$

Cette équation est satisfaite en faisant

$$y = Ce^{mx},$$

C étant une constante arbitraire et m un certain coefficient constant à déterminer; en effet, on obtient par la substitution,

$$C(m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2}\cdots\cdots + Um + V)e^{mx} = 0,$$

qui est satisfaite, pourvu que la constante m rende nul le polynôme

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2}\cdots\cdots + Um + V = 0,$$

c'est-à-dire, pourvu que m soit une des racines de cette équation; si donc on représente par m, m', m'', etc. les n racines, nous voyons que l'équation proposée a pour intégrales particulières Ce^{mx}, $C'e^{m'x}$, $C''e^{m''x}$..... C, C', C''.... étant des constantes arbitraires; or je dis que la somme de toutes ces intégrales particulières ou $Ce^{mx} + C'e^{m'x} + C''e^{m''x}$ + etc. satisfait aussi à l'équation linéaire, car le résultat de la substitution est

$$\begin{aligned} &C(m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2}\cdots\cdots + Um + V)e^{mx} \\ &+ C'(m'^n + Pm'^{n-1} + Qm'^{n-2}\cdots\cdots + Um' + V)e^{m'x} \\ &+ C''(m''^n + Pm''^{n-1} + Qm''^{n-2}\cdots\cdots + Um'' + V)e^{m''x} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \end{aligned}$$

dans laquelle toutes les parenthèses sont nulles séparément, puisque m, m', m''.... sont des racines de l'équation

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2}\cdots\cdots + Um + V = 0;$$

d'où il résulte que l'équation

$$y = Ce^{mx} + C'e^{m'x} + C''e^{m''x} + \text{etc.}$$

est l'intégrale finale et celle-ci est générale puisqu'elle contient n constantes arbitraires C, C', C'', etc. (N° 191).

195. *Cas des racines imaginaires.* — Si quelques-unes des racines m, m', m'', etc. étaient imaginaires, l'équation précédente serait encore l'intégrale générale, mais elle renfermerait des quantités imaginaires qu'il est facile de faire disparaître; en effet comme ces racines se présentent toujours par couples de la forme $a+b\sqrt{-1}$ et $a-b\sqrt{-1}$, on aurait

$$m = a + b\sqrt{-1}, \quad m' = a - b\sqrt{-1}$$

et les deux premiers termes de l'intégrale générale deviendraient, en faisant usage des formules symboliques d'Euler,

$$Ce^{x(a+b\sqrt{-1})} + C'e^{x(a-b\sqrt{-1})} = (Ce^{bx\sqrt{-1}} + C'e^{-bx\sqrt{-1}})\,e^{ax}$$

$$= e^{ax}\left\{(C + C')\cos bx + (C - C')\sqrt{-1}\sin bx\right\}.$$

En remplaçant donc $C + C'$ et $(C - C')\sqrt{-1}$ par deux nouvelles constantes arbitraires A et A', c'est-à-dire en posant

$$C = \frac{1}{2}(A - A'\sqrt{-1}), \quad C' = \frac{1}{2}(A + A'\sqrt{-1}),$$

l'intégrale générale prendrait la forme

$$y = e^{ax}(A\cos bx + A'\sin bx) + C''e^{m''x} + \text{etc.}$$

196. *Cas des racines égales.* — Si plusieurs des racines m, m', m'', etc., étaient égales entre elles, l'intégrale trouvée plus haut cesserait d'avoir toute la généralité possible puisque, en supposant $m = m'$, il viendrait

$$y = (C + C')\,e^{mx} + C''e^{m''x} + \text{etc.},$$

et comme $C + C'$ ne forme qu'une constante arbitraire, on voit quo l'intégrale de l'équation de l'ordre n, n'en renfermerait plus que $n - 1$, c'est-à-dire une de moins qu'elle ne doit en contenir. Si

trois racines étaient égales, l'intégrale ne renfermerait que $n-2$ constantes arbitraires.

Pour compléter dans ce cas l'intégrale, remarquons que, puisque

$$y = Ce^{mx}$$

est une intégrale particulière, m doit être une racine de l'équation

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} \ldots\ldots + Um + V = 0;$$

or, si celle-ci a r racines égales, il faut d'après le théorème sur les racines égales, que ses r dérivées successives soient nulles, c'est-à-dire que l'on ait

$$nm^{n-1} + (n-1)Pm^{n-2} + \ldots\ldots + U = 0,$$

$$n(n-1)m^{n-2} + (n-1)(n-2)Pm^{n-3} \ldots\ldots + \text{etc.} = 0,$$

. . . .

On conclut de là que

$$y = C'xe^{mx}, \quad y = C''x^2e^{mx}, \quad \ldots\ldots, \quad y = C^{(r)}x^re^{mx}$$

seront autant d'intégrales particulières de la proposée; car en y faisant la substitution, on est conduit à des équations de la forme

$$C'xe^{mx}(m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} \ldots\ldots + Um + V)$$

$$+ C'e^{mx}[nm^{n-1} + (n-1)Pm^{n-2} \ldots\ldots + U] = 0$$

. . . .

qui sont évidemment satisfaites. On voit aussi que l'intégrale générale est

$$y = Ce^{mx} + C'xe^{mx} + C''x^2e^{mx} \ldots\ldots + C^{(r)}x^re^{mx} + C_{,}e^{m'x} + C_{,,}e^{m''x} \ldots\ldots$$

ce qu'on vérifie en suivant la même marche qu'au N° 194.

Si l'équation en m renfermait deux couples de racines imaginaires égales représentées par $a \pm b\sqrt{-1}$, en désignant $a + b\sqrt{-1}$ par m et $a - b\sqrt{-1}$ par m', on aurait, à cause de la présence de deux racines égales à m et deux racines égales à m',

$$y = Ce^{mx} + C'xe^{mx} + C''e^{m'x} + C'''xe^{m'x} + \text{etc.}$$

or, si l'on remplace m et m' par leurs valeurs imaginaires, l'équation précédente prend la forme suivante :

$$y = e^{ax}\left(Ce^{bx\sqrt{-1}} + C''e^{-bx\sqrt{-1}}\right)$$

$$+ xe^{ax}\left(C'e^{bx\sqrt{-1}} + C'''e^{-bx\sqrt{-1}}\right) + \text{etc.},$$

ou bien en substituant aux quantités exponentielles leur valeur trigonométrique et remplaçant par les constantes arbitraires D, D', D'', D''' les quantités $C + C''$, $(C - C'')\sqrt{-1}$, $C' + C'''$, $(C' - C''')\sqrt{-1}$,

$$y = e^{ax}\cos bx\,(D + D''x) + e^{ax}\sin bx\,(D' + D'''x) + \text{etc.}$$

Dans le cas de trois couples de racines imaginaires égales, on aurait pour intégrale,

$$y = e^{ax}\cos bx\,(C + C'x + C''x^2) + e^{ax}\sin bx\,(D + D'x + D''x^2) + \text{etc.}$$

197. *Exemples divers.* — Appliquons la théorie précédente à quelques exemples :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad \text{donne} \quad m = 2, \quad m' = 1 \quad \text{et} \quad y = Ce^{2x} + C'e^{x}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad \text{donne} \quad m = 1, \quad m' = 1, \quad m'' = -2,$$

$$y = e^{x}(C + C'x) + C''e^{-2x}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y = 0, \quad \text{et} \quad \frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y - 3 = 0$$

donnent

$$m = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}, \quad m' = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}, \quad m'' = -1,$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C'\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C''e^{-x},$$

et

$$m = \sqrt{-1}, \quad m' = -\sqrt{-1}, \quad m'' = \sqrt{-1}, \quad m''' = -\sqrt{-1},$$

$$y = (C + C'x)\cos x + (C'' + C'''x)\sin x + 3.$$

198. *Intégration des équations dérivées linéaires à coefficients variables. Théorème de Lagrange.* — Dans ce qui précède, nous avons supposé constants les coefficients de l'équation linéaire ainsi que le terme final X. Lorsque ceux-ci sont des fonctions quelconques de la variable x, ces équations jouissent d'une propriété importante trouvée par Lagrange et qui fait dépendre souvent leur intégration d'un certain nombre de quadratures. Cette propriété consiste en ce que, si l'équation dérivée linéaire générale du N° 194 privée de son dernier terme X, c'est-à-dire,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots\dots\dots + U\frac{dy}{dx} + Vy = 0$$

est satisfaite par les n valeurs de y

$$y = f, \quad y = f', \quad y = f''\dots\dots,$$

l'intégrale générale de l'équation linéaire, en rétablissant le dernier terme X, sera, comme dans le cas des coefficients constants, représentée par

$$y = Cf + C'f' + C''f'' + \text{etc.};$$

mais C, C', C'', etc. ne seront plus de simples constantes arbitraires ; elles seront des fonctions de x qu'on déterminera comme il suit : en dérivant la valeur de y, on a

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{df}{dx} + C'\frac{df'}{dx} + C''\frac{df''}{dx}\dots + f\frac{dC}{dx} + f'\frac{dC'}{dx} + f''\frac{dC''}{dx} + \text{etc.}$$

Posons entre les fonctions indéterminées C, C', C''...... la relation

$$f\frac{dC}{dx} + f'\frac{dC'}{dx} + f''\frac{dC''}{dx} + \text{etc.} = 0.$$

En dérivant de nouveau, il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\frac{d^2f}{dx^2} + C'\frac{d^2f'}{dx^2} + C''\frac{d^2f''}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{dC}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{dC'}{dx}\frac{df'}{dx} + \frac{dC''}{dx}\frac{df''}{dx} + \text{etc.}$$

Posons encore la relation

$$\frac{dC}{dx}\frac{df}{dx}+\frac{dC'}{dx}\frac{df'}{dx}+\frac{dC''}{dx}\frac{df''}{dx}+\text{etc.}=0$$

et continuons de même jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la valeur de $\frac{d^ny}{dx^n}$ qui sera

$$\frac{d^ny}{dx^n}=C\frac{d^nf}{dx^n}+C'\frac{d^nf'}{dx^n}+C''\frac{d^nf''}{dx^n}+\text{etc.}$$

$$+\frac{dC}{dx}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}+\frac{dC'}{dx}\frac{d^{n-1}f'}{dx^{n-1}}+\frac{dC''}{dx}\frac{d^{n-1}f''}{dx^{n-1}}+\text{etc.}$$

et posons

$$\frac{dC}{dx}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}+\frac{dC'}{dx}\frac{d^{n-1}f'}{dx^{n-1}}+\frac{dC''}{dx}\frac{d^{n-1}f''}{dx^{n-1}}+\text{etc.}+X=0.$$

Je dis que, lorsque les valeurs de C, C', C'', etc. auront été déterminées par les relations précédentes, qui sont en nombre n comme les coefficients inconnus C, C', C'',....., y et ses dérivées satisferont à l'équation linéaire proposée; en effet elle devient par la substitution,

$$C\frac{d^nf}{dx^n}\quad+C'\frac{d^nf'}{dx^n}\quad+C''\frac{d^nf''}{dx^n}\quad+\text{etc.}-X$$

$$+PC\frac{d^{n-1}f}{dx^n}+PC'\frac{d^{n-1}f'}{dx^n}+PC''\frac{d^{n-1}f''}{dx^n}+\text{etc.}$$

. . . .

$$+UC\frac{df}{dx}\quad+UC'\frac{df'}{dx}\quad+UC''\frac{df''}{dx}\quad+\text{etc.}$$

$$+VCf\quad+VC'f'\quad+VC''f''\quad+\text{etc.}+V$$

et comme les fonctions f, f', f'', etc., rendent, par hypothèse, identique l'équation linéaire

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\cdots\cdots+U\frac{dy}{dx}+Vy=0,$$

on doit avoir

$$\frac{d^n f}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} \ldots\ldots + U\frac{df}{dx} + Vf = 0,$$

$$\frac{d^n f'}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}f'}{dx^{n-1}} \ldots\ldots + U\frac{df'}{dx} + Vf' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ce qui fait disparaître tous les termes compris dans une même colonne verticale. Pour déterminer les fonctions C, C', C'', etc., remarquons que nos n équations renferment les n dérivées $\frac{dC}{dx}$, $\frac{dC'}{dx}$, $\frac{dC''}{dx}$ etc. à la première puissance et qu'en résolvant, on trouve, Z, Z', Z'', etc. étant des fonctions connues de x,

$$\frac{dC}{dx} = Z, \quad \frac{dC'}{dx} = Z', \quad \frac{dC''}{dx} = Z'', \text{etc.}$$

d'où l'on tire, par de simples quadratures, les valeurs de C, C', C'', etc. Comme ces intégrales contiennent chacune une constante arbitraire, on voit que la valeur de y sera l'intégrale générale, puisqu'elle renfermera le nombre voulu de ces constantes.

199. *Deuxième théorème de Lagrange.* — Lagrange a démontré une autre propriété des équations linéaires de l'ordre n, d'après laquelle, lorsqu'on connaît m intégrales particulières f, f', f'',..... de l'équation privée de son dernier terme X, l'intégrale générale dépend de l'intégration d'une équation linéaire de l'ordre $n - m$; en effet, soit f une valeur de y qui rend nulle cette dérivée privée du terme X. Si l'on remplace y par $f\int u\,dx$, le coefficient de $\int u\,dx$ dans la transformée sera visiblement nul par l'hypothèse faite sur f, et celle-ci prendra la forme

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + P'\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + Q'\frac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}} \ldots\ldots + T'\frac{du}{dx} + U'u + \frac{X}{f} = 0.$$

La détermination de y est ainsi ramenée à l'intégration d'une équation linéaire de l'ordre $n - 1$. Supposons que l'on connaisse une seconde intégrale particulière f'. Comme il existe entre y et u la relation $y = f\int u\,dx$, c'est-à-dire, comme on a

$$u = \frac{1}{dx}d\left(\frac{y}{f}\right),$$

si l'on remplace u par cette valeur dans l'équation linéaire précédente, celle-ci reproduira identiquement l'équation primitive en y, et comme cette dernière privée du terme final X est satisfaite par $y = f'$, il en résulte que

$$\frac{1}{dx} d\left(\frac{f'}{f}\right)$$

désigné par F satisfait à l'équation linéaire précédente en u, privée du terme $\frac{1}{f}X$. Or on vient de voir qu'on peut dans ce cas, en faisant $u = F\int v dx$, faire dépendre l'intégrale de l'équation en u, de l'intégration d'une autre équation linéaire en v d'un ordre inférieur, c'est-à-dire de l'ordre $n - 2$. Pour chaque intégrale particulière $f, f', f'', \ldots$ connue, l'ordre de l'équation linéaire transformée baisse donc d'une unité.

200. *Applications.* — Il résulte du paragraphe N° 198 que l'intégration d'une équation dérivée linéaire complète, est toujours possible, ou du moins ne dépend que de simples quadratures, lorsqu'on connaît les n intégrales particulières de l'équation linéaire suivante

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \ldots\ldots + U\frac{dy}{dx} + Vy = 0;$$

or, ces intégrales s'obtiennent facilement (N° 194) lorsque les coefficients P, Q,... U, V sont constants; on peut donc toujours intégrer l'équation linéaire complète à coefficients constants, dans laquelle le dernier terme X est une fonction de x.

Appliquons par exemple la méthode d'intégration du N° 198, à l'équation dérivée

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + 2y - 3x = 0.$$

En supprimant le terme final, elle est satisfaite par

$$f = e^x, \quad f' = xe^x, \quad f'' = e^{-2x};$$

posons donc

$$y = Ce^x + C'xe^x + C''e^{-2x},$$

et par suite

$$\frac{dC}{dx}e^x + \frac{dC'}{dx}xe^x + \frac{dC''}{dx}e^{-2x} = 0,$$

$$\frac{dC}{dx}e^x + \frac{dC'}{dx}(xe^x + e^x) - 2\frac{dC''}{dx}e^{-2x} = 0,$$

$$\frac{dC}{dx}e^x + \frac{dC'}{dx}(xe^x + 2e^x) + 4\frac{dC''}{dx}e^{-2x} - 3x = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dC}{dx} = -x^2e^{-x} - \frac{1}{3}xe^{-x}, \quad \frac{dC'}{dx} = +xe^{-x}, \quad \frac{dC''}{dx} = +\frac{1}{3}xe^{2x},$$

$$C = e^{-x}\left(x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{7}{3}\right) + D, \quad C' = -e^{-x}(1 + x) + D',$$

$$C'' = -\frac{1}{6}e^{2x}\left(\frac{1}{2} - x\right) + D''.$$

L'intégrale générale est donc

$$y = x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{7}{3} + De^x - x(1 + x) + D'xe^x - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - x\right) + D''e^{-2x}$$

ou

$$y = De^x + D'xe^x + D''e^{-2x} + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

201. *Intégration des équations dérivées d'un ordre et d'un degré quelconques.* — Lorsque les coefficients P, Q, etc. de l'équation linéaire sont des fonctions de la variable indépendante x, on ne peut le plus souvent, obtenir l'intégrale exacte que pour certaines formes et par des procédés particuliers; ainsi pour la suivante

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + ax^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + bx^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots\cdots + px\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

si l'on pose $y = Cx^m$, on reconnaît qu'après avoir substitué cette valeur, x^m devient facteur commun et que l'équation est satisfaite si m vérifie l'équation

$$m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1) + am(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)$$
$$+ bm(m-1)\ldots\ldots(m-n+3) + \cdots + pm + q = 0,$$

ou si m est une de ses racines. Comme l'équation est visiblement du degré n, ses racines $m, m', m'' \dots m^{(n-1)}$ sont en nombre n et $y = x^m$, $y = x^{m'}$, $y = x^{m''} \dots$ sont autant d'intégrales particulières. L'intégrale générale avec ses n constantes arbitraires est

$$y = Cx^m + C'x^{m'} + C''x^{m''} \dots .$$

ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

Les difficultés deviennent plus grandes, lorsque les coefficients contiennent la variable dépendante y ou lorsque l'équation dérivée cesse d'être linéaire sans être comprise dans un des cas que nous avons examiné précédemment (N° 192). Ce n'est que pour un petit nombre d'équations et par des transformations heureuses que l'on parvient à les ramener à des formes qui se prêtent à l'intégration. C'est ainsi que toute équation dérivée de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \varphi y = \psi y \left(\frac{dy}{dx}\right)^n,$$

en posant

$$p = \frac{dy}{dx},$$

devient

$$\frac{dp}{dy} + \varphi y . p = \psi y . p^{n-1}$$

qui est l'équation de Jacques Bernoully (N° 181) et l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi x \frac{dy}{dx} + \psi y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

étant divisée par $\frac{dy}{dx}$ ou p et multipliée par dx devient

$$\frac{dp}{p} + \varphi x dx + \psi y dy = 0$$

dont tous les termes sont intégrables. On en tire

$$Cp = e^{-\int \varphi x dx} e^{-\int \psi y dy}$$

et par conséquent

$$Cdy \, e^{\int \psi y dy} = dx \, e^{-\int \varphi x dx}$$

dans laquelle les variables sont séparées.

L'équation dérivée

$$(l-z)^2 \frac{d^2x}{dz^2} + (l-z)\frac{dx}{dz} + (k^2+1)\,x = 0$$

qui représente la projection des spirales coniques (N° 205), peut être intégrée en faisant d'abord $x = u\,(l-z)$, ce qui fait prendre à l'équation dérivée la forme suivante :

$$(l-z)^2 \frac{d^2u}{dz^2} - (l-z)\frac{du}{dz} + k^2u = 0;$$

puis en faisant $(l-z)\dfrac{du}{dz} = w$, elle devient

$$(l-z)\frac{dw}{dz} + k^2u = 0,$$

et en éliminant dz entre cette dernière et la valeur de w,

$$wdw + k^2udu = 0.$$

Une première intégration donne

$$w^2 + k^2u^2 = C^2.$$

En remettant pour w sa valeur, on trouve

$$\frac{dz}{l-z} = \frac{du}{\sqrt{C^2 - k^2u^2}}$$

dont l'intégrale est

$$\log C'\,(l-z)^k = \text{arc sin}\,\frac{ku}{C},$$

et en remettant pour u sa valeur,

$$x = \frac{C}{k}\,(l-z)\sin\log C'\,(l-z)^k.$$

L'intégration aurait pu encore s'effectuer en remplaçant x par $e^{\int \frac{u}{l-z}dz}$, ou, comme au commencement de ce numéro, en posant $x = D\,(l-z)^m$, ce qui conduit à l'intégrale suivante

$$x = (l-z)\,[D\cos\log\,(l-z)^k + D'\sin\log\,(l-z)^k]$$

qui rentre dans la précédente en posant

$$D = C \sin \log C', \quad D' = C \cos \log C'.$$

Toute équation différentielle qui est telle que, si l'on y remplace $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$..... par αy, βy,..... la variable y devient facteur commun et disparait, peut être ramenée à un ordre inférieur d'une unité; en effet en posant

$$\frac{dy}{dx} = ty,$$

on trouve par des dérivations successives,

$$\frac{dy}{dx} = ty, \quad \frac{dy^2}{dx^2} = y\left(t^2 + \frac{dt}{dx}\right), \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y\left(t^3 + 3t\frac{dt}{dx} + \frac{d^2t}{dx^2}\right), \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \ldots.$$

et si l'on remplace $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$..... par ces valeurs, y disparaîtra par hypothèse, et l'équation donnée se trouvera remplacée par une équation dérivée en t et x qui sera visiblement d'un ordre inférieur d'une unité à celui de la proposée. Cette circonstance se présente toujours quand l'équation est linéaire sans terme final, et plus généralement, quand les termes sont homogènes par rapport à y et ses dérivées. Ainsi, en appliquant cette transformation à l'équation dérivée du second ordre

$$yx^2\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0,$$

on trouve l'équation du premier ordre

$$x^2\frac{dt}{dx} - 2xt + 1 = 0.$$

On rend celle-ci homogène en remplaçant x par $\frac{1}{x'}$, et l'intégrale devient

$$3Cx^3 = 1 - 3tx.$$

En remplaçant t par sa valeur tirée de cette dernière équation, dans $tdx = \frac{dy}{y}$ et intégrant de nouveau, on trouve pour intégrale finale,

$$y^3 = Dxe^{-C'x^3}.$$

Considérons encore l'équation dérivée

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Ay}{(a + 2bx + cx^2)^2}.$$

Posons

$$y = Ce^{\int \frac{p+qx}{a+2bx+cx^2}dx},$$

p et q étant des coefficients constants inconnus, et examinons s'il est possible de les déterminer de manière que cette valeur de y satisfasse à la proposée. On est conduit par la substitution à l'équation de condition

$$(p + qx)^2 + (a + 2bx + cx^2)\,q - 2(p + qx)(b + cx) = A$$

dont les deux membres deviennent identiques, en posant

$$q = c, \quad p = b \pm \sqrt{b^2 - ac + A}.$$

Si l'on remplace p par chacune de ces deux valeurs que nous designerons par p et p', on aura deux intégrales particulières de notre équation et l'intégrale complète sera visiblement

$$y = Ce^{\int \frac{p+cx}{a+2bx+cx^2}dx} + C'e^{\int \frac{p'+cx}{a+2bx+cx^2}dx},$$

comme on peut le vérifier par la substitution.

On rend quelquefois intégrable une équation différentielle en changeant de variable indépendante ou, plus généralement, en remplaçant x par une fonction φt choisie convenablement. Alors, d'après ce qu'on a vu au N° 27, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ..... devront être remplacés par

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\varphi't}, \quad \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{\varphi't\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''t\frac{dy}{dt}}{(\varphi't)^3}, \ldots\ldots$$

et en substituant, l'équation différentielle contenant $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,..... se trouvera transformée en une autre contenant $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$,......... la fonction φt et ses dérivées.

On peut aussi éliminer les deux variables primitives x et y et les remplacer par deux nouvelles variables r et t en posant

$$y = \varphi(r, t), \quad x = \psi(r, t)$$

φ et ψ étant deux fonctions données. Alors si l'on prend t pour nouvelle variable indépendante, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,..... devront être remplacés par

$$\frac{\frac{1}{dt}d\varphi}{\frac{1}{dt}d\psi} = \frac{\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\psi}{dr}\frac{dr}{dt} + \frac{d\psi}{dt}}, \quad \frac{\frac{1}{dt}d\psi\frac{1}{dt^2}(d\varphi)^2 - \frac{1}{dt}d\varphi\frac{1}{dt^2}d^2\psi}{\left(\frac{1}{dt}d\psi\right)^3} = \text{etc.}$$

et la nouvelle équation contiendra $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$,..... et les dérivées partielles connues de φ et ψ. C'est ainsi que les équations

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0,$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

deviennent

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0. \quad r^4 - a^2r^2 = a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

en remplaçant dans l'une x par $\cos t$ et en posant dans l'autre

$$y = r\sin t, \quad x = r\cos t.$$

202. *Intégration par les séries.* — Lorsque l'on ne peut parvenir à trouver l'intégrale d'une équation dérivée en termes finis et d'une manière complète, il faut avoir recours aux méthodes d'approximation. La plus générale consiste à chercher l'intégrale développée en série

infinie, dont les premiers termes, lorsqu'elle est suffisamment convergente, donnent une valeur approchée de l'intégrale. Le théorème de Maclaurin est souvent utile pour obtenir ce développement; en effet

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

étant une équation dérivée de l'ordre n, on en tire

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

En dérivant successivement et remplaçant chaque fois dans le second membre, $\frac{d^ny}{dx^n}$ par la valeur précédente, on obtiendra $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$, $\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}$, etc. en fonction de $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ et des dérivées inférieures, comme on l'a vu au N° 190; si donc on représente par $C, C', C'', \ldots\ldots C^{n-1}$ les valeurs constantes que prennent $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ quand on y fait $x = 0$, par $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0$, $\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0$, etc. les valeurs constantes que prennent les autres dérivées lorsqu'on y fait $x = 0$, valeurs qui se déduisent des équations précédentes et qui seront des fonctions de C, C', C'', etc., le théorème de Maclaurin donnera

$$y = C + C'x + C''\frac{x^2}{2} \cdots\cdots + C^{(n-1)}\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$+ \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \text{etc.}$$

Il est à remarquer que les n constantes $C, C', C'', \ldots\ldots$ qui entrent dans cette intégrale sont des constantes entièrement arbitraires; en effet on sait (N° 191) que l'équation proposée a un nombre n d'intégrales premières distinctes de l'ordre $n-1$, contenant chacune une constante arbitraire. Si donc on conçoit que l'on ait tiré de ces n intégrales les valeurs des n quantités $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ en fonction de x et des

constantes, en les substituant dans l'expression précédente de $\frac{d^ny}{dx^n}$, c'est-à-dire, dans la fonction f, celle-ci prendra la forme

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \varphi x,$$

la fonction φ ne contenant plus d'autre variable que x. Des quadratures successives de cette équation feraient ensuite connaître les valeurs de $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \dots \frac{dy}{dx}$, y, et comme chaque quadrature introduit une constante arbitraire isolée, il est visible que, quand on fera $x = 0$, ces valeurs se réduisent à des constantes arbitraires. En les substituant dans le développement de Maclaurin, qui doit s'accorder avec le précédent, les coefficients C, C', C'',.... sont donc arbitraires.

Les équations dérivées

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ax - y$$

donnent ainsi

$$y = C + C'x + aC^2\frac{x^2}{1.2} + 2aCC'\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{2a^2C^3 + 2aC'^2}{1.2.3.4}x^4$$

$$+ \frac{10a^2C^2C'}{1.2.3.4.5}x^5 + \text{etc.}$$

$$y = C\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right) + C'\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)$$

$$+ a\left(\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right).$$

Cette dernière peut se mettre sous la forme

$$y = C\cos x + C'\sin x - a(\sin x - x).$$

Lorsque pour $x = 0$, on trouve des valeurs infinies pour les dérivées, comme il arrive dans les exemples suivants :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + axy = 0, \quad x\frac{d^2y}{dx^2} = ay,$$

on fera usage de la formule de Maclaurin, modifiée, telle qu'elle a été démontrée au N° 34 du calcul différentiel. On sait que si l'on représente par A, A', A'',..... les valeurs que prennent y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. quand on y fait x égal à une constante α et par

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_\alpha, \quad \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_\alpha, \text{ etc.}$$

ce que deviennent alors les dérivées $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$, etc., on a

$$y = A + A'(x-\alpha) + A''\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \text{etc......}$$

$$+ \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_\alpha \frac{(x-\alpha)^n}{1.2....n} + \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_\alpha \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{1.2....(n+1)} + \text{etc.}$$

dans laquelle A, A', A'', etc. sont les constantes arbitraires. En appliquant cette formule au second des exemples précédents, on trouve pour intégrale,

$$y = A\left\{1 + a\alpha\left(\frac{\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^3}{1.2.3} + \frac{2\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right)\right.$$

$$\left. + a^2\alpha^2\left(\frac{\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^4}{1.2.3.4} - \frac{4\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right)\right\}$$

$$+ A'(x-\alpha)\left\{1 + a\alpha\left(\frac{\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^2}{1.2.3} - \frac{2\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^3}{1.2.3.4} + \frac{6\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)\right.$$

$$\left. + a^2\alpha^2\left(\frac{\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)\right\}.$$

A et A' sont les deux constantes que l'intégrale doit contenir.

La présence de cette indéterminée α est utile pour rendre les séries très-convergentes; ainsi si l'on ne doit connaître l'intégrale que pour des valeurs de x comprises entre deux limites a et b par exemple, si l'on ne doit connaître la forme de la courbe représentée par l'intégrale que dans la partie comprise entre les abscisses a et b, on prendra pour α une moyenne entre ces deux limites, ce qui rendra $\frac{x-\alpha}{\alpha}$ en général très petit, et en se bornant aux termes de l'ordre $\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^2$ et négligeant les termes qui contiennent $\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^3$, $\left(\frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^4$, etc., il viendra

$$y = A\left[1 + \frac{a}{2\alpha}(x-\alpha)^2\right] + A'(x-\alpha)\left[1 + \frac{a(x-\alpha)^2}{1.2.3\alpha}\right].$$

203. *Intégration par la méthode des coefficients indéterminés.* — La longueur des calculs dans lesquels on est entraîné fait souvent préférer la méthode des coefficients indéterminés. Prenons pour exemple l'équation dérivée traitée plus haut

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ax - y.$$

Si l'on pose

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$$

et qu'on substitue cette valeur de y et celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$ qu'on en déduit, dans l'équation proposée, on obtiendra une équation en x seul dont les deux membres sont rendus identiques en posant

$$2C = -A, \quad 6D = a - B, \quad 12E = -C, \quad 20F = -D.$$

Il est visible que, quel que soit le nombre de termes que l'on considère, on aura toujours deux équations de moins qu'il n'y a de coefficients indéterminés; deux quelconques d'entre eux, par exemple, A et B, restent donc arbitraires, et l'on trouve

$$C = -\frac{A}{2}, \quad D = \frac{a-B}{6}, \quad E = \frac{A}{24}, \quad F = \frac{B-a}{120}.$$

En substituant ces valeurs dans le développement précédent de l'intégrale, on arrive au même résultat que ci-dessus.

Lorsque l'intégrale peut être développée suivant les puissances entières et positives de x, la méthode des coefficients indéterminés ne présente d'autres difficultés que celles qui résultent de la longueur des calculs; mais si le développement est impossible sous cette forme, circonstance dont on est averti par des contradictions et des impossibilités dans les équations de condition, ou si la valeur de y ne conserve pas le nombre de constantes arbitraires nécessaire, la marche suivie plus haut a besoin d'être modifiée suivant les circonstances. Cherchons, par exemple, à intégrer

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = py.$$

La méthode précédente conduit à des équations impossibles; mais si l'on fait

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \text{etc.}$$

et qu'on substitue cette valeur dans la proposée, on aura

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)Ax^\alpha + \beta(\beta-1)(\beta-2)\ldots\ldots Bx^\beta$$
$$+\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots\ldots(\gamma-n+1)Cx^\gamma + \text{etc.}$$
$$-pAx^\alpha - pBx^\beta - pCx^\gamma - \text{etc.} = 0,$$

équation qui devient identique en posant

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)=p, \quad \beta(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n+1)=p$$

. . . .

d'où l'on tire pour chaque exposant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, n$ valeurs que nous désignerons par $a, b, c, d, \ldots.$ et qui sont visiblement les n racines de l'équation du degré n

$$x(x-1)(x-2)\ldots.(x-n+1)=p;$$

de sorte que dans la valeur de y il ne pourra entrer que n sortes de termes, les uns renfermant x à la puissance a, d'autres à la puissance b, d'autres à la puissance c, etc.; si donc on réunit tous les termes

semblables, on voit que la valeur de y pourra se mettre sous la forme

$$y = Mx^a + Nx^b + Px^c + \text{etc.}$$

qui est l'intégrale cherchée, M, N, P, Q,.... étant les n constantes arbitraires. Elle n'est qu'un cas particulier de celle qui a été trouvée au N° 201.

204. *Construction géométrique des intégrales.* — Lorsqu'une intégrale ne doit servir qu'à faire connaître la forme de la courbe qu'elle représente, il est souvent plus simple de construire cette courbe directement avec l'équation dérivée sans l'intermédiaire de l'intégrale, comme on l'a déjà fait pour les équations dérivées du premier ordre (N° 140). Cette construction est possible *théoriquement* quel que soit l'ordre de l'équation dérivée, en employant des osculatrices d'un ordre convenable; mais nous nous bornerons ici aux équations du second ordre. On considérera la courbe comme formée d'arcs de cercle, que l'on tracera comme il suit : traçons une suite d'ordonnées équidistantes ap, bp', cp''.... (fig. 43) et prenons un point a à volonté, ainsi qu'une droite at considérée comme une tangente à la courbe en ce point. On se donne ainsi pour ce point l'x, l'y et $\frac{dy}{dx}$. Tirons de l'équation donnée la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et substituons la dans l'expression du rayon de courbure, ainsi que la valeur attribuée à $\frac{dy}{dx}$. Si l'on élève au point a une perpendiculaire ao sur at, égale à l'expression du rayon de courbure, un petit arc de cercle ab décrit avec ce rayon et limité à l'ordonnée $p'b$ pourra être considéré comme un arc de la courbe cherchée. A l'extrémité b menons une tangente bt' à cet arc ab, mesurons les coordonnées du point b ainsi que l'inclinaison de bt' sur l'axe des X, ce qui fera connaître x, y et $\frac{dy}{dx}$ pour le point b et l'on déterminera comme plus haut la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ correspondant à ce point et par suite, le rayon de courbure bo' ainsi que l'arc bc. Cette opération répétée un certain nombre de fois, fera connaître approximativement la courbe cherchée. L'équidistance des ordonnées ap, bp' cp''.... est nécessaire, parce que le dx est supposé constant dans l'équation dérivée du second ordre.

Lorsque, par la nature de la question ou par la construction précé-

dente, on connaît à peu près la forme de la courbe, on peut souvent faire dans l'équation dérivée, certaines simplifications qui rendent l'intégration possible. Si l'on sait, par exemple, que la courbe à laquelle appartient l'équation

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=ay$$

ne s'écarte que très peu de l'axe des X, on en conclura que $\frac{dy}{dx}$ reste toujours très petit et peut par conséquent être négligé devant l'unité, ce qui réduit cette équation à la suivante

$$\frac{d^2y}{dx^2}=ay$$

facile à intégrer.

205. *Intégration générale des équations dérivées simultanées.* — Jusqu'ici on ne s'est occupé que des équations dérivées ne renfermant que deux variables, dont une indépendante. Supposons maintenant qu'elles en contiennent un plus grand nombre, dont une seule soit indépendante. Il est évident que pour que cette dernière condition soit remplie, il est indispensable que l'équation dérivée ne soit plus unique, mais qu'il y en ait un nombre égal à celui des variables moins une, c'est-à-dire, que le nombre d'équations soit égal à celui des variables dépendantes. L'ensemble de ces équations se nomme *équations simultanées.*

Proposons-nous d'intégrer un pareil système d'équations, c'est-à-dire, de remonter aux relations finies qui existent entre ces variables, connaissant certaines relations entre leurs dérivées. Ces intégrations sont toujours possibles théoriquement, c'est-à-dire, qu'il est toujours possible de les faire dépendre des théories exposées plus haut. La méthode générale consiste à éliminer les variables entre les équations de manière à remplacer celles-ci par un égal nombre de nouvelles équations renfermant chacune la variable indépendante et l'une des variables dépendantes, et à n'avoir ainsi à intégrer que des équations à deux variables. Supposons qu'il y ait deux équations à trois variables (x, y, z), x étant la variable indépendante; admettons aussi que les dérivées de l'ordre le plus élevé de z soient $\frac{d^nz}{dx^n}$ et $\frac{d^{n'}z}{dx^{n'}}$ dans les deux

équations. Si l'on dérive n' fois la première et n fois la seconde, on aura, en tout, $n+n'+2$ équations, y compris les deux proposées, qui renfermeront z et ses dérivées depuis $\frac{dz}{dx}$ jusqu'à $\frac{d^{n+n'}z}{dx^{n+n'}}$; or, comme entre un nombre $n+n'+2$ d'équations, on peut éliminer $n+n'+1$ quantités, on pourra éliminer $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots \frac{d^{n+n'}z}{dx^{n+n'}}$ et il restera une équation dérivée entre y et x seuls. On éliminera ensuite de la même manière les y et ses dérivées, ce qui conduira à une seconde équation en z et x seuls et ces deux équations à deux variables étant intégrées, tiendront lieu des intégrales cherchées. S'il y avait trois équations dérivées à quatre variables (x, y, z, u), on pourrait éliminer, comme on vient de le voir, entre la première et la troisième, puis entre la première et la seconde, la variable u et toutes ses dérivées. On serait ainsi conduit à deux équations dérivées en (x, y, z) entre lesquelles les variables y et z pourront être séparées, comme on vient de le voir. Au lieu de la variable u, on éliminerait ensuite z et ses dérivées. Les deux équations en (x, y, u) résultant de cette élimination, seraient traitées comme les deux précédentes et conduiraient à une équation dérivée en u et x. Les trois équations dérivées proposées se trouveront ainsi remplacées par trois équations dérivées à deux variables chacune, que l'on intégrera comme il est dit plus haut. Prenons pour exemple les deux équations simultanées

$$\frac{dx}{dz}=\frac{ky-x}{l-z}, \quad \frac{dy}{dz}=-\frac{y+kx}{l-z}$$

que nous avons trouvées pour la spirale conique (*Calcul diff.* N° 93). Les dérivées de ces deux équations sont, après avoir éliminé $\frac{dy}{dz}$ et $\frac{dx}{dz}$,

$$\frac{d^2x}{dz^2}=-k\frac{y+kx}{(l-z)^2}, \quad \frac{d^2y}{dz^2}=k\frac{x-ky}{(l-z)^2}.$$

En éliminant y entre la première et la troisième, et x entre la deuxième et la quatrième, il vient

$$(l-z)^2\frac{d^2x}{dz^2}+(l-z)\frac{dx}{dz}+(k^2+1)x=0,$$

$$(l-z)^2\frac{d^2y}{dz^2}+(l-z)\frac{dy}{dz}+(k^2+1)y=0,$$

dont les intégrales ont été trouvées plus haut (N° 201). On trouve de cette manière qu'en déterminant les constantes arbitraires par la condition que y soit égal à r pour z et x nuls, et que $\frac{dx}{dz}$ devienne $\frac{kr}{l}$ au même point, les équations de la spirale conique sont

$$x=\frac{r}{l}(l-z)\sin\log\left(\frac{l}{l-z}\right)^k,\quad y=\frac{r}{l}(l-z)\cos\log\left(\frac{l}{l-z}\right)^k.$$

206. *Équations linéaires simultanées, à coefficients constants.* — La méthode précédente est générale; mais dans les applications, on est presque toujours arrêté par la complication des équations finales et par la difficulté de les intégrer. Ce n'est que pour certaines formes particulières des équations dérivées que l'on peut espérer terminer les calculs; ainsi si les équations sont linéaires par rapport aux variables dépendantes et leurs dérivées, c'est-à-dire, si celles-ci n'y entrent qu'à la première puissance sans être multipliées entre elles, les équations finales seront elles-mêmes linéaires et on pourra par conséquent, profiter pour l'intégration des propriétés dont jouissent ces sortes d'équations.

Lorsque les équations simultanées sont linéaires, du premier ordre et à coefficients constants, on peut obtenir les deux intégrales d'une manière plus simple; soient en effet les deux équations

$$A\frac{dy}{dx}+B\frac{dz}{dx}+Cy+Dz=X$$

$$A'\frac{dy}{dx}+B'\frac{dz}{dx}+C'y+D'z=X'$$

dans lesquelles A, B, C, D,.... sont des constantes et X, X', des fonctions quelconques de la variable indépendante x. Multiplions la seconde par un coefficient indéterminé μ et ajoutons la, membre à membre, à la première; il viendra

$$(A+A'\mu)\frac{dy}{dx}+(B+B'\mu)\frac{dz}{dx}+(C+C'\mu)y+(D+D'\mu)z=X+X'\mu$$

ou bien

$$\frac{dy}{dx}+\frac{B+B'\mu}{A+A'\mu}\frac{dz}{dx}+\frac{C+C'\mu}{A+A'\mu}\left\{y+\frac{D+D'\mu}{C+C'\mu}z\right\}=\frac{X+X'\mu}{A+A'\mu}.$$

Comme le facteur μ est arbitraire, on peut le déterminer par la condition que

$$\frac{B + B'\mu}{A + A'\mu} = \frac{D + D'\mu}{C + C'\mu}$$

et alors, en représentant $y + \frac{D + D'\mu}{C + C'\mu} z$ par r, l'équation devient

$$\frac{dr}{dx} + \frac{C + C'\mu}{A + A'\mu} r = \frac{X + X'\mu}{A + A'\mu}$$

que nous mettrons sous la forme

$$dr + mr\,dx = X_{,}dx.$$

Cette équation différentielle qui est linéaire et du premier ordre, est toujours intégrable et donne

$$r = e^{-mx}(\int X_{,}e^{mx}dx + E);$$

si donc, on remplace r par sa valeur, on aura pour l'une des intégrales cherchées,

$$y + \frac{D + D'\mu}{C + C'\mu} z = e^{-mx}(\int X_{,}e^{mx}dx + E).$$

Quant à l'autre intégrale, remarquons que l'équation de condition qui a servi à déterminer la valeur de μ, conduit à une équation du second degré et donne par conséquent pour μ deux valeurs μ et μ', dont chacune fournit une intégrale semblable à la précédente. En représentant par m, m', X, X', les résultats de leur substitution successive dans m et $X_{,}$, les deux intégrales seront

$$y + \frac{D + D'\mu}{C + C'\mu} z = e^{-mx}(\int X_{,}e^{mx}dx + E),$$

$$y + \frac{D + D'\mu'}{C + C'\mu'} z = e^{-m'x}(\int X_{,}'e^{m'x}dx + E').$$

Si l'on avait trois équations entre quatre variables (x, y, z, u), savoir :

$$A\frac{dy}{dx} + B\frac{dz}{dx} + C\frac{du}{dx} + Dy + Ez + Fu = X$$

$$A'\frac{dy}{dx} + B'\frac{dz}{dx} + C'\frac{du}{dx} + D'y + E'z + F'u = X'$$

$$A''\frac{dy}{dx} + B''\frac{dz}{dx} + C''\frac{du}{dx} + D''y + E''z + F''u = X'',$$

$A, B, C,\ldots$ étant des coefficients constants et X, X', X'' des fonctions quelconques de la variable indépendante x, on multiplierait la seconde et la troisième par les facteurs indéterminés μ et μ', puis en ajoutant membre à membre, on trouverait

$$(A + A'\mu + A''\mu')\frac{dy}{dx} + (B + B'\mu + B''\mu')\frac{dz}{dx} + (C + C'\mu + C''\mu')\frac{du}{dx}$$
$$+ (D + D'\mu + D''\mu')y + (E + E'\mu + E''\mu')z$$
$$+ (F + F'\mu + F''\mu')u = X + X'\mu + X''\mu',$$

ou bien

$$\frac{dy}{dx} + \frac{B + B'\mu + B''\mu'}{A + A'\mu + A''\mu'}\frac{dz}{dx} + \frac{C + C'\mu + C''\mu'}{A + A'\mu + A''\mu'}\frac{du}{dx} + \frac{D + D'\mu + D''\mu'}{A + A'\mu' + A''\mu'} \times$$

$$\left\{ y + \frac{E + E'\mu + E''\mu'}{D + D'\mu + D''\mu'}z + \frac{F + F'\mu + F''\mu'}{D + D'\mu + D''\mu'}u \right\} = \frac{X + X'\mu + X''\mu'}{A + A'\mu + A''\mu'},$$

puis en déterminant μ et μ' par les deux conditions

$$\frac{B + B'\mu + B''\mu'}{A + A'\mu + A''\mu'} = \frac{E + E'\mu + E''\mu'}{D + D'\mu + D''\mu'}, \quad \frac{C + C'\mu + C''\mu'}{A + A'\mu + A''\mu'} = \frac{F + F'\mu + F''\mu'}{D + D'\mu + D''\mu'}$$

et en représentant par r la fonction

$$y + \frac{E + E'\mu + E''\mu'}{D + D'\mu + D''\mu'}z + \frac{F + F'\mu + F''\mu'}{D + D'\mu + D''\mu'}u,$$

l'équation différentielle prendrait, comme précédemment, la forme

$$dr + mr\,dx = X_1 dx$$

qui aurait encore pour intégrale

$$r = e^{-mx}\left(\int X_1 e^{mx}dx + E\right).$$

Remarquons que les deux équations qui servent à déterminer μ et μ', conduisent par l'élimination, à deux équations du troisième degré, l'une

en μ et l'autre en μ', comme on peut s'en assurer, et donnent par conséquent trois systèmes de valeurs pour ces facteurs. En désignant par $m', m'', m''', r', r'', r'''$, et X_i', X_i'', X_i''', les trois valeurs des fonctions représentées par m, r et X_i, on aura enfin pour les trois intégrales, après avoir mis pour r la fonction en y, z, u qu'elle représente,

$$r' = e^{-m'x}\left(\int X_i' e^{m'x} dx + E\right), \quad r'' = e^{-m''x}\left(\int X_i'' e^{m''x} dx + E'\right),$$

$$r''' = e^{-m'''x}\left(\int X_i''' e^{m'''x} dx + E''\right).$$

Une marche analogue fera connaître les intégrales pour les équations simultanées d'un plus grand nombre de variables.

On serait arrivé aux intégrales de ces mêmes équations, en effectuant l'élimination par la méthode générale (N° 205) et en faisant usage pour l'intégration des propriétés des équations dérivées linéaires démontrées au N° 198.

207. *Cas des racines égales. Dérivation sous le signe.* — Lorsque les équations qui donnent les valeurs de $\mu, \mu', \ldots.$ ont des racines égales, la méthode précédente devient insuffisante; car, pour le cas de deux variables dépendantes, par exemple, si les deux valeurs de μ sont égales, il est clair que m et m' se confondront ainsi que X_i et X_i'; les deux intégrales seront donc identiques et n'en formeront plus qu'une seule. Pour trouver alors la seconde intégrale, considérons la première, savoir

$$y + \frac{D + D'\mu}{C + C'\mu} z - e^{-mx}\left(\int X_i e^{mx} dx + E\right) = 0$$

comme étant une équation en μ. Il résulte du théorème des racines égales généralisé et étendu à une fonction quelconque (*), qu'en géné-

(*) Soit $f(\mu)$ une fonction quelconque contenant μ. Supposons que celle-ci soit nulle pour deux valeurs de μ représentées par μ et $\mu + h$. On aura à la fois

$$f(\mu) = 0, \quad f(\mu + h) = 0$$

et comme on a, θ étant compris entre zéro et l'unité,

$$f(\mu + h) = f(\mu) + hf'(\mu + \theta h),$$

les deux équations deviennent

$$f(\mu) = 0, \quad f'(\mu + \theta h) = 0$$

qui, lorsque les deux valeurs de μ sont égales ou lorsque h est nul, se réduisent aux deux suivantes

$$f(\mu) = 0, \quad f'(\mu) = 0.$$

ral, si une équation est satisfaite par deux valeurs d'une quantité, la dérivée de cette équation prise par rapport à cette quantité est aussi satisfaite lorsque ces deux valeurs deviennent égales. Si donc on dérive l'intégrale précédente par rapport à μ, on obtiendra la seconde intégrale cherchée. Cette dérivation peut se faire dans chaque cas particulier, lorsque l'intégrale $\int X_i e^{mx} dx$ a été trouvée; mais on peut, sans assigner à X_i une valeur particulière et sans effectuer l'intégration, dériver la fonction par rapport à une lettre μ placée sous le signe d'intégration, opération qui se désigne sous le nom de *dérivation* ou *différenciation sous le signe*; en effet, soit

$$\int f(x, \mu)\, dx$$

une intégrale indéfinie dans laquelle μ est une certaine quantité indépendante de x et comprise d'une manière quelconque dans la différentielle $f(x, \mu)\, dx$; la dérivée par rapport à μ de cette intégrale n'est autre chose que la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{\int f(x, \mu + h)\, dx - \int f(x, \mu)\, dx}{h} = \int \frac{[f(x, \mu + h) - f(x, \mu)]}{h} dx$$

lorsque h converge vers zéro, et il est visible que cette limite est $\int \frac{df(x, \mu)}{d\mu} dx$; la dérivée par rapport à μ, de $\int f(x, \mu)\, dx$ est donc $\int \frac{df(x, \mu)}{d\mu} dx$, d'où résulte ce théorème : *Pour dériver une intégrale indéfinie qui n'est qu'indiquée, par rapport à une lettre indépendante de la variable et comprise dans la différentielle sous le signe d'intégration, il faut dériver sous le signe par rapport à cette lettre.*

Il suit de là que, si l'on dérive l'intégrale des équations simultanées par rapport à μ, en observant que m et X_i sont des fonctions connues de cette lettre, et que la constante arbitraire E peut contenir μ d'une manière quelconque, on aura pour deuxième intégrale des deux équations simultanées

$$\frac{CD' - C'D}{(C + C'\mu)^2} z = -\frac{dm}{d\mu} x e^{-mx} \left(\int X_i e^{mx} dx + E\right)$$

$$+ e^{-mx} \left(\int \frac{dm}{d\mu} X_i x e^{mx} dx + \int \frac{dX_i}{d\mu} e^{mx} dx + \frac{dE}{d\mu} \right)$$

que l'on peut mettre sous cette autre forme, en observant que $\frac{dE}{d\mu}$ est aussi une constante arbitraire que l'on peut représenter par E', (*)

$$\frac{CD'-C'D}{(C+C'\mu)^2}z = e^{-mx}\left\{E' - E\frac{dm}{d\mu}x + \int\left(\frac{dX_{,}}{d\mu} + \frac{dm}{d\mu}X_{,}x\right)e^{mx}dx - \frac{dm}{d\mu}x\int X_{,}e^{mx}dx\right\},$$

ou bien en remplaçant E par sa valeur tirée de la 1[re] intégrale,

$$\frac{CD'-C'D}{(C+C'\mu)^2}z + \frac{dm}{d\mu}x\left(y + \frac{D+D'\mu}{C+C'\mu}z\right) = e^{-mx}\left\{E' + \int\left(\frac{dX_{,}}{d\mu} + \frac{dm}{d\mu}X_{,}x\right)e^{mx}dx\right\}.$$

Cette équation est la seconde intégrale des deux équations dérivées simultanées proposées; E et E' sont les deux constantes arbitraires qu'elles doivent contenir. Pour les équations dérivées contenant plus de trois variables, on suivra une marche analogue. Si les produits $B'C$ et $A'D'$ étaient égaux, l'équation qui donne la valeur de μ se réduirait au premier degré; mais on sait que dans ce cas la seconde racine est infinie et les valeurs de m', $X'_{,}$, et le coefficient de z dans la 1[re] intégrale deviennent $\frac{C'}{A'}$, $\frac{X'}{A'}$, $\frac{D'}{C'}$, de sorte que la seconde intégrale est alors

$$y + \frac{D'}{C'}z = e^{-\frac{C'}{A'}x}\left(\frac{1}{A'}\int X'e^{\frac{C'}{A'}x}dx + E'\right).$$

208. ***Intégration des équations linéaires simultanées d'un ordre quelconque.*** — L'intégration d'un système d'équations linéaires simultanées à coefficients constants et d'un ordre quelconque peut être ramenée au cas précédent; car si l'on a

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{d^2z}{dx^2} + C\frac{dy}{dx} + D\frac{dz}{dx} + Ey + Fz = X,$$

$$A'\frac{d^2y}{dx^2} + B'\frac{d^2z}{dx^2} + C'\frac{dy}{dx} + D'\frac{dz}{dx} + E'y + F'z = X'.$$

(*) Les deux quantités E et E' ont des valeurs entièrement arbitraires, quoique E' soit la dérivée de E, car on peut ajouter à la fonction E telle constante absolue que l'on veut, sans que E' cesse d'être la dérivée de E.

en posant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dx} = q,$$

les deux équations sont remplacées par les suivantes :

$$A\frac{dp}{dx} + B\frac{dq}{dx} + Cp + Dq + Ey + Fz = X,$$

$$A'\frac{dp}{dx} + B'\frac{dq}{dx} + C'p + D'q + E'y + F'z = X',$$

$$\frac{dy}{dx} - p = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} - q = 0$$

qui sont linéaires et du premier ordre à quatre variables dépendantes y, z, p, q. Après avoir trouvé les quatre intégrales, on éliminera entre celles-ci les quantités p et q, ce qui conduira à deux équations en x, y, z qui seront les deux intégrales cherchées.

CHAPITRE XVI.

—

Intégration des équations différentielles renfermant plusieurs variables indépendantes. — Différentielles totales. Conditions d'intégrabilité. — Intégration d'une équation différentielle totale renfermant plusieurs variables indépendantes. — Exemples d'intégration. — Cas où l'équation différentielle totale ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité. — Intégration des équations différentielles totales qui passent le premier degré. — Cas où l'on ne connaît qu'une seule dérivée partielle. — Équations aux dérivées partielles. Elles ont toujours une intégrale. — Élimination des fonctions arbitraires. — Intégration des équations aux dérivées partielles du premier degré et du premier ordre. — Vérification de l'intégrale. — Exemples d'intégration. Applications géométriques. — Détermination des fonctions arbitraires. — Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et de forme quelconque. — Solutions singulières des équations aux dérivées partielles. — Intégration des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs. — Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients constants. — Intégration des équations linéaires à coefficients variables. — Intégration par les séries.

209. *Intégration des équations différentielles renfermant plusieurs variables indépendantes.* — Nous considérerons dans ce chapitre des équations dérivées renfermant une seule variable dépendante z et deux variables indépendantes x et y. Comme la variable dépendante z peut être dérivée par rapport à l'une ou l'autre des variables indépendantes (x, y), on aura deux sortes de dérivées du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ que nous avons déjà appelées les dérivées partielles de la fonction z, ou trois dérivées partielles du second ordre et ainsi de

suite. Il se présente trois cas. On peut se proposer de remonter à la fonction primitive, connaissant les valeurs de toutes les dérivées d'un certain ordre, ou lorsque quelques-unes d'entre elles sont données, ou enfin lorsqu'on ne connaît la valeur d'aucune d'elles, mais qu'une relation entre ces dérivées est donnée. Nous examinerons successivement chacun des trois cas.

210. *Différentielles totales. Conditions d'intégrabilité.* — Connaître les deux dérivées partielles du premier ordre $\frac{dz}{dx} = M$, $\frac{dz}{dy} = N$, ou les trois dérivées du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2} = R$, $\frac{d^2z}{dxdy} = S$, $\frac{d^2z}{dy^2} = T$ et remonter de ces dérivées à la fonction primitive, cela revient évidemment à intégrer les équations différentielles totales du premier ou du second ordre

$$dz = Mdx + Ndy, \quad d^2z = Rdx^2 + 2Sdxdy + Tdy^2$$

puisque les fonctions M, N, R, S, T ne font qu'occuper la place des dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ dans les différentielles totales

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy, \quad d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2.$$

De semblables équations différentielles ne sont pas toujours possibles, c'est-à-dire que si l'on attribue à $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ des valeurs M et N quelconques, $Mdx + Ndy$ pourrait bien ne pas représenter la différentielle totale dz d'une fonction z des deux variables indépendantes (x, y); car on a vu qu'il doit exister pour cela entre les dérivées $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ la relation

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx}$$

et que par conséquent on doit avoir identiquement

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx},$$

condition indispensable pour que les valeurs M et N de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ puissent appartenir à la même fonction primitive. Si M et N renfermaient la variable dépendante z, comme $\frac{dM}{dy}$ et $\frac{dN}{dx}$ sont les dérivées de M et de N prises par rapport à tous les y et par rapport à tous les x, celles-ci deviendraient $\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dN}{dx}+\frac{dN}{dz}\frac{dz}{dx}$ et la condition d'intégrabilité serait

$$\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dy}=\frac{dN}{dx}+\frac{dN}{dz}\frac{dz}{dx},$$

ou bien en remplaçant $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ par leur valeur,

$$\frac{dM}{dy}+N\frac{dM}{dz}=\frac{dN}{dx}+M\frac{dN}{dz}.$$

L'équation différentielle totale du premier ordre à trois variables se présente souvent sous la forme

$$Pdx+Qdy+Rdz=0\,;$$

pour avoir dans ce cas la condition d'intégrabilité, il suffit de remarquer que, puisqu'on peut la mettre sous la forme

$$dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy,$$

il faut remplacer M et N par $-\frac{P}{R}$ et $-\frac{Q}{R}$ et l'on trouve

$$R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)=0.$$

Les équations différentielles totales du second ordre et des ordres plus élevés conduisent à des conditions analogues, auxquelles nous ne nous arrêterons pas.

Le même raisonnement fait voir que quand M, N, P représentent les valeurs des dérivées partielles d'une fonction u, par rapport à trois variables indépendantes (x, y, z), c'est-à-dire, quand on a

$$du=Mdx+Ndy+Pdz,$$

cette équation n'est possible que si ces fonctions satisfont aux équations de condition

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx},\quad \frac{dM}{dz}=\frac{dP}{dx},\quad \frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy}.$$

211. *Intégration d'une équation différentielle totale renfermant plusieurs variables indépendantes.* — Pour intégrer le système des deux équations

$$\frac{dz}{dx}=M,\quad \frac{dz}{dy}=N$$

satisfaisant à la condition d'intégrabilité, ou, ce qui revient au même, pour intégrer l'équation différentielle totale

$$dz=Mdx+Ndy,$$

remarquons que la dérivée partielle $\frac{dz}{dx}$ ayant été prise en traitant y comme constante dans l'équation

$$\frac{dz}{dx}=M,$$

il faut intégrer celle-ci en considérant x et z comme seules variables; mais la constante arbitraire, au lieu d'être une constante absolue, pourra être une fonction quelconque Y de la variable y; cette intégrale sera donc de la forme

$$F(x,y,z)+Y=0,$$

$F(x, y, z)$ étant une fonction connue de (x, y, z). On déterminera ensuite Y de manière que la valeur de $\frac{dz}{dy}$ tirée de cette dernière soit égale à N. Pour cela on différenciera cette intégrale par rapport à y, ce qui donne

$$\frac{dY}{dy}+\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}=0$$

et en remplaçant $\frac{dz}{dy}$ par N, il vient

$$dY=-\frac{dF}{dy}dy-\frac{dF}{dz}Ndy \quad \text{et} \quad Y=-\int\left(\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}Ndy\right)+C,$$

C étant une constante arbitraire absolue, puisqu'elle ne peut contenir ni x ni y. La fonction $\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} N$ placée sous le signe d'intégration, ne renferme que la seule variable y, si la condition d'intégrabilité est satisfaite; car, de ce que l'on a

$$F(x, y, z) = -Y,$$

Y ne renfermant ni x ni z, il résulte que l'on a aussi en dérivant par rapport à x,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

et en dérivant une seconde fois par rapport à y,

$$\frac{d^2F}{dxdy} + \frac{d^2F}{dxdz}\frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dx}\left(\frac{d^2F}{dzdy} + \frac{d^2F}{dz^2}\frac{dz}{dy}\right) + \frac{dF}{dz}\frac{d^2z}{dxdy} = 0.$$

Or, si l'on dérive par rapport à x la fonction placée sous le signe d'intégration et qu'on tienne compte de la condition d'intégrabilité

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx},$$

ainsi que des identités

$$\frac{d^2F}{dxdz} = \frac{d^2F}{dzdx},$$

on trouvera identiquement le même résultat que ci-dessus. Cette dernière dérivée par rapport à x est donc nulle et par conséquent ni la variable x ni la variable z qui contient x implicitement, n'y sont renfermées.

Cette remarque est une nouvelle preuve que l'équation de condition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ est nécessaire pour que l'équation différentielle ait une intégrale et en outre, que l'intégrale existe dès que l'équation de condition est satisfaite.

212. *Exemples d'intégration.* — Prenons pour exemple

$$(x + y)\,dz + (x + z)\,dy + (y + z)\,dx = 0$$

qui satisfait à la condition d'intégrabilité. On a donc

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{y+z}{x+y}; \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{y+z} = -\frac{dx}{x+y}$$

et $\log(x+z) = -\log(x+y) + \log Y$ ou $(y+z)(x+y) = Y$.

On tire de là

$$\frac{dF}{dy} = -2y - x - z, \quad \frac{dF}{dz} = -x - y$$

et comme il résulte de l'équation différentielle donnée que l'on a

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{x+z}{x+y},$$

on trouve

$$\frac{dY}{dy} = 2y \quad \text{et} \quad Y = y^2 + C;$$

l'intégrale cherchée est donc

$$(y+z)(x+y) = y^2 + C \quad \text{ou bien} \quad xy + xz + yz = C.$$

Comme il est indifférent de prendre x, y ou z pour variable dépendante dans l'équation différentielle totale du premier ordre

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

on choisit celle des trois variables pour laquelle l'intégration est la plus simple.

On arrive d'une manière plus expéditive à l'intégrale toutes les fois que, au moyen d'un facteur commun, on parvient à séparer les trois variables ou à décomposer la différentielle donnée en plusieurs groupes de termes formant chacun une différentielle exacte; on démontre même que, lorsque l'équation différentielle totale satisfait à la condition d'intégrabilité, un semblable facteur existe toujours, quoiqu'il soit souvent difficile de le déterminer. Ainsi dans l'exemple suivant :

$$(x^2 + y^2)\,dz = (z - a)(xdx + ydy),$$

en multipliant par $\frac{1}{(x^2+y^2)(z-a)}$, on peut écrire l'équation différentielle sous cette forme

$$\frac{dz}{z-a}=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$

dont les deux membres sont des différentielles totales exactes. L'intégrale est

$$(z-a)^2=C(x^2+y^2).$$

Certaines transformations sont quelquefois nécessaires pour rendre la fonction Y introduite par l'intégration, indépendante des deux variables x et z. L'équation différentielle suivante offre un exemple de ce cas. Soit

$$(2xz+z^3)\,dx+2yzdy-2(x^2+y^2+b^2)\,dz=0$$

qui satisfait à la condition d'intégrabilité. En prenant z pour variable dépendante, il vient

$$\frac{dz}{dy}=\frac{yz}{x^2+y^2+b^2},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{z}{(y^2+x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}=X,$$

dans laquelle X représente une fonction de x seul. En dérivant par rapport à x, on a, attendu que z est fonction de x,

$$\frac{dX}{dx}=\frac{(x^2+y^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{dx}-xz\,(x^2+y^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+b^2}$$

et en remplaçant $\frac{dz}{dx}$ par sa valeur donnée $\frac{2xz+z^3}{2(x^2+y^2+b^2)}$, l'équation dérivée se réduit à

$$\frac{dX}{dx}=\frac{z^3}{2\,(x^2+y^2+b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où l'on devrait par une quadrature, tirer la valeur de X, quadrature impossible, parce que la valeur de la dérivée $\frac{dX}{dx}$ renferme les trois variables (x, y, z), quoique l'on soit certain que X ne doit être fonction que de x seul. Pour lever cette difficulté, il suffit d'éliminer y ou z entre cette dernière et la valeur de X; il vient alors

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{2}X^3, \quad \text{d'où} \quad \frac{dX}{X^3} = \frac{1}{2}dx, \quad \text{et} \quad X^2 = -\frac{1}{x+C};$$

l'intégrale cherchée est donc

$$\frac{xz^2 + x^2 + y^2 + b^2}{z^2} + C = 0.$$

Une marche analogue conduirait à la fonction primitive, dont les trois dérivées partielles du second ordre seraient connues.

215. *Cas où l'équation différentielle totale ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité.* — Si une équation différentielle totale à trois variables ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, il faudrait en conclure que cette équation prise isolément et considérée comme renfermant deux variables indépendantes, est impossible, ou en d'autres termes, qu'il n'existe pas de surface jouissant dans tous ses points de la propriété exprimée par l'équation différentielle. Celle-ci ne prend une signification qu'en admettant qu'elle appartient à un système de deux équations simultanées dont une seule est donnée, tandis que l'autre reste arbitraire; c'est-à-dire, que la propriété ne peut subsister que pour une courbe dans l'espace, dont l'une des équations est arbitraire. Pour intégrer, on devrait même, à défaut de cette seconde équation, admettre entre les trois variables ou entre deux d'entre elles une relation quelconque, ce qui permettrait d'éliminer une variable de l'équation différentielle donnée et rendrait l'intégration possible. L'exemple géométrique suivant éclaircira cette remarque. Supposons que l'on demande l'équation de la surface qui jouit de cette propriété, que si en un point quelconque on mène des tangentes aux sections parallèles aux plans des XZ et des YZ, les deux sous-tangentes correspondantes soient respectivement proportionnelles à l'y et à l'x du point de contact. On est conduit aux deux équations de condition

$$\frac{z}{\frac{dz}{dx}} = my \quad \frac{z}{\frac{dz}{dy}} = nx \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{my}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{z}{nx},$$

et l'équation différentielle totale de la surface devrait être de la forme

$$dz = \frac{z}{my}dx + \frac{z}{nx}dy.$$

Comme cette équation n'est pas une différentielle totale exacte, on en conclut qu'il n'existe pas d'équation primitive à deux variables indépendantes qui y satisfait, c'est-à-dire, qu'aucune surface ne jouit de la propriété indiquée. Toutefois, il en existe une qui jouit de cette propriété non pas dans tous ses points, mais le long d'une certaine courbe qui y est contenue et dont on peut se donner la projection, ou que l'on peut assujettir à se trouver dans une surface donnée; puisque en établissant une relation quelconque entre (x, y, z), les variables x et y cessent d'être indépendantes et l'équation différentielle précédente devient intégrable. La courbe représentée par cette intégrale et par cette relation est visiblement la courbe cherchée. Ainsi, si l'on prend pour relation entre (x, y, z) l'équation du paraboloïde hyperbolique

$$z = axy,$$

l'équation différentielle totale devient

$$dz = \frac{a}{m}xdx + \frac{a}{n}ydy$$

dont l'intégrale est

$$z = \frac{ax^2}{2m} + \frac{ay^2}{2n} + b$$

et cette équation jointe à celle du paraboloïde hyperbolique détermine la courbe le long de laquelle la surface cherchée jouit de la propriété énoncée plus haut. En éliminant z, on trouve pour la projection de la courbe sur le plan XY,

$$2xy - \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = \frac{2b}{a}$$

qui représente une section conique.

214. *Intégration des équations différentielles totales qui passent le premier degré.* — Dans les numéros précédents on ne s'est occupé que de l'intégration des équations différentielles totales du premier degré ou de la forme

$$dz = Mdx + Ndy, \quad d^2z = Rdx^2 + 2Sdxdy + Tdy^2$$

satisfaisant ou ne satisfaisant pas aux conditions d'intégrabilité. Supposons maintenant que la différentielle totale dz, d^2z,.... de la variable dépendante z soit élevée à une puissance supérieure à la première. L'équation prend alors la forme

$$Pdz^2+Qdy^2+Rdx^2+Sdzdy+Tdzdx+Udxdy=0, \quad P(d^2z)^2+\text{etc.}=0$$

et est dite du second, troisième etc. degré. Elle ne peut être considérée comme déduite d'une équation primitive contenant deux variables indépendantes (x, y), que si elle s'accorde identiquement avec une certaine équation différentielle totale exacte

$$dz=Mdx+Ndy,$$

c'est-à-dire, si en remplaçant dz par la valeur précédente, et égalant à zéro les coefficients de tous les termes semblables, on peut déduire de ces équations de condition des valeurs de M et N satisfaisant à l'identité

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}.$$

Mais il est visible que si l'on attribue aux coefficients P, Q, R,.... des valeurs arbitraires, ces conditions en général ne seront pas remplies et que par conséquent les deux variables (x, y) ne seront pas indépendantes. L'intégrale ne s'obtiendra dans ce cas comme plus haut, qu'en admettant qu'il existe entre ces deux variables une relation que l'on peut prendre à volonté,

$$f(x, y)=0, \quad dy=pdx.$$

Alors l'équation différentielle totale devient, en remplaçant y et dy par leur valeur,

$$Pdz^2+Qp^2dx^2+Rdx^2+Spdzdx+Tdzdx+Updx^2=0,$$

d'où l'on tirera la valeur de dz qui sera de la forme

$$dz=W.dx,$$

W étant une fonction connue de x et z seulement, parce que les y et les p ou $\frac{dy}{dx}$ peuvent être remplacés par leur valeur en x. L'intégrale de cette dernière,

$$F(x, z)=0$$

jointe à l'équation

$$f(x, y) = 0$$

sera la solution cherchée.

215. *Cas où l'on ne connaît qu'une seule dérivée partielle.* — Supposons que l'on ne connaisse qu'une des dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et posons

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z).$$

Comme cette dérivée a été obtenue en traitant y comme constant, il faut intégrer dans la même hypothèse et considérer la constante arbitraire comme une fonction arbitraire de cette variable; on a donc pour intégrale complète de

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z),$$

savoir :

$$F(x, y, z) = \varphi y,$$

φy étant une fonction arbitraire de la variable y seule. Les équations

$$\frac{dz}{dx} = a, \quad \frac{dz}{dx} = x^2 + y^2, \quad \frac{dz}{dy} = zx^2$$

conduisent aux intégrales

$$z = ax + \varphi y, \quad z = \frac{x^3}{3} + xy^2 + \varphi y, \quad z = e^{x^2 y + \varphi x}.$$

Les mêmes calculs conduisent à l'intégrale, connaissant une dérivée partielle d'un ordre supérieur. Par exemple

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = ax - y^2$$

conduit à

$$\frac{dz}{dx} = \frac{ax^2}{2} - y^2 x + \varphi y, \quad z = \frac{ax^3}{6} - \frac{y^2 x^2}{2} + x\varphi y + \psi y,$$

φy et ψy étant deux fonctions arbitraires de y. De même

$$\frac{d^2z}{dxdy} = axy$$

donne

$$\frac{dz}{dy} = \frac{ax^2y}{2} + \varphi y, \quad z = \frac{ax^2y^2}{4} + \int \varphi y dy + \psi x$$

ou plutôt

$$z = \frac{ax^2y^2}{4} + \varphi' y + \psi x,$$

puisque φy étant une fonction quelconque de y, $\int \varphi y dy$ est elle-même une fonction arbitraire φ' de cette variable.

216. *Équations aux dérivées partielles. Elles ont toujours une intégrale.* — Passons enfin au troisième cas et supposons que l'on ne connaisse la valeur d'aucune dérivée partielle, mais que l'on ait une relation entre un certain nombre d'entre elles et les variables (x, y, z), relation que nous désignerons en général par

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\right) = 0.$$

On appelle encore *intégrale*, l'équation primitive qui y satisfait et la recherche de cette intégrale fait plus particulièrement l'objet de la branche importante d'analyse qui traite de l'*intégration des équations aux dérivées partielles*. Avant de nous occuper des différentes méthodes d'intégration, il importe de démontrer à priori qu'à une équation quelconque aux dérivées partielles, correspond nécessairement une équation primitive ou une intégrale avec deux variables indépendantes (x, y), et une variable dépendante z, de la forme

$$z = F(x, y).$$

Pour le faire voir, observons qu'une fonction quelconque F en (x, y) peut être conçue développée suivant les puissances entières et ascendantes de x, de sorte qu'on peut poser en général

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots Px^p + Qx^{p+1} + \text{etc.},$$

dans laquelle $A, B, C, D, P, \ldots$ sont des fonctions de y seul, et la question se réduit à démontrer la possibilité de trouver pour ces

coefficients indéterminés des valeurs telles que z satisfasse à une équation aux dérivées partielles donnée. Or, si l'on tire de l'équation précédente les valeurs de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$,..... c'est-à-dire,

$$\frac{dz}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dy}x + \frac{dC}{dy}x^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^{p+q}z}{dx^p dy^q} = 1.2.3.....p\frac{d^qP}{dy^q} + 2.3.....(p+1)\frac{d^qQ}{dy^q}x + \text{etc.}$$

et qu'on les substitue, ainsi que celle de z, dans l'équation aux dérivées partielles proposée, préalablement résolue par rapport à la dérivée de l'ordre le plus élevé ou mise sous la forme

$$\frac{d^{p+q}z}{dx^p dy^q} = \varphi\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\right),$$

le premier membre sera encore formé d'une série développée suivant les puissances de x, et en concevant le second membre, après la substitution des valeurs de z et de ses dérivées, développé de même par la formule de Maclaurin, suivant les puissances de x, on sera conduit à une équation de la forme

$$1.2.3.....p\frac{d^qP}{dy^q} + 2.3....(p+1)\frac{d^qQ}{dy^q}x + \text{etc.} = A' + B'x + C'x^2 + \text{etc.}$$

dans laquelle A', B', C', etc., sont des fonctions connues de y, de A, B, C,.... et de $\frac{dA}{dy}$, $\frac{d^2A}{dy^2}$, $\frac{dB}{dy}$, etc. Pour que cette équation soit satisfaite indépendamment de toute valeur attribuée à x, les deux membres doivent être identiques et il faut que l'on puisse égaler les coefficients des mêmes puissances de x, ce qui conduit à un certain nombre d'équations dérivées simultanées entre y, les fonctions A, B, C,.... de y, et les dérivées de ces fonctions. Or, il est visible que le nombre de ces équations sera toujours inférieur à celui des fonctions inconnues A, B, C,.... P, Q,.... puisque le nombre d'équations est marqué par le nombre de termes du premier membre, lequel

commence par la lettre P; ces équations simultanées sont donc en général possibles et pourront servir à déterminer les valeurs de P, Q,..... et l'équation à coefficients indéterminés posée plus haut deviendra l'intégrale de la proposée. Observons que, comme le nombre d'équations auxquelles on est conduit est inférieur au nombre de fonctions indéterminées A, B, C,.... P, Q,...., quelques unes d'entre elles restent arbitraires et ce nombre est d'autant plus grand que la dérivée $\dfrac{d^{p+q}z}{dx^p dy^q}$ est d'un ordre plus élevé. Si l'on avait développé la fonction suivant les puissances ascendantes de y, on aurait trouvé que l'intégrale doit renfermer un certain nombre de fonctions arbitraires de x.

Il résulte de là : 1° que l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles renferme toujours une ou plusieurs fonctions arbitraires; 2° que le nombre de ces fonctions est d'autant plus grand que l'équation est d'un ordre plus élevé.

217. *Élimination des fonctions arbitraires.* — Une équation primitive renfermant une fonction arbitraire peut toujours être remplacée par une équation aux dérivées partielles du premier degré et du premier ordre ne renfermant plus cette fonction arbitraire. Soit en effet

$$f(x, y, z, \varphi u) = 0$$

l'équation primitive contenant une fonction arbitraire φ d'une variable u représentant une fonction donnée de x, y et z. On aura, en dérivant successivement par rapport à x et y et remarquant que z est fonction de ces deux variables,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{du}\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{du}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Ces deux équations donnent pour $\dfrac{dz}{dx}$ et $\dfrac{dz}{dy}$ des valeurs qui renferment les fonctions arbitraires φu et $\dfrac{d\varphi}{du}$; mais si l'on y substitue la valeur de φu tirée de l'équation primitive et qu'on élimine ensuite entre elles le coefficient indéterminé $\dfrac{d\varphi}{du}$, on trouvera une équation finale de laquelle

φ aura disparu et qui sera une relation entre les dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ et x, y et z, c'est-à-dire, une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont

$$f(x, y, z, \varphi u) = 0$$

est l'intégrale. Cette équation finale est

$$\frac{dz}{dx}\left(\frac{df}{dz}\frac{du}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{du}{dz}\right) + \frac{dz}{dy}\left(\frac{df}{dx}\frac{du}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{du}{dx}\right) = \frac{df}{dy}\frac{du}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{du}{dy},$$

qui, dès que les fonctions f et u seront données, prendra la forme

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R.$$

P, Q, R représentant des fonctions connues de (x, y, z).

Si la fonction primitive contenait plusieurs fonctions arbitraires les deux équations dérivées partielles du premier ordre ne suffiraient pas pour l'élimination et il faudrait se procurer de nouvelles équations en prenant les dérivées partielles secondes, troisièmes, etc., ce qui conduirait évidemment à une équation finale d'un ordre d'autant plus élevé que le nombre de fonctions arbitraires à éliminer est plus grand.

218. *Intégration des équations aux dérivées partielles du premier degré et du premier ordre.* — Passons à l'intégration des équations aux dérivées partielles et occupons-nous d'abord des équations du premier ordre et du premier degré. Leur forme la plus générale est

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R, \quad \text{ou} \quad Pp + Qq = R,$$

P, Q et R étant des fonctions données de (x, y, z). On voit que cette équation est de même forme que celle qui résulte de l'élimination de la fonction arbitraire φu entre

$$f(x, y, z, \varphi u) = 0,$$

et ses deux dérivées partielles (N° 217). D'où l'on peut déjà conclure, par induction, que l'intégrale que nous cherchons, contiendra une fonction arbitraire φ d'une certaine fonction u des variables (x, y, z). Pour trouver cette intégrale, observons que l'équation aux dérivées

partielles ayant toujours une intégrale, est inséparable de l'équation

$$dz = pdx + qdy,$$

qui n'est autre chose que la différentielle totale de cette intégrale. En éliminant q, on fait prendre à l'équation donnée la forme suivante :

$$Qdz - Rdy + p\,(Pdy - Qdx) = 0 \ldots\ldots (1).$$

Il est visible que si une équation primitive *unique* en (x, y, z) rend possible l'existence simultanée des deux équations différentielles

$$Qdz - Rdy = 0, \quad Pdy - Qdx = 0 \ldots\ldots (2)$$

ou des deux intégrales de celles-ci, cette équation primitive unique rendra identique l'équation (1) et en sera par conséquent l'intégrale. Or si l'on intègre les équations différentielles, (2), considérées comme formant un système d'équations différentielles simultanées à trois variables et qu'on représente par

$$V = C, \quad U = C',$$

les deux intégrales(*), C et C' étant les deux constantes arbitraires et V, U deux fonctions connues de (x, y, z), il est visible que ces deux équations primitives qui vérifient (1) ne formeront une équation primitive *unique* que si U et C' sont des fonctions semblables mais du

---

(*) Il est à remarquer que ces deux intégrales existent toujours et peuvent s'obtenir de la manière suivante : entre les deux équations

$$Qdz - Rdy = 0, \quad Pdy - Qdx = 0,$$

on peut éliminer d'une part la variable x et d'autre part la variable z (voir le N° 205) et celles-ci seront remplacées par deux équations dérivées du second ordre en (y, z) et en (x, y). En intégrant chacune une fois, on arrive à deux équations contenant l'une, $\left(y, z, \frac{dy}{dz}\right)$ et C; l'autre, $\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ et C'. Si l'on y remplace $\frac{dy}{dz}$ et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs $\frac{Q}{R}$ et $\frac{Q}{P}$ tirées des deux équations précédentes et qu'ensuite on résolve par rapport à C et C', on sera conduit à deux équations de la forme

$$f(x, y, z) = C, \quad F(x, y, z) = C',$$

c'est-à-dire, aux équations

$$V = C, \quad U = C'.$$

reste arbitraires de V et de C, c'est-à-dire, si la seconde intégrale est de la forme

$$\varphi V = \varphi C,$$

qui a évidemment la même signification que la première

$$V = C.$$

La condition que C' soit une fonction arbitraire de C est toujours remplie par cela même que C' et C ont des valeurs arbitraires ; la seule équation de condition nécessaire pour rendre possible la simultanéité des équations (2) est donc

$$U = \varphi V.$$

Cette équation primitive est par conséquent l'intégrale de la proposée. De plus cette intégrale est générale, puisqu'elle contient la fonction arbitraire que l'on sait devoir s'y trouver. On est donc conduit à cette règle : On intégrera deux des trois équations différentielles simultanées

$$Qdz - Rdy = 0, \quad Pdy - Qdx = 0, \quad Pdz - Rdx = 0,$$

dont l'une quelconque est visiblement comprise dans les deux autres, et si

$$V = C, \quad U = C'$$

sont les intégrales résolues par rapport aux constantes arbitraires, l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles se formera en égalant l'une des fonctions U ou V à une fonction arbitraire de l'autre.

En appliquant les mêmes raisonnements à l'équation aux dérivées partielles du premier degré et du premier ordre à trois variables indépendantes (x, y, u),

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + R\frac{dz}{du} = S,$$

on démontrera de la même manière que celle-ci étant inséparable de l'équation différentielle totale

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{du}du,$$

si l'on élimine $\frac{dz}{du}$, l'équation proposée sera satisfaite par les trois équations

$$Pdu - Rdx = 0, \quad Qdu - Rdy = 0, \quad Sdu - Rdz = 0$$

ou par leurs intégrales, et par conséquent toute équation primitive *unique* qui réduira ces trois équations à une seule, sera l'intégrale cherchée. Les trois intégrales étant

$$V = C, \quad U = C', \quad W = C'',$$

l'identité de ces trois équations ne peut avoir lieu que si U et C' sont des fonctions arbitraires mais semblables de V et de C, et si W et C'' sont aussi des fonctions quelconques mais semblables de V et C ou de U et C'. Ces conditions sont toujours remplies pour les constantes, puisque celles-ci sont arbitraires; il suffit donc que l'on ait, en représentant par φ et ψ deux fonctions arbitraires,

$$V = \varphi U, \quad U = \psi W;$$

or, si l'on désigne par F une fonction arbitraire des deux fonctions déterminées U et W, les deux équations précédentes conduisent à la suivante

$$V = F(U, W),$$

puisque dans la fonction φ, quelques uns des U peuvent être remplacés par ψW. De plus, cette dernière équation renferme les deux autres comme cas particulier, puisque, par cela même que la fonction F est arbitraire, on peut y supprimer les W d'abord, puis les U.

Comme l'équation $V = F(U, W)$ est unique, elle forme l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles proposée.

Il est à remarquer que les trois équations différentielles simultanées

$$Pdu - Rdx = 0, \quad Qdu - Rdy = 0, \quad Sdu - Rdz = 0$$

conduisant par l'élimination de dx, dy ou dz, aux trois suivantes :

$$Pdy - Qdx = 0, \quad Qdz - Sdy = 0, \quad Pdz - Sdx = 0,$$

il suffira d'intégrer trois de ces six équations, ou trois équations résultant de leur combinaison.

219. *Vérification de l'intégrale.* — On peut vérifier que l'équation primitive

$$V=\varphi U$$

conduit à l'équation aux dérivées partielles proposée, et en est par conséquent l'intégrale; en effet ses deux équations dérivées partielles sont

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{d\varphi}{dU}\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dz}\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dz}\frac{dz}{dy}=\frac{d\varphi}{dU}\left(\frac{dU}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dz}{dy}\right),$$

et en éliminant la fonction arbitraire $\frac{d\varphi}{dU}$, on trouve comme au N° 217,

$$(1)\ldots\ldots\left(\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dz}-\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dy}\right)p-\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dz}-\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dx}\right)q$$

$$=-\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dy}.$$

Or U et V étant les intégrales des équations différentielles simultanées

$$Pdz-Rdx=0,\quad Qdz-Rdy=0,$$

ou d'une combinaison de celles-ci, et les équations

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dz}dz=0,$$

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz=0,$$

étant les différentielles totales de $U=C'$ et de $V=C$, il est visible que dx, dy, dz ont la même signification dans ces quatre équations qui deviennent par l'élimination de dx et dy,

$$\frac{dU}{dx}P+\frac{dU}{dy}Q+\frac{dU}{dz}R=0,\quad \frac{dV}{dx}P+\frac{dV}{dy}Q+\frac{dV}{dz}R=0.$$

Si de ces deux dernières on tire les valeurs de $\frac{dU}{dy}$ et $\frac{dV}{dy}$ pour les substituer dans (1), on arrive, toute réduction faite, à l'équation aux dérivées partielles proposée

$$Pp + Qq = R.$$

220. *Exemples d'intégration. Applications géométriques.* — Cette méthode d'intégration, appliquée aux équations aux dérivées partielles suivantes

$$x\frac{dz}{dy} - y\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$xy\frac{dz}{dx} + x^2\frac{dz}{dy} = yz,$$

$$az\frac{dz}{dx} - zx\frac{dz}{dy} = -xy,$$

conduit facilement aux intégrales

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

$$z = x\varphi(y^2 - x^2)$$

$$y^2 - z^2 = \varphi(2ay + x^2).$$

Prenons encore pour exemple

$$a\frac{dz}{dy} - z\frac{dz}{dx} = 2y - 2x.$$

On en tire les équations simultanées

$$2ydy - 2xdy = adz, \quad 2xdx - 2ydx = zdz, \quad adx + zdy = 0$$

dont aucune n'est intégrable séparément; mais si l'on additionne les deux premières, on trouve en intégrant,

$$x^2 + y^2 - 2xy = az + \frac{z^2}{2} + C \quad \text{ou} \quad (x - y)^2 - az - \frac{z^2}{2} = C.$$

Substituant ensuite dans la première, la valeur $\sqrt{C + az + \frac{z^2}{2}}$ de $x - y$, celle-ci devient

$$2dy = \frac{-adz}{\sqrt{C + az + \frac{z^2}{2}}},$$

et en intégrant,

$$\sqrt{2}\, y = a \log 2 \left(z + a - \sqrt{2C + 2az + z^2}\right) + C'$$

ou, après avoir remplacé C par sa valeur,

$$C' = y\sqrt{2} - a \log 2 \left[z + a - \sqrt{2}\,(x - y)\right].$$

L'intégrale cherchée est donc

$$y\sqrt{2} - a \log 2 \left[z + a - \sqrt{2}\,(x - y)\right] = \varphi\left[(x - y)^2 - az - \frac{z^2}{2}\right],$$

comme on peut le vérifier par la substitution.

Pour l'équation aux dérivées partielles

$$(y - bz)\frac{dz}{dx} - (x - az)\frac{dz}{dy} = bx - ay,$$

les équations différentielles à intégrer sont

$$(x - az)\, dz + (bx - ay)\, dy = 0, \qquad dy + \frac{x - az}{bx - ay}\, dz = 0,$$

ou bien

$$(y - bz)\, dz - (bx - ay)\, dx = 0, \qquad dx - \frac{y - bz}{bx - ay}\, dz = 0.$$

Si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par b et par a, et ensuite par y et par x, elles seront remplacées par les deux suivantes :

$$dz + adx + bdy = 0,$$

$$xdx + ydy + zdz = 0.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$z + ax + by = \varphi\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

On peut encore prendre pour exemples d'intégration, les équations aux dérivées partielles

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=a\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad xy\frac{dz}{dy}-x^2\frac{dz}{dx}=y^2$$

et l'on trouvera pour intégrales,

$$z=a\sqrt{x^2+y^2}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy).$$

L'équation

$$M\frac{dz}{dx}-N\frac{dz}{dy}=z\left(\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dx}\right)$$

qui donne le facteur z propre à rendre différentielle exacte l'équation différentielle implicite à deux variables (N° 177)

$$Mdy+Ndx=0,$$

conduit aux trois équations différentielles ordinaires et simultanées

$$Mdy+Ndx=0,$$

$$Ndz-z\left(\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right)dy=0,$$

$$Mdz+z\left(\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right)dx=0.$$

La première n'est autre que l'équation différentielle qu'on se propose d'intégrer. Il est visible qu'une seule de ces équations suffira pour déterminer le facteur z, si $\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right)$ ne contient que la variable y, ou si $\frac{1}{M}\left(\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right)$ ne contient que la variable x, ce qui s'accorde avec ce que nous avons déjà trouvé (N° 177).

Observons aussi que, comme l'intégrale générale contient une fonction arbitraire, on peut en déduire un nombre illimité de valeurs pour le facteur z, en faisant varier la forme de la fonction arbitraire, ce qui s'accorde aussi avec ce qui a été démontré au N° 176.

Les problèmes suivants, tout en offrant des exemples d'intégration, serviront à faire connaître la signification géométrique de certaines équations aux dérivées partielles.

1° *Trouver l'équation générale des surfaces coniques.* Une semblable surface est caractérisée par la condition que tous ses plans tangents viennent passer par un même point. Or, l'équation d'un plan tangent à une surface

$$z = f(x, y)$$

en un point (x, y, z) est

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dz}{dy}(y' - y),$$

(x', y', z') étant les coordonnées courantes du plan; si donc (a, b, c) sont les coordonnées du point fixe et qu'on remplace (x', y', z') par ces valeurs, on trouvera l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$z - c = \frac{dz}{dx}(x - a) + \frac{dz}{dy}(y - b)$$

qui exprime cette condition caractéristique et qui par conséquent, représente toutes les surfaces coniques. En intégrant on trouve

$$\frac{x - a}{z - c} = \varphi\left(\frac{y - b}{z - c}\right)$$

pour l'équation générale finie de ces surfaces.

2° *Trouver l'équation générale des surfaces cylindriques.* Cette surface est caractérisée par la condition que tous ses plans tangents sont parallèles à une même droite. Pour que le plan tangent

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dz}{dy}(y' - y)$$

qui est de la forme

$$z' + Ax' + By' + D = 0,$$

soit parallèle à une droite fixe donnée par les équations

$$x = az, \quad y = bz,$$

il doit exister entre les coefficients, la relation

$$1 + Aa + Bb = 0, \quad \text{c'est-à-dire}, \quad a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1,$$

qui est l'équation aux dérivées partielles de toutes les surfaces cylin driques. Elle a pour intégrale

$$x - az = \varphi(y - bz).$$

3° *Trouver l'équation générale des surfaces de révolution.* Le caractère qui appartient aux surfaces de cette nature, à l'exclusion de toute autre, est la propriété d'avoir ses normales dirigées vers l'axe de révolution; en posant donc les deux équations de l'axe

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

ainsi que les deux équations d'une normale

$$x - x' = -\frac{dz'}{dx'}(z - z'), \quad y - y' = -\frac{dz'}{dy'}(z - z'),$$

il suffira d'exprimer que ces deux droites ont un point (x, y, z) commun. En éliminant (x, y, z) entre elles, on obtient l'équation de condition

$$(y' - bz' - \beta)\frac{dz'}{dx'} - (x' - az' - \alpha)\frac{dz'}{dy'} = b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)$$

ou, en supprimant les accents,

$$(y - bz - \beta)\frac{dz}{dx} - (x - az - \alpha)\frac{dz}{dy} = b(x - \alpha) - a(y - \beta)$$

qui est l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution. Si l'on intègre, en suivant la marche indiquée à la page 465, après avoir remplacé $x - \alpha$ et $y - \beta$ par x' et y', on trouve pour intégrale

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \varphi[z + a(x - \alpha) + b(y - \beta)].$$

4° On appelle *conoïde* la surface engendrée par une droite qui se meut de manière à glisser sur une droite et sur une courbe donnée nommée *directrice*, en restant parallèle à un plan fixe. Si l'on prend la droite donnée pour axe des Z et le plan fixe pour plan des XY, en

supposant la droite perpendiculaire au plan directeur, il est visible qu'un plan tangent à cette surface en un point (x, y, z) contiendra la génératrice qui passe par ce point, puisqu'il contient les tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface et que la génératrice elle-même est une de ces lignes. D'où il suit que ce plan prolongé rencontrera l'axe des Z en un point dont le z sera égal à celui du point de contact. Or l'équation d'un plan tangent au point (x, y, z) est

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dz}{dy}(y' - y).$$

Pour obtenir le point d'intersection avec l'axe des Z, il faut faire $x' = 0$, $y' = 0$ et l'on trouve pour le z' de ce point,

$$z' = z - \frac{dz}{dx}x - \frac{dz}{dy}y.$$

Comme cette ordonnée doit être égale au z du point de contact, il vient en remplaçant z' par z,

$$\frac{dz}{dx}x + \frac{dz}{dy}y = 0$$

qui est l'équation aux dérivées partielles des conoïdes. L'intégrale

$$z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

est l'équation finie de toutes les surfaces de cette nature.

Lorsque dans l'équation aux dérivées partielles

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R$$

les coefficients P, Q, R ne contiennent pas la variable dépendante z, l'intégrale, ainsi qu'on a pu le vérifier dans quelques-uns des exemples que l'on vient de traiter, est toujours de la forme

$$z = \varphi u + F(x, y),$$

u et F étant des fonctions en (x, y) de forme déterminée et φ une fonction arbitraire de u; car si l'on pose les deux équations différentielles simultanées

$$Pdy - Qdx = 0, \quad Pdz - Rdx = 0,$$

la première, qui ne contient que x et y, aura pour intégrale

$$u = C,$$

dans laquelle u est une fonction connue de (x, y) et en éliminant y entre cette intégrale et la seconde équation différentielle, celle-ci mise sous la forme

$$dz = \frac{R}{P} dx$$

s'intégrera par une quadrature et donnera

$$z = f(x, C) + C' = f(x, u) + C' = F + C',$$

f étant une fonction déterminée de x et de C et par conséquent, F une fonction déterminée de (x, y). C' est une seconde constante arbitraire. L'intégrale $C' = \varphi C$ de l'équation aux dérivées partielles est donc

$$z = F + \varphi u,$$

comme il est dit plus haut. Cette remarque nous sera utile quand nous nous occuperons de l'intégration des équations linéaires d'un ordre plus élevé.

221. *Détermination des fonctions arbitraires.* — On voit par les exemples précédents que la présence des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations aux dérivées partielles est nécessaire pour donner à ces intégrales le degré de généralité qu'ont les équations dérivées. La fonction arbitraire ne cessera d'être indéterminée que lorsqu'on aura soumis chacune des surfaces à une condition particulière qui en détermine complètement la forme. Ainsi si pour le conoïde, on donne les équations de la directrice

$$x = fz \quad \text{et} \quad y = Fz,$$

comme celle-ci doit être renfermée dans la surface

$$z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

ces trois équations devront coexister et en représentant $\frac{x}{y}$ par u, on aura à la fois

$$z = \varphi u, \quad \frac{fz}{Fz} = u.$$

En résolvant cette dernière équation par rapport à z, cette variable sera exprimée par une fonction connue de u qui donnera la forme de la fonction arbitraire φ, puisque les deux valeurs de z doivent s'accorder.

De même, si la surface cylindrique

$$x - az = \varphi(y - bz)$$

est assujettie à passer par une courbe donnée

$$x = fz, \quad y = Fz,$$

il faut que les mêmes coordonnées (x, y, z) satisfassent à la fois aux trois équations précédentes; en représentant donc $y - bz$ par u, il vient

$$y - bz = u \quad \text{ou} \quad Fz - bz = u,$$

d'où l'on tire z en fonction de u, et par suite x, à cause de $x = fz$. En substituant ces deux valeurs dans $x - az$, cette quantité sera remplacée par une fonction connue ψ de u, laquelle indiquera la forme de la fonction φ puisque l'on a

$$\psi u = \varphi u.$$

Pour déterminer la forme de la fonction arbitraire dans l'équation de la surface conique, par la condition que celle-ci soit assujettie à envelopper une surface donnée et à avoir son sommet en un point donné, il faudra commencer par chercher la courbe de contact du cône et de la surface (N° 109) et assujettir la surface conique à contenir cette courbe comme on l'a fait pour les surfaces cylindriques.

La fonction arbitraire dans l'équation générale des surfaces de révolution, s'obtient par une marche analogue, connaissant la forme de la courbe génératrice. Cette courbe est encore donnée par deux équations en (x, y, z) dont l'une doit être linéaire et contenir l'axe de révolution, si, comme on le suppose, la courbe génératrice est plane. Les équations de la courbe génératrice dans l'une de ses positions sont donc

$$z + mx + ny + r = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

et on déterminera la fonction arbitraire en assujettissant cette courbe à se trouver sur la surface, ce qui se fera de la même manière que pour les surfaces cylindriques.

222. *Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et de forme quelconque.* — L'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, mais de forme quelconque, peut être ramenée à l'intégration d'une certaine équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre et dépend par conséquent de la théorie qu'on vient d'exposer; soit en effet

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

l'équation proposée. Si on la dérive par rapport à y, en remarquant que, comme p et q doivent pour plus de généralité, être considérés comme fonctions de (x, y, z), z étant fonction de x et y, les dérivées de p et q sont données par

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}\frac{dz}{dy} = \frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} \quad \text{et} \quad \frac{dq}{dy} + \frac{dq}{dz}\frac{dz}{dy} = \frac{dq}{dy} + q\frac{dq}{dz},$$

on est conduit à l'équation suivante :

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q + \frac{df}{dp}\left(\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz}\right) + \frac{df}{dq}\left(\frac{dq}{dy} + q\frac{dq}{dz}\right) = 0.$$

D'un autre côté, on a vu (N° 99) que la dérivée totale de p par rapport à y, savoir, $\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz}$, est égale à la dérivée totale de q par rapport à x, ou $\frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz}$; l'équation précédente peut donc prendre la forme

$$\frac{df}{dp}\cdot\frac{dq}{dx} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{dq}{dy} + \left(p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right)\frac{dq}{dz} = -\frac{df}{dy} - q\frac{df}{dz}.$$

Si dans $\frac{df}{dp}$, $\frac{df}{dq}$, $\frac{df}{dy}$ et $\frac{df}{dz}$ qui sont des fonctions connues de x, y, z, p, q, on remplace les p par leur valeur en (x, y, z, q) tirée de l'équation aux dérivées partielles donnée, l'équation qu'on vient de trouver ne contiendra plus que les trois dérivées partielles $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dy}$, $\frac{dq}{dz}$ sous forme linéaire, avec des coefficients fonctions de (x, y, z) et de la variable dépendante q; elle sera donc de la forme

$$P\frac{dq}{dx} + Q\frac{dq}{dy} + R\frac{dq}{dz} = S,$$

c'est-à-dire que la valeur de q en (x, y, z) peut être déduite d'une équation aux dérivées partielles du premier degré et du premier ordre à quatre variables (x, y, z, q), en donnant successivement à la fonction arbitraire φ qu'elle doit contenir toutes les formes possibles.

Après avoir donné à cette fonction φ une forme déterminée, on tirera de l'intégrale particulière, la valeur de q que l'on substituera dans la valeur de p tirée de l'équation $f(x, y, z, p, q) = 0$, et l'on sera ainsi conduit à deux équations de la forme

$$p = V, \quad q = U$$

dans lesquelles V et U sont deux fonctions connues de (x, y, z), et l'on intégrera le système de ces deux équations comme on l'a fait au N° 211. On sait que cette intégration n'est pas possible pour des valeurs arbitraires de V et U; mais il est à remarquer que la condition d'intégrabilité est ici nécessairement remplie, puisque c'est cette condition même qui est exprimée par l'équation dont on a tiré la valeur de q, condition qui consiste en ce que la dérivée de p ou V par rapport à y est égale à la dérivée de q ou U par rapport à x.

Si l'on applique ce qui précède, à l'équation :

$$p^2 + q^2 = n^2,$$

on est conduit à l'équation linéaire aux dérivées partielles en (x, y, z, q),

$$\frac{dq}{dx} + \frac{q}{\sqrt{n^2 - q^2}} \cdot \frac{dq}{dy} + \frac{n^2}{\sqrt{n^2 - q^2}} \cdot \frac{dq}{dz} = 0,$$

dont l'intégration dépend des trois équations simultanées suivantes :

$$dq = 0, \quad \frac{n^2 dx}{\sqrt{n^2 - q^2}} = dz, \quad n^2 dy = q dz.$$

La première donne

$$q = C$$

et par suite, les deux autres donnent

$$\frac{n^2 x}{\sqrt{n^2 - C^2}} = z + C', \quad n^2 y = Cz + C''.$$

Comme l'intégrale finale s'obtient en égalant C à une fonction arbitraire φ de C' et de C'', cette intégrale sera

$$q = \varphi\left(\frac{n^2 x}{\sqrt{n^2 - q^2}} - z, \quad n^2 y - qz\right)$$

que l'on obtient en tirant des trois intégrales les valeurs de C, C', C''.

Si l'on donne à la fonction φ une forme particulière telle que $\frac{n^2 y - qz}{a}$, le système des deux équations à intégrer devient

$$q = \frac{n^2 y}{a + z}, \quad p = \sqrt{n^2 - \frac{n^4 y^2}{(a + z)^2}}$$

et l'on trouve pour intégrale,

$$(nx + C)^2 + n^2 y^2 = (a + z)^2$$

qui contient une constante arbitraire C. Cette équation appartient à un cône droit à base circulaire ayant son axe parallèle à l'axe des Z.

En déterminant la fonction φ de manière qu'elle se réduise à une constante a, on trouve pour intégrale,

$$z - ay - x\sqrt{n^2 - a^2} = C$$

qui représente un plan.

On est conduit à l'équation aux dérivées partielles précédente en cherchant les surfaces qui jouissent de cette propriété, qu'une portion limitée d'une manière quelconque soit dans un rapport constant avec la projection de cette portion de surface sur le plan XY; car cette propriété exige que le rapport de l'un des éléments de la surface à la projection de cet élément soit constant, c'est-à-dire, qu'on doit avoir

$$\frac{dxdy\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{dxdy} = b, \quad \text{d'où} \quad 1 + p^2 + q^2 = b^2 \quad \text{et} \quad p^2 + q^2 = a^2,$$

en remplaçant $b^2 - 1$ par a^2. Ces surfaces en nombre infini et dont le cône et le plan qu'on vient de trouver ne sont que des cas particuliers, sont appelées *équivalentes*, parce que tous les cylindres de base équivalente élevées en un endroit quelconque du plan XY, interceptent sur ces différentes surfaces des portions de même étendue.

L'équation aux dérivées partielles

$$pq = xy$$

conduit à l'intégrale suivante en q,

$$z - qy = \varphi\left(x^2 - q^2,\ \frac{q}{y}\right),$$

et si l'on réduit la fonction φ à la forme particulière $a\dfrac{q}{y}$, il vient

$$q = \frac{zy}{a + y^2}, \quad p = \frac{x(a + y^2)}{z},$$

et l'on trouve pour intégrale de l'équation proposée,

$$z^2 = (y^2 + a)(x^2 + C).$$

223. *Solutions singulières des équations aux dérivées partielles.* — Une remarque fort simple conduit à d'autres intégrales en nombre illimité, d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et d'un degré quelconque. Supposons qu'après avoir donné à la fonction arbitraire φ du (N° 222), une forme particulière telle qu'elle contienne une constante arbitraire a, on ait trouvé comme dans le numéro précédent,

$$p = V, \quad q = U,$$

V et U étant des fonctions déterminées de (x, y, z), et qu'en intégrant le système de ces deux équations ou l'équation différentielle totale

$$dz = Vdx + Udy,$$

on soit conduit à une intégrale de la forme

$$f(x, y, z, a) = C,$$

C étant une nouvelle constante arbitraire. L'une des deux, C par exemple, pourra, par cela même qu'elle a une valeur arbitraire, être remplacée par une fonction arbitraire ψ de a et l'intégrale deviendra

$$f(x, y, z, a) = \psi a.$$

Si l'on donne à a des valeurs différentes, la fonction ψ restant la

même, cette équation représentera une suite de surfaces dans chacune desquelles les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ ou p et q satisferont à l'équation aux dérivées partielles proposée. Or, on sait qu'en éliminant a entre cette dernière et sa dérivée prise par rapport à a, savoir :

$$\frac{df}{da} = \psi' a,$$

l'équation finale en (x, y, z), quelle que soit la forme que l'on assigne à la fonction ψ, est l'équation de la surface enveloppe de toutes les surfaces représentées par l'intégrale et comme cette enveloppe est tangente à toutes les surfaces variables, son équation doit, en général, donner pour $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ les mêmes valeurs que ces dernières, valeurs qui satisferont par conséquent aussi à l'équation aux dérivées partielles. On aura donc autant de solutions que l'on voudra, en donnant à la fonction ψ des formes particulières et en éliminant ensuite a entre les deux équations

$$f(x, y, z, a) = \psi a \quad \frac{df}{da} = \psi' a.$$

Ainsi si l'on considère l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 = n^2,$$

pour laquelle on a trouvé $q = a$ et par conséquent $p = \sqrt{n^2 - a^2}$, en intégrant le système de ces deux équations, comme on l'a vu au N° 222, on trouve pour intégrale

$$z = x\sqrt{n^2 - a^2} + ay + \psi a$$

et en donnant à ψa la forme particulière $\sqrt{n^2 - a^2}$, on est conduit à cette nouvelle intégrale

$$z^2 = n^2 (x + 1)^2 + n^2 y^2.$$

En supposant la fonction ψa égale à une constante absolue b, la solution devient

$$(z - b)^2 = n^2 (x^2 + y^2).$$

De même l'équation aux dérivées partielles

$$p = (qy + z)^2$$

conduit à l'équation du premier degré et du premier ordre

$$\frac{dq}{dx} - 2y(qy+z)\frac{dq}{dy} + (z^2 - q^2y^2)\frac{dq}{dz} = 4q(qy+z)$$

et par suite, aux équations simultanées

$$dq = 4q(qy+z)\,dx,$$
$$ydq = -2qdy,$$
$$(z-qy)\,dq = 4qdz.$$

La seconde donne en intégrant,

$$q = \frac{a}{y^2}$$

et l'équation proposée conduit à la valeur suivante de p,

$$p = \left(\frac{a}{y} + z\right)^2.$$

Si l'on intègre le système de ces deux équations, on trouve pour intégrale de la proposée,

$$(zy+a)(\psi a - x) = y.$$

D'autres intégrales s'obtiendront en éliminant a entre la précédente et sa dérivée par rapport à a,

$$\psi a - x + (zy+a)\psi' a = 0,$$

après avoir assigné à la fonction ψ une forme particulière.

Les intégrales obtenues de la manière précédente, et données par les équations de surfaces enveloppes, se présentent en apparence sous forme de solutions singulières, c'est-à-dire, d'équations primitives privées de fonction arbitraire et satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles proposée; mais bien qu'on ne puisse effectuer l'élimination de a qu'après avoir donné à la fonction ψ une forme particulière, l'ensemble des deux équations n'en contient pas moins une fonction arbitraire ψ, ce qui donne à ces solutions singulières toute la généralité et le caractère des intégrales.

224. *Intégration des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs.* — Les méthodes générales pour l'intégration des équations

aux dérivées partielles d'un ordre supérieur font entièrement défaut. Ce n'est que dans certains cas particuliers et par des moyens appropriés à chaque exemple que les géomètres sont parvenus à effectuer un petit nombre d'intégrations pour lesquelles nous renverrons aux traités spéciaux et aux recueils académiques. Il y a cependant quelques cas où l'on peut faire dépendre l'intégration de celle d'équations simultanées aux différentielles totales, comme pour les équations dérivées du premier degré et du premier ordre (N° 218). Cela arrive toutes les fois que l'équation proposée est linéaire par rapport aux dérivées partielles de l'ordre le plus élevé de la variable dépendante. Prenons pour exemple l'équation du second ordre. Sa forme la plus générale est

$$Rr + Ss + Tt = U$$

dans laquelle r, s, t sont les trois dérivées du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ et R, S, T, U, des fonctions quelconques de x, y, z, p, q. A cette équation, il faut joindre les suivantes

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy.$$

En tirant de la deuxième et de la troisième les valeurs de r et t pour les substituer dans la proposée, celle-ci devient

$$Rdpdy + Tdqdx - Udxdy = s(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).$$

Or toute équation *unique* qui satisfera à la fois aux deux équations différentielles totales simultanées

$$Rdpdy + Tdqdx - Udxdy = 0,$$

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0,$$

rendra la proposée identique et en sera par conséquent l'intégrale. Soient

$$\varphi = C, \quad \psi = C'$$

les intégrales de ces équations, φ et ψ étant deux fonctions déterminées de (x, y, z, p, q) et (C, C'), deux constantes arbitraires. Pour que ces deux équations se réduisent à une équation unique, il faut et il suffit que ψ et C' soient chacune des fonctions F arbitraires, mais de même forme de φ et C, c'est-à-dire qu'il suffit que l'on ait

$$\psi = F(\varphi), \quad C' = F(C).$$

La seconde de ces conditions est toujours remplie, puisque C et C' sont arbitraires; la condition unique est donc

$$\psi = F(\varphi)$$

qui est l'intégrale de la proposée.

La seconde des équations simultanées est du second degré en dx et dy et se décompose en deux autres de la forme

$$dy = Mdx, \quad dy = Ndx$$

et il suffira d'intégrer l'un ou l'autre des deux systèmes d'équations simultanées

$$RMdp + Tdq - UMdx = 0, \quad dy - Mdx = 0$$

ou

$$RNdp + Tdq - UNdx = 0, \quad dy - Ndx = 0.$$

Prenons pour exemple

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0.$$

Les deux équations simultanées seront de la forme

$$dy - \frac{y}{x}dx = 0, \quad xdp + ydq = 0.$$

La première a pour intégrale $y = Cx$, et la seconde qui devient

$$dp + Cdq = 0$$

s'intègre immédiatement et donne

$$p + Cq = C'.$$

En tirant de celles-ci les valeurs de C et de C', on trouve pour intégrale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre proposée,

$$C' = F(C), \quad \text{c'est-à-dire}, \quad p + q\frac{y}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

L'intégrale finale s'obtiendra en intégrant de nouveau cette dernière équation, qui est du premier ordre et du premier degré. En y appliquant la méthode du N° 218, on trouve pour équations différentielles simultanées

$$xdy - ydx = 0, \quad dz - F\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0.$$

La première a encore pour intégrale $y = Cx$, et la seconde mise sous la forme

$$dz - F(C)dx = 0,$$

donne

$$z - xF(C) = C';$$

l'intégrale finale devient ainsi

$$C' = f(C), \quad \text{c'est-à-dire,} \quad z - xF\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

F et f étant deux fonctions arbitraires.

Il est à remarquer que cette marche ne conduit à l'intégrale que dans un petit nombre de cas, parce que l'intégration des équations différentielles totales simultanées auxquelles on est conduit, n'est possible que lorsqu'elles sont des différentielles exactes de fonctions en (x, y, z, p, q), ce qui n'a lieu que pour certaines valeurs de R, S, T, U, ainsi qu'on l'a vu au N° 210.

225. *Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, à coefficients constants.* — Lorsque l'équation est linéaire par rapport aux dérivées de tous les ordres et par rapport à la variable dépendante et que tous les coefficients, y compris le terme final, sont constants, l'intégrale peut s'obtenir d'une manière générale. Ces équations sont de la forme

$$\frac{d^nz}{dx^n} + a\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy} + a'\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2} \cdots\cdots + r''\frac{d^2z}{dy^2} + s\frac{dz}{dx} + s'\frac{dz}{dy} + tz + u = 0,$$

$a, a', a'' \ldots\ldots r, r', r'', s, s', t, u$ étant des constantes. On peut faire disparaître le terme final u, en remplaçant z par $z - \frac{u}{t}$, ce qui transforme l'équation dans la suivante :

$$\frac{d^nz}{dx^n} + a\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy} + a'\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2} \cdots\cdots r''\frac{d^2z}{dy^2} + s\frac{dz}{dx} + s'\frac{dz}{dy} + tz = 0.$$

Pour intégrer cette dernière, observons que

$$z = e^{mx + m'y}$$

satisfait à l'équation proposée, quel que soit m, pourvu que m' vérifie l'équation

$$m^n + am^{n-1}m' + a'm^{n-2}m'^2 \cdots\cdots + sm + s'm' + t = 0,$$

qui résulte de la substitution de $e^{mx+m'y}$ à z dans l'équation proposée. En tirant de celle-ci la valeur de m' en m et posant $m' = \psi m$, on aura pour intégrale particulière,

$$z = e^{mx+y\psi m},$$

et si ψm, $\psi' m$, $\psi'' m$ représentent les différentes valeurs de m' ou les différentes racines, les équations

$$z = e^{mx+y\psi m}, \quad z = e^{mx+y\psi' m}, \text{ etc.}$$

seront des intégrales particulières distinctes. Or, en suivant une marche analogue à celle que nous avons employée pour l'intégration des équations différentielles linéaires (N° 194), on prouvera sans peine que si $A, A', A'', \ldots\ldots B, B', B'', \ldots\ldots$ sont des constantes arbitraires et $m, m', m'', \ldots\ldots$ des valeurs quelconques attribuées à m, la valeur suivante de z

$$z = Ae^{mx+y\psi m} + A'e^{m'x+y\psi m'} + A''e^{m''x+y\psi m''} + \text{etc.}$$
$$+ Be^{mx+y\psi' m} + B'e^{m'x+y\psi' m'} + B''e^{m''x+y\psi' m''} + \text{etc.}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

satisfait également à l'équation aux dérivées partielles; de sorte que l'intégrale générale pourra se mettre sous la forme

$$z = \Sigma Ae^{mx+y\psi m} + \Sigma Be^{mx+y\psi' m} + \Sigma Ce^{mx+y\psi'' m} + \text{etc.}$$

le signe sommatoire Σ indiquant la somme de toutes les valeurs que peuvent prendre ces termes quand on attribue à A et m, B et m, etc., toutes les valeurs possibles.

Si l'équation en m et m' trouvée plus haut, donnait pour m des valeurs égales, si par exemple, les fonctions ψ et ψ' étaient identiques, l'intégrale précédente n'aurait plus toute la généralité possible. En suivant une marche semblable à celle du N° 196, on démontre que dans ce cas $z = ye^{mx+y\psi m}$ est aussi une intégrale particulière qu'il faudra joindre à la valeur de z trouvée plus haut, pour avoir l'intégrale générale.

Cette intégrale prend une forme très simple, lorsque l'équation aux dérivées partielles ne contient que les dérivées d'un même ordre n. Alors l'équation en m et m' se réduit à

$$m^n + am^{n-1}m' + a'm^{n-2}m'^2 \cdots + a^{(n-1)}m\,m'^{n-1} + a^{(n)}m'^n = 0$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante en divisant par m^n,

$$1 + a'\frac{m'}{m} + a'\left(\frac{m'}{m}\right)^2 \cdots\cdots + a^{(n-1)}\left(\frac{m'}{m}\right)^{n-1} + a^{(n)}\left(\frac{m'}{m}\right)^n = 0.$$

Cette équation étant résolue par rapport à $\frac{m'}{m}$ donnera pour cette fraction, des valeurs que nous désignerons par $r, r', r''....$; on aura donc

$$m' = rm, \quad m' = r'm, \quad m' = r''m \text{ etc.}$$

et l'intégrale générale deviendra

$$z = \Sigma A e^{mx+rmy} + \Sigma B e^{mx+r'my} + \Sigma C e^{mx+r''my} + \text{etc.}$$

que l'on peut écrire ainsi

$$z = \Sigma A(e^{x+ry})^m + \Sigma B(e^{x+r'y})^m + \Sigma C(e^{x+r''y})^m + \text{etc.}$$

Or $\Sigma A(e^{x+ry})^m$ représente la somme de toutes les puissances de la fonction e^{x+ry} multipliées respectivement par des coefficients constants arbitraires A et l'on a vu (N° 45) que toute fonction de $x + ry$ peut se développer suivant les puissances croissantes de e^{x+ry} ou de toute autre fonction de $x + ry$; d'où il suit que $\Sigma A(e^{x+ry})^m$ représente une fonction arbitraire φ de $x + ry$, comme $\Sigma B(e^{x+r'y})^m$ représente une fonction arbitraire φ' de $x + r'y$ etc. L'intégrale peut donc être mise sous la forme

$$z = \varphi(x + ry) + \varphi'(x + r'y) + \varphi''(x + r''y) + \text{etc.}$$

Par exemple pour l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2z}{dy^2} = a^2\frac{d^2z}{dx^2},$$

on trouve

$$m' = am, \quad m' = -am$$

et l'intégrale devient

$$z = \varphi(x + ay) + \varphi'(x - ay).$$

226. *Intégration par les séries. Intégration des équations linéaires à coefficients variables.* — S'il n'y a pas de méthode générale pour trouver l'intégrale complète des équations aux dérivées partielles,

exprimée par un nombre limité de termes, il n'en est plus de même de leur intégration au moyen des séries infinies. La marche suivie au N° 216 pour démontrer l'existence de cette intégrale, indique suffisamment ce qu'il faut faire pour trouver dans tous les cas cette série, ou du moins pour la faire dépendre de l'intégration d'équations différentielles totales simultanées. La méthode des coefficients indéterminés fournit un autre procédé ordinairement plus expéditif. Soit à intégrer

$$\frac{d^2z}{dx^2}=a\frac{dz}{dy}.$$

Supposons l'intégrale, quelle qu'elle soit, développée suivant les puissances ascendantes et entières de x et mise par conséquent sous la forme

$$z=Y+Y'x+Y''x^2+Y'''x^3+\text{etc.}$$

Y, Y'.... ne pourront être que des fonctions de y que l'on déterminera en substituant à z la valeur précédente dans l'équation dérivée donnée et en égalant ensuite les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. On est conduit ainsi aux équations

$$Y''=\frac{a}{1.2}\frac{dY}{dy},\quad Y'''=\frac{a}{2.3}\frac{dY'}{dy},\quad Y''''=\frac{a}{3.4}\frac{dY''}{dy}.....$$

On voit par là que les deux premiers coefficients Y et Y' restent indéterminés et que les autres sont exprimés en fonction de Y et Y' et de ses dérivées. L'intégrale a donc la forme suivante :

$$z=\varphi y+x\psi y+\frac{ax^2}{1.2}\varphi' y+\frac{ax^3}{1.2.3}\psi' y+\frac{a^2x^4}{1.2.3.4}\varphi'' y+\frac{a^2x^5}{1.2.3.4.5}\psi'' y+\text{etc.}$$

en remplaçant Y et Y' par φy et ψy et en désignant par φ', ψ' etc., les dérivées de ces fonctions.

Ce procédé peut s'appliquer à toute équation aux dérivées partielles, quelle que soit sa forme; mais il est particulièrement commode pour l'intégration des équations linéaires, que les coefficients soient constants comme dans l'exemple précédent ou qu'ils soient variables. Ainsi pour l'équation

$$\frac{d^2z}{dxdy}=x\frac{d^2z}{dy^2},$$

on posera encore

$$z = Y + Y'x + Y''x^2 + Y'''x^3 + \text{etc.}$$

et l'on sera conduit aux équations de condition

$$\frac{dY'}{dy} = 0, \quad 2\frac{dY''}{dy} = \frac{d^2Y}{dy^2}, \quad 3\frac{dY'''}{dy} = \frac{d^2Y'}{dy^2},$$

$$4\frac{dY''''}{dy} = \frac{d^2Y''}{dy^2}, \quad 5\frac{dY'''''}{dy} = \frac{d^2Y'''}{dy^2}, \quad \text{etc.}$$

d'où l'on tire

$$Y = \varphi y, \quad Y' = C, \quad Y'' = \frac{1}{2}\varphi' y + C', \quad Y''' = C'', \quad Y'''' = \frac{1}{2.4}\varphi'' y + C'''$$

$Y''''' = C''''$, etc.;

l'intégrale est donc de la forme

$$z = \varphi y + \frac{x^2}{2}\varphi' y + \frac{x^4}{2.4}\varphi'' y + \frac{x^6}{2.4.6}\varphi''' y + \text{etc.}$$

$$+ Cx + C'x^2 + C''x^3 + C'''x^4 + \text{etc.},$$

ou plutôt

$$z = \varphi y + \psi x + \frac{x^2}{2}\varphi' y + \frac{x^4}{2.4}\varphi'' y + \frac{x^6}{2.4.6}\varphi''' y + \text{etc.}$$

dans laquelle φ et ψ sont deux fonctions arbitraires l'une en y et l'autre en x.

CHAPITRE XVII.

Détermination de quelques intégrales définies. Procédé fondé sur la dérivation sous le signe. — Procédé fondé sur l'intégration sous le signe. — Procédé fondé sur l'intégration par parties. — Procédé fondé sur le développement en série. — Procédé fondé sur l'emploi des intégrales doubles. — Procédé fondé sur l'intégration indéfinie d'une certaine différentielle. — Procédé fondé sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. — Procédé fondé sur le passage du réel à l'imaginaire. — Formule de Cauchy. — Autre formule de Cauchy. — Intégrales définies discontinues. — Intégrale eulérienne de seconde espèce. — Intégrale eulérienne de première espèce. — Expressions des fonctions par des intégrales définies doubles. — Application de la formule de Fourier à la recherche de quelques integrales.

227. *Détermination de quelques intégrales définies. Procédé fondé sur la dérivation sous le signe.* — On a vu (N° 141) que l'intégrale définie d'une différentielle donnée se déduit en général de son intégrale indéfinie; mais on peut aussi dans certains cas, à la vérité peu nombreux, trouver l'intégrale définie de certaines différentielles, quoique l'intégrale indéfinie ne soit pas connue ou du moins, sans faire usage de cette intégrale.

Le premier procédé est fondé sur la *dérivation sous le signe*, et consiste à dériver une intégrale définie connue par rapport à une constante littérale contenue dans la différentielle. Supposons que l'on ait

$$\int_m^n f(x, \alpha)\, dx = F\alpha,$$

m et n étant deux limites invariables et indépendantes de la constante α comprise dans la différentielle $f(x, \alpha)\,dx$ et dans l'intégrale définie connue $F\alpha$. Comme α est quelconque, on peut le remplacer par $\alpha + i$ et écrire

$$\int_m^n f(x, \alpha + i)\,dx = F(\alpha + i).$$

En retranchant membre à membre la précédente et divisant par i, il vient

$$\int_m^n \frac{f(x, \alpha + i) - f(x, \alpha)}{i}\,dx = \frac{F(\alpha + i) - F\alpha}{i},$$

et si l'on fait converger i vers zéro comme à la fin du N° 207, on trouve enfin

$$\int_m^n \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha}\,dx = \frac{dF\alpha}{d\alpha}.$$

En comparant celle-ci à l'équation primitive, on voit que *pour dériver une intégrale définie à limites constantes, par rapport à* α, *il suffit, comme pour les intégrales indéfinies* (N° 207), *de dériver sous le signe d'intégration.*

En dérivant de nouveau les deux membres par rapport à α, on a aussi

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2} = \int_m^n \frac{d^2f}{d\alpha^2}\,dx$$

et si les fonctions F et f renferment deux constantes littérales indépendantes α et β, on voit sans peine que l'on peut poser

$$\frac{d^2F(\alpha, \beta)}{d\alpha d\beta} = \int_m^n \frac{d^2f(\alpha, \beta)}{d\alpha d\beta}\,dx, \ldots.$$

Si m et n étaient fonctions de α, la dérivée s'obtiendrait de cette manière : $F(x, \alpha)$ étant l'intégrale indéfinie de $f(x, \alpha)\,dx$, l'intégrale définie $\int_m^n f(x, \alpha)\,dx$ sera donnée par $F(n, \alpha) - F(m, \alpha)$ et sa dérivée par rapport à α sera

$$\frac{dF(n, \alpha)}{d\alpha} + \frac{dF(n, \alpha)}{dn}\frac{dn}{d\alpha} - \frac{dF(m, \alpha)}{d\alpha} - \frac{dF(m, \alpha)}{dm}\frac{dm}{d\alpha}.$$

Or, $\frac{dF(n,\alpha)}{d\alpha}-\frac{dF(m,\alpha)}{d\alpha}$ ou $\frac{d[F(n,\alpha)-F(m,\alpha)]}{d\alpha}$ n'est autre chose que la dérivée de l'intégrale définie $F(x,\alpha)$, prise en considérant m et n comme constants, c'est-à-dire, $\int_m^n \frac{df}{d\alpha}dx$, tandis que $\frac{dF(n,\alpha)}{dn}$ et $\frac{dF(m,\alpha)}{dm}$ sont les valeurs de $\frac{dF(x,\alpha)}{dx}$, quand x est égalé à n ou à m, c'est-à-dire, $f(n,\alpha)$ et $f(m,\alpha)$; on trouve donc pour la dérivée de $\int_m^n f(x,\alpha)\,dx$ par rapport à α,

$$\int_m^n \frac{df}{d\alpha}dx+\frac{dn}{d\alpha}f(n,\alpha)-\frac{dm}{d\alpha}f(m,\alpha)$$

dans laquelle $\frac{dn}{d\alpha}$ et $\frac{dm}{d\alpha}$ sont connus, puisqu'on connait m et n.

Prenons pour exemple l'intégrale définie connue, a étant positif,

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx=\frac{1}{a}\cdot$$

Si l'on dérive les deux membres par rapport à a, on est conduit à cette nouvelle intégrale définie

$$\int_0^\infty xe^{-ax}dx=\frac{1}{a^2}$$

et en dérivant n fois de suite, on trouve

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx=\frac{1.2.3\ldots.n}{a^{n+1}},$$

dans laquelle a est quelconque, mais positif, et n un nombre entier et positif.

En dérivant de même les intégrales connues

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a},\quad \int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1},$$

on est conduit à ces intégrales définies plus générales,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots\; n}\,\frac{\pi}{2^{n+1}a^{2n+1}}, \quad \int_0^1 x^m \log^n x\,dx = \pm\frac{1.2.3\ldots.n}{(m+1)^{n+1}}$$

dans lesquelles n est nécessairement un nombre entier. On prendra le signe supérieur ou le signe inférieur selon que n est pair ou impair.

Pour $m = 0$, il vient

$$\int_0^1 \log^n x\,dx = \pm\, 1.2.3\ldots..n.$$

Considérons encore l'intégrale définie suivante facile à trouver,

$$\frac{1}{a}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \int_{-\frac{1}{a}}^{+\frac{1}{a}} e^{-ax}\,dx.$$

Si l'on dérive les deux membres par rapport à a en remarquant que les limites sont des fonctions de cette quantité, on trouve

$$-\frac{1}{a^2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = -\int_{-\frac{1}{a}}^{+\frac{1}{a}} xe^{-ax}\,dx - \frac{1}{a^2}e^{-1} - \frac{1}{a^2}e,$$

d'où l'on tire la valeur de cette nouvelle intégrale définie,

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{+\frac{1}{a}} xe^{-ax}\,dx = -\frac{2}{a^2 e}.$$

En dérivant de nouveau par rapport à a, il viendrait

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{+\frac{1}{a}} x^2 e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^3}\left(e - \frac{5}{e}\right).$$

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{+\frac{1}{a}} x^3 e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^4}\left(2e - \frac{16}{e}\right).$$

228. *Procédé fondé sur l'intégration sous le signe.* — Si au lieu de dériver les deux membres de l'équation par rapport à une des constantes, on multiplie les deux membres par la différentielle de celle-ci et qu'on intègre ensuite, ce qui revient à prendre de part et d'autre une somme de quantités égales, on obtiendra de nouvelles intégrales définies; ainsi, en multipliant par da, on trouve

$$da\int_0^\infty e^{-ax}dx, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \int_0^\infty dx e^{-ax}da = \frac{da}{a},$$

et en intégrant par rapport à a entre les limites b et c, il vient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-cx}}{x}dx = \log\frac{c}{b}.$$

En multipliant les deux membres de l'équation

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

par $2a\,da$ et intégrant depuis $a=b$ jusqu'à $a=c$, on trouve de même

$$\int_0^\infty \log\frac{x^2+b^2}{x^2+c^2}dx = \pi(b-c).$$

Ce procédé n'est admissible que lorsque la différentielle reste finie et continue pour des valeurs de a comprises entre les limites de l'intégration.

229. *Procédé fondé sur l'intégration par parties.* — Quelquefois une intégration par parties conduit à des relations entre certaines intégrales définies, au moyen desquelles celles-ci peuvent être déterminées. Prenons pour exemples les deux intégrales $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx dx$ et $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx$ que nous représenterons par m et n. En intégrant par parties, il vient

$$\int e^{-ax}\sin bx dx = -\left(e^{-ax}\frac{\cos bx}{b}\right) - \int\frac{\cos bx}{b}ae^{-ax}dx$$

$$\int e^{-ax}\cos bx dx = \left(e^{-ax}\frac{\sin bx}{b}\right) + \int\frac{\sin bx}{b}ae^{-ax}dx.$$

Si l'on prend ces intégrales entre les limites 0 et ∞, en remarquant que pour $x=0$, $e^{-ax}\frac{\cos bx}{b}$ et $e^{-ax}\frac{\sin bx}{b}$ se réduisent respectivement à $\frac{1}{b}$ et 0, et que pour $x=\infty$, elles se réduisent toutes deux à zéro, pourvu que a soit positif et ne soit pas nul, on trouve en remettant pour ces intégrales leur valeur m et n,

$$n=\frac{a}{b}m, \quad m=\frac{1}{b}-\frac{a}{b}n,$$

d'où l'on tire

$$m=\frac{b}{a^2+b^2}, \quad n=\frac{a}{a^2+b^2},$$

c'est-à-dire que l'on a pour toute valeur positive de a et tant que a n'est pas nul,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

230. *Procédé fondé sur le développement en série.* — Le développement des fonctions en série conduit quelquefois aux valeurs de certaines intégrales définies. Soit la série supposée convergente

$$fx=a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}$$

Remplaçons x par $pe^{z\sqrt{-1}}$ ou $p(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)$; il vient

$$f(pe^{z\sqrt{-1}})=a+bpe^{z\sqrt{-1}}+cp^2e^{2z\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

dont le second membre est encore convergent, pourvu que p soit inférieur à la plus grande valeur qu'il est permis de donner à x, ou pourvu que

$$a+bp+cp^2+dp^3+\text{etc.}$$

soit convergent, parce que en remplaçant les quantités exponentielles par leur valeur trigonométrique, le second membre prend la forme

$$a+bp\cos z+cp^2\cos 2z+dp^3\cos 3z+\text{etc.}$$

$$+\sqrt{-1}\,(bp\sin z+cp^2\sin 2z+dp^3\sin 3z+\text{etc.})$$

et que ces deux séries sont convergentes lorsque $a + bp + cp^2 + dp^3 +$ etc., se trouve dans ce cas, d'après ce qu'on a vu au N° 36.

Si l'on multiplie les deux membres par $e^{-iz\sqrt{-1}}\,dz$, i étant un nombre entier et positif quelconque, et qu'on intègre entre les limites 0 et 2π, tous les termes du second membre disparaîtront, puisque l'on a, quelle que soit la valeur de n,

$$\int_0^{2\pi} e^{nz\sqrt{-1}}dz = 0.$$

Un seul terme du second membre fera exception; c'est celui où l'exposant de x est égal à i et qui a pour coefficient $\left(\frac{d^if}{dx^i}\right)_0 \frac{1}{1.2.3.....i}$. L'intégrale de ce terme est

$$\left(\frac{d^if}{dx^i}\right)_0 \frac{2\pi p^i}{1.2.3.....i}.$$

Il vient donc

$$\int_0^{2\pi} e^{-iz\sqrt{-1}} f(pe^{z\sqrt{-1}})\,dz = \left(\frac{d^if}{dx^i}\right)_0 \frac{2\pi\, p^i}{1.2.3....\, i}.$$

Si le nombre i était négatif, il est visible que tous les termes du second membre sans exception seraient nuls.

Prenons pour exemple la fonction $\frac{1}{a-x} = (a-x)^{-1}$ qui est développable en série convergente, pourvu que x soit plus petit que a. On trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-iz\sqrt{-1}}}{a - pe^{z\sqrt{-1}}dz} = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{p}{a}\right)^i,$$

pourvu que p soit inférieur à a.

Comme $\sqrt{-1}$ a deux valeurs, on peut remplacer $+\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$ et il vient encore

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{iz\sqrt{-1}}\,dz}{a - pe^{-z\sqrt{-1}}} = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{p}{a}\right)^i.$$

En additionnant et retranchant successivement ces deux intégrales, après avoir remplacé $e^{z\sqrt{-1}}$ par sa valeur trigonométrique, on trouve ces deux nouvelles intégrales définies dans lesquelles i est un nombre entier et positif,

$$\int_0^{2\pi} \frac{a\cos iz - p\cos(i+1)z}{a^2 - 2ap\cos z + p^2}dz = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{p}{a}\right)^i,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{a\sin iz - p\sin(i+1)z}{a^2 - 2ap\cos z + p^2}dz = 0.$$

Pour $i = 0$, la première devient

$$\int_0^{2\pi} \frac{a - p\cos z}{a^2 - 2ap\cos z + p^2}dz = \frac{2\pi}{a}.$$

En multipliant les deux membres par $2da$, puis intégrant depuis $a = a$ jusqu'à $a = \infty$, on est conduit à l'intégrale définie suivante

$$\int_0^{2\pi} \log(a^2 - 2ap\cos z + p^2)\,dz = 4\pi\log a.$$

231. *Procédé fondé sur l'emploi des intégrales doubles.* — L'emploi des intégrales doubles conduit à une intégrale définie remarquable. Représentons par A l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, et par y une autre variable indépendante de x. Si l'on remplace x par ay, a étant une quantité quelconque positive, et dx par ady, et qu'on intègre $e^{-(ay)^2}ady$ par rapport à y, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-(ay)^2}ady$ sera aussi égale à A, parce que, quelle que soit la valeur de a, ay passe par toutes les valeurs comprises entre 0 et l'infini, quand y varie depuis zéro jusqu'à l'infini; on a donc, en multipliant les deux intégrales et remplaçant a par x,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx.\ \int_0^\infty e^{-x^2y^2}xdy = A^2,$$

qu'on peut écrire de la manière suivante, comme on l'a fait pour les intégrales doubles, attendu que les variables x et y sont indépendantes,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-(x^2+x^2y^2)} dx\, dy = A^2,$$

ou bien

$$A^2 = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-x^2(1+y^2)} x dx = \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-z(1+y^2)} dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{4}\pi,$$

et par conséquent,

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

La racine positive de π peut seule convenir, parce que $e^{-x^2}dx$ reste positif pour toute valeur de x et que par conséquent l'intégrale est nécessairement positive.

On trouve ainsi

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-a^2x^2} a dx = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

232. *Procédé fondé sur l'intégration indéfinie d'une certaine différentielle.* — On peut dans certains cas faire dépendre la recherche d'une intégrale définie, de l'intégration indéfinie d'une certaine différentielle. Soit, par exemple,

$$A = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx dx.$$

A est une fonction de b; et en dérivant les deux membres par rapport à b, il vient,

$$\frac{dA}{db} = -\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \sin bx.x dx;$$

or, si l'on intègre par parties, on trouve

$$\int \sin bx\, e^{-a^2x^2}\, xdx = -\sin bx \frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2} + \int \frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2} \cos bx bdx$$

et en prenant cette intégrale indéfinie entre les limites 0 et ∞, on aura, en remarquant que le terme hors du signe est nul à ces deux limites, pourvu que a ne soit pas nul,

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \sin bx xdx = + \int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2} \cos bx bdx = + \frac{b}{2a^2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx dx.$$

On a donc

$$\frac{dA}{db} = -\frac{b}{2a^2} A.$$

Cette équation différentielle intégrée, donne

$$\log A = -\frac{b^2}{4a^2} + \log C, \quad \text{ou} \quad A = Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

La constante C qui est indépendante de b, se détermine en remarquant que, lorsqu'on fait $b = 0$ dans l'équation

$$A = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx dx,$$

on trouve, d'après ce qu'on a vu (N° 231),

$$A = \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\, dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \times adx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a};$$

d'où il suit qu'en faisant $b = 0$ dans l'équation

$$A = Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

on doit avoir

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a} = C.$$

On est donc conduit à cette intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

Si cette intégrale devait être prise entre les limites $+\infty$ et $-\infty$, il suffirait de doubler la valeur trouvée plus haut; car $e^{-a^2x^2}\cos bx$ ne changeant pas quand on remplace $+x$ par $-x$, il est visible que la différentielle passe par des valeurs identiquement les mêmes lorsque x varie entre 0 et $+\infty$ et lorsque x varie entre 0 et $-\infty$.

Pour ce qui est de la différentielle $e^{-a^2x^2}\sin bx dx$, si l'intégrale devait être prise entre les limites $+\infty$ et $-\infty$, on reconnaît sans calcul que l'intégrale définie est nulle; car en remplaçant x par $-x$, la différentielle change de signe en passant par les mêmes valeurs; d'où il résulte que la somme de ces valeurs entre 0 et $+\infty$ est la même que la somme entre 0 et $-\infty$, mais de signe différent et par conséquent la somme totale entre $+\infty$ et $-\infty$ est nulle. Cette remarque peut servir dans un assez grand nombre de cas à reconnaître la valeur d'une intégrale définie.

Les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\sin^2 bx dx, \quad \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos^2 bx dx$$

que nous désignerons par u et v, s'obtiennent en remarquant qu'en les additionnant et les retranchant successivement, il vient

$$u + v = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx, \quad v - u = \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2bx dx.$$

Or on sait qu'on a

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{a^2}};$$

il vient donc

$$u + v = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad v - u = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{a^2}}$$

et par conséquent

$$u=\frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left(1-e^{-\frac{b^2}{a^2}}\right),\quad v=\frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left(1+e^{-\frac{b^2}{a^2}}\right).$$

233. *Procédé fondé sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles.* — Quelquefois la détermination d'une intégrale définie peut être ramenée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles; soit en effet

$$u=\int_m^n e^{-a^2x^2}\sin bxdx.$$

On tire de là, si m et n sont indépendants de b et de a,

$$\frac{d^2u}{db^2}=-\int_m^n e^{-a^2x^2}\sin bxx^2dx,$$

$$\frac{du}{da}=-2a\int_m^n e^{-a^2x^2}\sin bxx^2dx,$$

d'où l'on déduit sans peine

$$2a\frac{d^2u}{db^2}-\frac{du}{da}=0,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{d^2u}{db^2}=\frac{du}{2ada},$$

ou bien, en remplaçant a^2 par c,

$$\frac{d^2u}{db^2}=\frac{du}{dc},$$

dont l'intégrale fera connaître u, c'est-à-dire, l'intégrale définie cherchée. Elle a été traitée au N° 226 où l'on a trouvé

$$u=\varphi a^2+b\psi a^2+\frac{b^2}{1.2}\varphi' a^2+\frac{b^3}{1.2.3}\psi' a^2+\frac{b^4}{1.2.3.4}\varphi'' a^2+\text{etc.}$$

La forme de la fonction arbitraire φ se détermine par la remarque que

pour $b=0$, l'intégrale est nulle, et par conséquent la fonction φ est nulle, ainsi que ses dérivées φ', φ'',... Quant à la fonction ψ, on remarquera que comme pour $b=0$, $\frac{du}{db}=\int_m^n e^{-a^2x^2}\cos bx.xdx$ devient

$$\int_m^n e^{-a^2x^2}xdx=\frac{1}{2a^2}(e^{-a^2m^2}-e^{-a^2n^2}),$$

on doit avoir

$$\psi=\frac{1}{2a^2}(e^{-a^2m^2}-e^{-a^2n^2}),$$

et par conséquent

$$\psi'=\frac{a^2n^2+1}{2a^4}e^{-a^2n^2}-\frac{a^2m^2+1}{2a^4}e^{-a^2m^2},\quad \psi''=\text{etc.}$$

la dérivée étant prise par rapport à $c=a^2$.

234. *Procédé fondé sur le passage du réel à l'imaginaire.* — Le passage des quantités réelles aux quantités imaginaires, au moyen de la formule symbolique d'Euler, peut souvent être employé utilement pour ramener certaines intégrales définies à d'autres déjà connues; par exemple, pour intégrer

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{ax}dx,$$

on remplacera e^{ax} par $\cos(a\sqrt{-1})x-\sqrt{-1}\sin(a\sqrt{-1})x$, et l'on aura à chercher les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(a\sqrt{-1})xdx-\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin(a\sqrt{-1})xdx.$$

Or, en remplaçant b par $a\sqrt{-1}$, on a trouvé (N° 232)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(a\sqrt{-1})xdx=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{a^2}{4}},\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin(a\sqrt{-1})xdx=0;$$

on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ax} dx = \sqrt{\pi} e^{\frac{a^2}{4}}.$$

Il est à remarquer que ce moyen ne peut être employé qu'avec circonspection, parce qu'il est souvent en défaut, ce qui arrive toutes les fois que la transformation a pour effet d'altérer la continuité de la fonction.

235. *Formule de Cauchy.* — On trouve encore un grand nombre d'intégrales définies au moyen de la formule suivante due à Cauchy :

$$fa = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{\pm y\sqrt{-1}})\, dy,$$

laquelle représente toute fonction fa au moyen d'une intégrale définie d'une forme déterminée. On la démontre facilement en développant en série $f(a + re^{\pm y\sqrt{-1}})$, ce qui donne

$$fa + re^{\pm y\sqrt{-1}} f'a + \frac{r^2 e^{\pm 2y\sqrt{-1}}}{1.2} f''a + \text{etc.},$$

série dont la convergence est assurée si r est tel que $f(a+r)$ est développable en série convergente, car on peut mettre celle-ci sous la forme

$$fx + rf'a \cos y + \frac{r^2 f''a}{1.2} \cos 2y + \text{etc.}$$

$$\pm \sqrt{-1}\left(rf'a \sin y + \frac{r^2 f''a}{1.2} \sin 2y + \text{etc.}\right)$$

qui se compose de deux séries convergentes (N° 230) si le développement de $f(a + r)$, c'est-à-dire,

$$fa + rf'a + \frac{r^2}{1.2} f''a + \text{etc.}$$

est lui-même convergent. Ceci posé, on a identiquement

$$f(a + re^{\pm y\sqrt{-1}}) = fa + rf'ae^{\pm y\sqrt{-1}} + \frac{r^2 f''a}{1.2} e^{\pm 2y\sqrt{-1}} + \text{etc.}$$

et si l'on multiplie par dy et qu'on intègre les deux membres par rapport à y entre les limites 0 et 2π, en observant, comme au N° 230, que

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm ny\sqrt{-1}}\, dy$$

est nul pour toute valeur entière de n depuis $n = 1$, on est conduit à l'équation suivante

$$\int_0^{2\pi} f(a + re^{\pm y\sqrt{-1}})\, dy = 2\pi fa$$

qui est la formule indiquée. Elle serait encore vraie si r était imaginaire et de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, pourvu que le module $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ fût inférieur à la limite que nous avons assignée plus haut à la valeur de r. Si l'on suppose $fa = \log a$, il vient

$$\int_0^{2\pi} \log(a + re^{\pm y\sqrt{-1}})\, dy = 2\pi \log a.$$

On déduit de là

$$\int_0^{2\pi} \log(a + re^{y\sqrt{-1}})\, dy + \int_0^{2\pi} \log(a + re^{-y\sqrt{-1}})\, dy \quad \text{ou}$$

$$\int_0^{2\pi} \log\left\{(a + re^{y\sqrt{-1}})(a + re^{-y\sqrt{-1}})\right\} dy = 4\pi \log a$$

et en effectuant la multiplication, on est conduit à l'intégrale définie trouvée déjà plus haut,

$$\int_0^{2\pi} \log(a^2 + 2ar\cos y + r^2)\, dy = 4\pi \log a,$$

pourvu que $\log(a + r)$ soit développable en série convergente, c'est-à-dire, pourvu que r soit plus petit que a (N° 36).

236. *Autre formule de Cauchy.* — Cauchy a encore démontré une seconde formule qui conduit à la plupart des intégrales définies connues. Supposons que l'on ait

$$\int fz dz = \varphi z + C;$$

on aura encore, en remplaçant z par $x + y\sqrt{-1}$,

$$\int f(x + y\sqrt{-1})\, d(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(x + y\sqrt{-1}) + C.$$

Si l'on suppose x variable et y constant, le premier membre se réduit à $\int f(x + y\sqrt{-1})dx$, et dans le second membre C sera une fonction ψ de y, tandis qu'en supposant x constant et y variable, le premier membre devient $\sqrt{-1}\int f(x + y\sqrt{-1})\,dy$ et dans le second, C sera une fonctiou ψ' de x. En égalant les deux valeurs de l'intégrale φ prises entre des limites quelconques, il vient donc

$$\sqrt{-1}\int f(x + y\sqrt{-1})\,dy - \psi'x = \int f(x + y\sqrt{-1})\,dx - \psi y.$$

Pour prendre l'intégrale définie par rapport à y, entre les limites 0 et ∞, il faut dans la valeur de l'intégrale indéfinie faire successivement y égal à chacune de ces valeurs extrêmes et prendre la différence des deux résultats; il vient ainsi

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty f(x+y\sqrt{-1})\,dy = \int[f(x+\infty\sqrt{-1}) - fx]\,dx - \psi\infty + \psi 0.$$

Supposons la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ telle qu'elle s'évanouisse pour $y = \infty$, l'équation précédente devient alors

$$\int fx dx = -\sqrt{-1}\int_0^\infty f(x + y\sqrt{-1})\,dy - \psi\infty + \psi 0.$$

Prenons maintenant l'intégrale du premier membre se rapportant à x, entre deux limites X et $-X$. On trouvera de même, pourvu qu'entre ces limites $f(x + y\sqrt{-1})$ reste fini et continu,

$$\int_{-X}^{+X} fx dx = -\sqrt{-1}\int_0^\infty \left\{ f(X+y\sqrt{-1}) - f(-X+y\sqrt{-1}) \right\} dy.$$

Soit L la limite vers laquelle converge $x.fx$ ou $-xf(-x)$ quand x converge vers l'infini. L sera aussi la limite de $(x+y\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})$, puisqu'on peut l'écrire ainsi $x\left(1 + \frac{y}{x}\sqrt{-1}\right) f\left\{ x\left(1+\frac{y}{x}\sqrt{-1}\right) \right\}$,

fonction qui, à la limite, devient $xfx = \infty f \infty$. Les fonctions $f(X + y\sqrt{-1})$ et $f(-X + y\sqrt{-1})$ convergeront donc vers $\frac{L}{X + y\sqrt{-1}}$ et $\frac{L}{-X + y\sqrt{-1}}$, quand X convergera vers l'infini et l'équation précédente convergera vers la suivante

$$\int_{-X}^{+X} fxdx = -L\sqrt{-1}\int_0^\infty \left(\frac{1}{X + y\sqrt{-1}} - \frac{1}{-X + y\sqrt{-1}}\right) dy$$

$$= -L\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{2Xdy}{X^2 + y^2},$$

c'est-à-dire,

$$\int_{-X}^{+X} fxdx = -2L\sqrt{-1} \text{ arc tang} \frac{\infty}{X} = -\pi L\sqrt{-1},$$

et en passant à la limite, on aura rigoureusement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} fxdx = -\pi L\sqrt{-1}.$$

Prenons pour exemple, la fonction $\frac{e^{ax\sqrt{-1}} - e^{-a}}{1 + x^2}$. En y remplaçant x par $x + y\sqrt{-1}$, on reconnait 1°, qu'elle est nulle pour $y = \infty$; 2°, que le produit xfx ou $-xf(-x)$ est nul pour $x = \infty$, et 3°, que la fonction reste finie et continue pour toute valeur de x comprise entre $+\infty$ et $-\infty$, et pour toute valeur de y comprise entre 0 et ∞; car si pour $x = 0$ et $y = 1$ le dénominateur est égal à zéro, il en est de même du numérateur. Il est visible que L est ici nul et l'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}} - e^{-a}}{1 + x^2} dx = 0,$$

d'où l'on tire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax + \sqrt{-1}\sin ax}{1 + x^2} dx = e^{-a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi e^{-a},$$

et en séparant la partie réelle de la partie imaginaire, on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos axdx}{1+x^2} = \pi e^{-a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin axdx}{1+x^2} = 0.$$

257. *Intégrales définies discontinues.* — En multipliant par db les deux membres des intégrales de la fin du N° 229 et intégrant entre les limites $b=0$ et $b=b$, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cos bx}{x}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}dx}{x} + \log\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}dx = \text{arc tang}\,\frac{b}{a}.$$

Ces équations étant vraies quelque petite que soit la valeur de a, et les différentielles restant finies et continues lorsque a s'évanouit, on peut faire converger cette lettre vers zéro et à la limite on est conduit aux intégrales suivantes (*)

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x}dx = \log 0 + \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \log 0 + \log\infty - \log 0 = \infty,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx = \text{arc tang}\,\frac{b}{0} = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Dans cette seconde intégrale, le signe + doit être employé quand b est positif et le signe — quand b est négatif. Si b était nul, aucune de ces deux valeurs ne conviendrait, car si l'on fait à la fois a et b nuls, arc tang $\frac{b}{a}$ se présente sous forme indéterminée. Il est visible

(*) Il est à remarquer que dans les intégrales de la fin du N° 229 on ne pourrait pas faire $a=0$ parce que les valeurs $\cos bxdx$ et $\sin bxdx$ auxquelles se réduisent les deux différentielles, étant indéterminées pour $x=\infty$, les sommes des valeurs des différentielles ou les intégrales doivent l'être également. Cette impossibilité n'existe plus dans les deux nouvelles intégroles, attendu que $\frac{\cos bx}{x}$ et $\frac{\sin bx}{x}$ sont nuls pour $x=\infty$,

du reste que pour b égal à zéro, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$ devient $\int_0^\infty \frac{0.dx}{x}$ c'est-à-dire qu'elle est nulle. Cette intégrale présente donc cette circonstance remarquable que, si l'on fait varier b depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, sa valeur sera $-\frac{\pi}{2}$ tant que b sera négatif, pour devenir brusquement zéro quand b sera nul et passer brusquement à la valeur $+\frac{\pi}{2}$ quand b prendra une valeur positive quelconque. Cette intégrale est dite pour ce motif, *discontinue.*

La même intégrale conduit à la valeur de $\int_0^\infty \frac{\cos ax \sin bx}{x}\,dx$; car on a

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax \sin bx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(b+a)x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(b-a)x}{x}\,dx$$

et le second membre devient $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=0$, ou enfin $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$, selon que $b-a$ est positif, négatif ou nul. L'intégrale cherchée est donc $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ ou 0, selon que b est plus grand, égal ou plus petit que a. Cette intégrale est discontinue comme la précédente.

258. *Intégrale eulérienne de seconde espèce.* — Occupons-nous encore de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx$, que l'on peut mettre sous l'une des formes

$$\int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{p-1} dy,\quad 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2p-1}dy,\quad \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\sqrt[p]{y}}\,dy,$$

en remplaçant x par $\log\frac{1}{y}$, par y^2 et par $\sqrt[p]{y}$, et dans laquelle nous supposerons p positif, mais quelconque. Comme cette intégrale est une

fonction de p, nous la désignerons par $\Gamma(p)$. En intégrant par parties entre les limites indiquées, on trouve

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x}x^p\,dx,$$

tandis que pour p négatif, le même procédé aurait conduit à une valeur infinie. Comme l'intégrale du second membre est semblable à la première en remplaçant p par $p+1$, on pourra représenter celle-ci par $\Gamma(p+1)$ et l'équation précédente apprend que l'on a

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p},$$

ou en changeant p en $p-1$,

$$\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1).$$

Cette relation subsiste pour toute valeur de p; on peut donc poser

$$\Gamma(p-1) = (p-2)\,\Gamma(p-2), \quad \Gamma(p-2) = (p-3)\,\Gamma(p-3),$$

$$\Gamma(p-n+1) = (p-n)\,\Gamma(p-n)$$

et par conséquent en substituant,

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)(p-3)\ldots\ldots(p-n)\,\Gamma(p-n).$$

Si n est le plus grand nombre entier contenu dans p, et ε le reste, $\Gamma(p-n)$ répondra à un exposant de x fractionnaire et négatif $\varepsilon-1$ dans $e^{-x}x^{p-1}\,dx$, et la valeur de $\Gamma(p)$ prendra la forme

$$\Gamma(p) = \varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)\ldots\ldots(p-2)(p-1)\,\Gamma(\varepsilon),$$

qui fait dépendre la valeur de l'intégrale définie cherchée, d'une intégrale toute semblable $\Gamma\varepsilon$, mais dans laquelle p est compris entre zéro et l'unité. Cette dernière intégrale doit se calculer par les méthodes d'approximation, pour toute valeur fractionnaire de ε et les résultats consignés dans des tables servent à déterminer $\Gamma(p)$ pour une valeur quelconque de p. Si ε est égal à $\frac{1}{2}$, l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ représente $2\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$. Pour $\varepsilon = 1$, elle prend la forme

$\Gamma(1) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y\,dy = 1$; on voit donc que, pour toute valeur entière et positive de p, on a

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx = 1.2.3\ldots\ldots(p-1),$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu au N° 227. L'intégrale dont on vient de s'occuper est connue sous le nom d'*intégrale eulérienne de seconde espèce* ou *fonction gamma.*

259. *Intégrale eulérienne de première espèce.* — Considérons encore les intégrales définies suivantes connues sous le nom d'*intégrales Eulériennes de première espèce,*

$$\int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p-1}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{y^{q-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}}$$

dont la première rentre dans la seconde en changeant x en $\dfrac{1}{y+1}$. Il résulte de ce qu'on a vu au numéro précédent, que l'on a, p et q étant positifs,

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1}\,dx, \quad \Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1}\,dy.$$

Si dans la seconde, on change, comme au N° 251, y en xy, on aura aussi pour toute valeur positive de x,

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2y^2} y^{2q-1} x^{2q-1} x\,dy$$

et par conséquent, en multipliant les deux intégrales et remplaçant leur produit par une intégrale définie double, ce qui est permis parce que les variables x et y sont indépendantes,

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2(1+y^2)} x^{2p+2q-1} y^{2q-1}\,dx\,dy$$

$$= 4\int_0^\infty y^{2q-1}\,dy \int_0^\infty e^{-x^2(1+y^2)} x^{2p+2q-1}\,dx.$$

Or, si dans la valeur de $\Gamma(p)$ on remplace p par $p+q$, et x par $x\sqrt{1+y^2}$, on a, quelle que soit la valeur de y,

$$\Gamma(p+q)=2\int_0^\infty e^{-x^2(1+y^2)}x^{2p+2q-1}(1+y^2)^{p+q}\,dx,$$

ou bien

$$\Gamma(p+q)=2(1+y^2)^{p+q}\int_0^\infty e^{-x^2(1+y^2)}x^{2p+2q-1}\,dx,$$

ce qui fait prendre à l'intégrale double la forme suivante :

$$\Gamma(p).\Gamma(q)=2\Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{y^{2q-1}\,dy}{(y^2+1)^{p+q}}.$$

On tire de là

$$\int_0^\infty \frac{y^{2q-1}\,dy}{(y^2+1)^{p+q}}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ou, en remplaçant y^2 par x,

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}\,dx}{(x+1)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Si l'on remplace x par $\frac{1-x}{x}$, les limites 0 et ∞ de cette dernière intégrale se changent en 1 et zéro, et cette équation devient

$$\int_0^1 (1-x)^{q-1}x^{p-1}\,dx=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

La valeur de Γp a été donnée au numéro précédent.

En supposant q compris entre 0 et 1, et posant $p=1-q$, on trouve, à cause de $\Gamma 1=1$ (N° 238),

$$\Gamma q\,\Gamma(1-q)=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{x+1}\,dx.$$

Mais on a vu au N° 144 que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin q\pi};$$

il vient donc

$$\Gamma q \; \Gamma(1-q) = \frac{\pi}{\sin q\pi},$$

pourvu que q soit une fraction proprement dite.

Cette formule permet de calculer $\Gamma(1-q)$ quand on connaît Γq, et par conséquent donne Γp pour des valeurs comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, quand on la connaît pour des valeurs comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$.

240. *Expression des fonctions par des intégrales définies doubles.*— Il existe une formule très générale et fort remarquable due à Fourier, servant à représenter par une intégrale définie double une fonction arbitraire donnée continue ou discontinue d'une seule variable. Quoique ce soit dans la physique mathématique et dans la mécanique analytique que cette formule trouve ses principales applications, cependant nous la démontrerons ici, parce que l'on verra plus loin le secours qu'on peut en tirer pour la recherche des intégrales définies et pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.

Si dans $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$, dont on s'est occupé au N° 237, on remplace x par p, et b par $x-\alpha$, elle devient

$$\int_0^\infty \frac{\sin p\,(x-\alpha)}{p}\,dp,$$

intégrale qui, d'après ce qu'on a vu, est égale à $\frac{\pi}{2}$, zéro, $-\frac{\pi}{2}$ suivant que $b=x-\alpha$ est positif, nul ou négatif, ou suivant que x est plus grand que α, égal à α ou inférieur à α. Il suit d'abord de là qu'en désignant par y la valeur de l'intégrale, qu'il faut considérer comme une fonction de la lettre x, le lieu géométrique donné par l'équation

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin p\,(x-\alpha)}{p}\,dp,$$

de la forme $y=\varphi x$, se compose d'une ligne droite parallèle à l'axe des X et distante d'une quantité $\frac{\pi}{2}$, aussi longtemps que x reste supérieur à α. Pour $x=\alpha$, le lieu géométrique devient un point situé dans l'axe des X, et x continuant à décroître, le lieu devient une seconde droite parallèle à l'axe des X et distante de $-\frac{\pi}{2}\cdot$ On voit aussi qu'en posant

$$y=\int_0^\infty \frac{\sin p(x-\alpha)}{p}dp+\int_0^\infty \frac{\sin p(x-\alpha')}{p}dp\ldots\ldots+\int_0^\infty \frac{\sin p(x-\alpha^{(n-1)})}{p}dp,$$

les constantes $\alpha, \alpha' \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}$ en nombre n étant supposées rangées dans leur ordre de grandeur croissante, cette équation représente une parallèle à l'axe des X distante de $n\frac{\pi}{2}$ pour toute valeur de x supérieure à $\alpha^{(n-1)}$. Pour $x=\alpha^{(n-1)}$, on trouve $y=(n-1)\frac{\pi}{2}$, puis si x continue à décroître et reste compris entre $\alpha^{(n-2)}$ et $\alpha^{(n-1)}$, la dernière intégrale devient $-\frac{\pi}{2}$ et l'on trouve $y=(n-2)\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que dans cet intervalle des valeurs de x, le lieu géométrique est encore une droite parallèle à X et distante de $(n-2)\frac{\pi}{2}$ et ainsi de suite. Le lieu géométrique représenté par l'équation est donc une suite de points et de droites parallèles à l'axe des X.

Multiplions par $\varphi\alpha d\alpha$ les deux membres de l'équation

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty \frac{\sin p(x-\alpha)}{p}dp\ldots\ldots(1)$$

qui suppose α inférieur à x, c'est-à-dire posons

$$\frac{\pi}{2}\varphi\alpha d\alpha=\int_0^\infty \varphi\alpha\frac{\sin p\,(x-\alpha)}{p}dp d\alpha.$$

Comme cette équation subsiste pour toute valeur de α inférieure à x, l'égalité subsistera pour la somme de toutes ces valeurs, c'est-à-dire pour les intégrales prises depuis $\alpha=m$ jusqu'à $\alpha=x$, pourvu que m

soit inférieur à x; en désignant donc l'intégrale de $\varphi\alpha d\alpha$ par $\varphi_{,}\alpha$, il viendra, pourvu que $\varphi\alpha$ ne devienne pas infini,

$$\frac{\pi}{2}(\varphi_{,}x - \varphi_{,}m) = \int_m^x d\alpha \int_0^\infty \varphi\alpha \frac{\sin p(x-\alpha)}{p} dp.$$

Pour des valeurs de α supérieures à x, on sait qu'on a

$$-\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin p(x-\alpha)}{p} dp \ldots (2)$$

et en multipliant encore par $\varphi\alpha d\alpha$ et intégrant depuis $\alpha = x$ jusqu'à $\alpha = n > x$, limites entre lesquelles $x - \alpha$ reste négatif, il vient, si $\varphi\alpha$ reste fini,

$$-\frac{\pi}{2}(\varphi_{,}n - \varphi_{,}x) = \int_x^n d\alpha \int_0^\infty \varphi\alpha \frac{\sin p(x-\alpha)}{p} dp.$$

Si l'on additionne ces deux intégrales, en observant que pour $x = \alpha$, l'intégrale est nulle, et que, comme x est compris entre m et n, on doit avoir

$$\int_m^x + \int_x^n = \int_m^n,$$

on est conduit à cette égalité

$$\varphi_{,}x - \frac{1}{2}(\varphi_{,}n + \varphi_{,}m) = \frac{1}{\pi}\int_m^n d\alpha \int_0^\infty \varphi\alpha \frac{\sin p(x-\alpha)}{p} dp,$$

pourvu que $\varphi\alpha$ reste fini depuis $\alpha = m$ jusqu'à $\alpha = n$, et en dérivant les deux membres par rapport à x, on trouve enfin

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\int_m^n d\alpha \int_0^\infty \varphi\alpha \cos p(x-\alpha)\, dp \ldots (3)$$

que l'on peut écrire ainsi

$$\varphi x = \frac{1}{2\pi}\int_m^n d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\alpha \cos p(x-\alpha)\, dp,$$

attendu que la différentielle restant la même quand on change le signe de p, l'intégrale par rapport à cette lettre entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ est double de l'intégrale entre 0 et ∞.

Telle est la formule connue sous le nom de formule de Fourier, servant à représenter une fonction quelconque φx par une certaine intégrale double.

Il est à remarquer que cette équation n'est pas continue et qu'elle n'est vraie que pour des valeurs de x comprises entre m et n; car si x était inférieur à m, en faisant varier α entre les limites x et m ou x et n, $x-\alpha$ serait constamment négatif, il faudrait faire usage de l'équation (2) et il viendrait pour les sommes de ces valeurs,

$$-\frac{\pi}{2}(\varphi_{\prime}m-\varphi_{\prime}x)=\int_x^m d\alpha\int_0^\infty \varphi\alpha\,\frac{\sin p(x-\alpha)}{p}dp\ldots.(4)$$

$$-\frac{\pi}{2}(\varphi_{\prime}n-\varphi_{\prime}x)=\int_x^n d\alpha\int_0^\infty \varphi\alpha\,\frac{\sin p(x-\alpha)}{p}dp\ldots.(5)$$

et comme l'intervalle de m à n est égal à l'intervalle de x à n diminué de l'intervalle de x à m, on a

$$\int_x^n-\int_x^m=\int_m^n$$

et par conséquent

$$-\frac{\pi}{2}(\varphi_{\prime}n-\varphi_{\prime}m)=\int_m^n d\alpha\int_0^\infty \varphi\alpha\,\frac{\sin p(x-\alpha)}{p}dp\ldots.(6)$$

En dérivant les deux membres par rapport à x, il viendrait enfin

$$0=\int_m^n d\alpha\int_0^\infty \varphi\alpha\cos p(x-\alpha)\,dp$$

pour des valeurs de x plus petites que m. On est conduit au même résultat quand x est supérieur à n.

Si x converge vers m, les deux membres de (4) tendent vers zéro et en les retranchant de (5), on est conduit à l'équation suivante

$$-\frac{\pi}{2}(\varphi_{\prime}n-\varphi_{\prime}x)=\int_m^n d\alpha\int_0^\infty \varphi\alpha\,\frac{\sin p(x-\alpha)}{p}dp$$

d'autant plus exacte que x est plus rapproché de m. En la dérivant par rapport à x et égalant ensuite x à m, on trouve enfin

$$\varphi m = \frac{2}{\pi}\int_m^n d\alpha \int_0^\infty \varphi\alpha \cos p(m-\alpha)\,dp.$$

On trouverait de la même manière que pour $x = n$, l'intégrale double devient

$$\varphi n = \frac{2}{\pi}\int_m^n d\alpha \int_0^\infty \varphi\alpha \cos p(n-\alpha)\,dp.$$

Il suit de là que, si dans l'intégrale double de Fourier on fait croître x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, celle-ci sera nulle jusqu'à $x = m$, deviendra $\frac{\pi}{2}\varphi m$ pour $x = m$, puis représentera $\pi\varphi x$ pour des valeurs croissantes entre $x = m$ et $x = n$, deviendra $\frac{\pi}{2}\varphi n$ pour $x = n$ et sera de nouveau nulle pour des valeurs de x supérieures à n. En d'autres termes, si l'on considère x et y comme des coordonnées et qu'on pose l'équation

$$y = \frac{1}{\pi}\int_m^n d\alpha \int_0^\infty \varphi\alpha \cos p(x-\alpha)\,dp$$

dans laquelle le second membre est une certaine fonction de la variable x, cette équation représente la courbe $y = \varphi x$ entre les limites $x = m$ et $x = n$; elle ne représente que l'axe des X hors de ces limites et pour $x = m$ ou $x = n$ son lieu géométrique est un point ayant pour coordonnées $x = m$, $y = \frac{1}{2}\varphi m$, ou $x = n$, $y = \frac{1}{2}\varphi n$.

En réunissant plusieurs intégrales doubles de même forme, mais dans lesquelles la fonction φ soit remplacée par des fonctions F, ψ, etc. et les limites m et n par des limites supérieures m' et n', etc., il est visible que le lieu géométrique de la nouvelle équation sera une suite d'arcs de courbes isolés, limités entre les abscisses $x = m$ et $x = n$, puis entre $x = m'$ et $x = n'$, etc., ayant pour équations $y = \varphi x$, $y = Fx$, etc. et en outre les portions de l'axe des X non comprises entre ces intervalles et enfin des points isolés correspondant à ces limites. On comprend aussi qu'en disposant convenablement des limi-

tes m et n, m' et n', etc. et en donnant aux fonctions φ, F, ψ,..... des formes convenables, on pourra faire en sorte que cette équation représente une figure quelconque continue ou discontinue, composée de points isolés, de lignes droites ou de portions limitées de courbes données. Une des applications les plus curieuses mais assurément la moins utile que l'on ait faite de cette équation discontinue, consiste à lui faire représenter un morceau de musique tout entier avec tous ses signes, tels que mesures, blanches, noires, croches, etc. (Voir les *Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles, savants étrangers*, tome XV).

Lorsque les deux limites m et n se confondent avec $-\infty$ et $+\infty$, comme toute valeur réelle de x est comprise entre ces deux limites, on a identiquement

$$\varphi x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{\infty} \varphi\alpha \cos p(x-\alpha)\, dp,$$

quelle que soit la valeur de x.

241. *Applications de la formule de Fourier à la recherche de quelques intégrales.* — Appliquons la formule de Fourier à la recherche de l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles dont nous nous sommes occupés au N° 225,

$$\frac{d^2z}{dy^2} = a^2\frac{d^2z}{dx^2}$$

et à laquelle conduit la théorie des cordes vibrantes. Elle est visiblement satisfaite en posant

$$z = e^{p(x+ay-\alpha)\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad z = e^{p(x-ay-\alpha)\sqrt{-1}}$$

pour toute valeur de p et de α. L'intégrale générale est donc (N° 225)

$$z = \Sigma A e^{p(x+ay-\alpha)\sqrt{-1}} + \Sigma B e^{p(x-ay-\alpha)\sqrt{-1}},$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les valeurs de A, B, p et α. On peut remplacer A et B par $\varphi\alpha d\alpha dp$, et $\psi\alpha d\alpha dp$, $\varphi\alpha$ et $\psi\alpha$ désignant des fonctions arbitraires de α, et substituer au signe sommatoire des signes d'intégration s'étendant à toutes les valeurs de p et de α

depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. L'intégrale générale prend alors la forme

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\alpha d\alpha dp e^{p(x+ay-\alpha)\sqrt{-1}}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi\alpha d\alpha dp e^{p(x-ay-\alpha)\sqrt{-1}},$$

ces intégrales doubles s'étendant à toutes les valeurs de α et de p. Si l'on remplace les quantités exponentielles par leur valeur trigonométrique et qu'on remarque que l'intégrale ne comportant pas de valeur imaginaire, le terme multiplié par $\sqrt{-1}$ doit être écarté, il vient

$$z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\alpha \cos p(x+ay-\alpha)\, d\alpha dp$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi\alpha \cos p(x-ay-\alpha)\, d\alpha dp.$$

D'après la formule de Fourier, ces deux intégrales sont égales à $\pi\varphi(x+ay)$ et $\pi\psi(x-ay)$ ou simplement $\varphi(x+ay)$ et $\psi(x-ay)$, en comprenant le facteur π dans les fonctions. L'intégrale générale est donc

$$z = \varphi(x+ay) + \psi(x-ay),$$

comme on l'avait déjà vu au N° 225.

242. *Extension du théorème de Fourier.* — La formule de Fourier est rendue plus générale de la manière suivante : soit fy une fonction qui change de signe quand y devient négatif et qui est nulle avec y; désignons par η l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{fy}{y}dy$, que l'on suppose n'être ni nulle ni infinie. Si l'on remplace y par $p(x-\alpha)$, p étant la nouvelle variable, comme $p=0$ et $p=\infty$ rendent y nul ou infini pourvu que $x-\alpha$ ne soit pas nul, il en résulte que l'on a aussi

$$\int_0^\infty \frac{fp(x-\alpha)}{p}dp = \eta.$$

Désignons par $\varphi\alpha$ une fonction quelconque assujettie à la seule condition de rester continue pour toute valeur de α et multiplions par $\varphi\alpha d\alpha$. En intégrant de part et d'autre depuis $\alpha = m$ plus petit que x, jusqu'à $\alpha = x$, $x - \alpha$ restera positif pour toute valeur de α, la différentielle s'évanouira pour $\alpha = x$, et il viendra

$$\int_m^x \varphi\alpha d\alpha \int_0^\infty \frac{fp(x-\alpha)}{p}\,dp = \eta(\varphi_{\prime}x - \varphi_{\prime}m)$$

dans laquelle $\varphi_{\prime}x$ est l'intégrale de $\varphi x dx$. Intégrons encore entre $\alpha = x$ et $\alpha = n$ plus grand que x. $x - \alpha$ sera constamment négatif, la fonction $fp(x-\alpha)$ changera de signe ainsi que la valeur de η et il viendra

$$\int_x^n \varphi\alpha d\alpha \int_0^\infty \frac{fp(x-\alpha)}{p}\,dp = -\eta(\varphi_{\prime}n - \varphi_{\prime}x).$$

Si l'on additionne ces deux intégrales doubles en remarquant que l'on a

$$\int_m^x + \int_x^n = \int_m^n,$$

on est conduit à cette équation

$$\int_m^n \varphi\alpha d\alpha \int_0^\infty \frac{fp(x-\alpha)}{p}\,dp = \eta(2\varphi_{\prime}x - \varphi_{\prime}m - \varphi_{\prime}n),$$

dans laquelle x est nécessairement compris entre m et n. En dérivant les deux membres par rapport à x et désignant par f' la dérivée de f, il vient

$$\varphi x = \frac{1}{2\eta}\int_m^n \varphi\alpha d\alpha \int_0^\infty f'p(x-\alpha)\,dp,$$

qui sera vraie pour toute valeur de x, si m et n représentent $-\infty$ et $+\infty$.

Quand fy est remplacé par $\sin y$, on retrouve la formule ordinaire de Fourier.

CHAPITRE XVIII.

Calcul des différences. Différence d'une variable et d'une fonction. Différence de la somme, du produit et du quotient de fonctions d'une seule variable. — Différences des ordres supérieurs. — Différences des ordres supérieurs d'une fonction, exprimées au moyen des valeurs successives de cette fonction. — Méthode pratique pour calculer les différences successives d'une fonction. — Expression générale d'un terme d'une suite en fonction des différences successives. — Application à l'interpolation. — Formule d'interpolation de Lagrange. — Signification géométrique d'une interpolation. — Formule d'interpolation inverse. — Différenciation d'une équation implicite. — Calcul inverse des différences. — Signification d'une intégrale définie. — Formule générale d'intégration. — Intégration de quelques fonctions algébriques. — Intégration de quelques fonctions transcendantes. — Sommation des suites. — Valeur approchée d'une intégrale définie infinitésimale. Formule de Thomas Simpson. — Intégration des équations implicites aux différences. Intégration des équations linéaires aux différences d'un ordre quelconque. — Intégration des équations aux différences mêlées.

245. ***Calcul des différences. Différence d'une variable et d'une fonction. Différence de la somme, du produit et du quotient de fonctions d'une seule variable.*** — On appelle *différence* d'une variable x l'accroissement fini Δx que l'on donne à cette variable. La différence d'une fonction de x est l'accroissement que prend cette fonction quand on donne à x un accroissement Δx. La différence de φx se désigne par $\Delta\varphi x$ et l'opération par laquelle on la détermine se nomme *différenciation*.

Lorsque l'on connaît la forme d'une fonction d'une seule variable φx, la valeur de $\Delta\varphi x$ peut s'obtenir au moyen du théorème de Taylor, puisque l'on a

$$\Delta\varphi x \quad \text{ou} \quad \varphi(x + \Delta x) - \varphi x = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(\Delta x)^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{(\Delta x)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Cette formule donne la valeur de $\Delta\varphi x$ développée en série, suivant les puissances ascendantes de Δx et ordinairement exprimée par un nombre illimité de termes. Lorsqu'on ne tient pas à avoir la différence d'une fonction développée sous cette forme, on peut en obtenir une expression plus simple et exacte, tandis que celle que donne la série n'est qu'approchée; ainsi pour

$$\varphi x = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

il est visible que l'on a exactement

$$\Delta\varphi x = \frac{(x + \Delta x)^2 - a^2}{x + \Delta x} - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{(a^2 + x^2)\Delta x + x(\Delta x)^2}{x(x + \Delta x)}.$$

Pour

$$\varphi x = \log x,$$

on a de même

$$\Delta\varphi x = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

tandis que la série de Taylor donne

$$\Delta \log x = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3}{3} - \text{etc.}$$

Enfin pour

$$\varphi x = a^x \quad \text{et} \quad \varphi x = \cos x,$$

on trouverait

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

$$\Delta. \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -\sin x \sin \Delta x + \cos x(\cos \Delta x - 1).$$

La recherche de la différence de fonctions compliquées peut être rendue plus facile au moyen de quelques remarques sur la composition de la différence d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions. Remarquons d'abord que si l'on a une fonction de la forme

$$\varphi x + \psi x - Fx,$$

la différence est évidemment

$$\Delta\varphi x + \Delta\psi x - \Delta Fx,$$

c'est-à-dire que *la différence d'une somme de fonctions est égale à la*

somme des différences de chacune des fonctions prises avec le signe qui les affecte.

Le produit de deux fonctions

$$\varphi x . \psi x$$

a pour différence

$$\varphi(x + \Delta x) . \psi(x + \Delta x) - \varphi x . \psi x,$$

et si l'on remarque que la définition d'une différence conduit aux valeurs suivantes :

$$\Delta\varphi x = \varphi(x + \Delta x) - \varphi x, \quad \Delta\psi x = \psi(x + \Delta x) - \psi x,$$

la différence du produit devient, en remplaçant $\varphi(x + \Delta x)$ et $\psi(x + \Delta x)$ par ces valeurs,

$$\varphi x \Delta\psi x + \psi x \Delta\varphi x + \Delta\varphi x . \Delta\psi x.$$

Cette différence d'un produit se confond avec l'expression de la différentielle d'un produit, lorsque les différences Δx deviennent infiniment petites; car alors $\Delta\varphi x$ et $\Delta\psi x$ ou $d\varphi x$ et $d\psi x$ seront elles-mêmes infiniment petites et le troisième terme sera négligeable devant les deux autres. Si ψx devient une constante a, $\Delta\psi x$ sera visiblement nul et la différence de $a\varphi x$ se réduit à

$$a\Delta\varphi x.$$

Enfin le quotient

$$\frac{\varphi x}{\psi x}$$

a pour différence

$$\frac{\varphi(x + \Delta x)}{\psi(x + \Delta x)} - \frac{\varphi x}{\psi x}$$

et en remplaçant, comme plus haut, $\varphi(x + \Delta x)$ et $\psi(x + \Delta x)$ par leur valeur, on trouve, toute réduction faite,

$$\frac{\psi x \Delta\varphi x - \varphi x \Delta\psi x}{\psi x(\psi x + \Delta\psi x)}.$$

Cette valeur se réduit aussi à celle trouvée pour la différentielle d'une fraction, lorsque les différences sont infiniment petites, puisque, au dénominateur, $\Delta\psi x$ sera négligeable devant ψx.

244. *Différences des ordres supérieurs.* — Ce qui précède suffit

pour trouver la différence de toutes les fonctions d'une seule variable. Passons à la recherche des différences des ordres supérieurs. $\Delta\varphi x$ est, en général, une nouvelle fonction de x. Si l'on donne à ces x un nouvel accroissement, $\Delta\varphi x$ prendra un accruissement correspondant qui sera la différence de $\Delta\varphi x$, c'est-à-dire, la différence deuxième, et sera par conséquent exprimée par $\Delta(\Delta\varphi x)$ que l'on est convenu d'écrire ainsi $\Delta^2\varphi x$. De même la différence de la fonction $\Delta^2\varphi x$ est désignée par $\Delta^3\varphi x$ et ainsi de suite.

La recherche des différences successives d'une fonction donnée n'exigeant que la répétition d'une différenciation ordinaire, ne présente rien de nouveau; ainsi pour la fonction x^n, en supposant n entier et positif, on trouve

$$\Delta(x^n) \quad \text{ou} \quad (x+\Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \text{etc.}$$

$$\Delta^2.x^n = n(n-1)x^{n-2}\Delta x^2 + \text{etc.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^n.x^n = n(n-1)(n-2)\ldots..3.2.1(\Delta x)^n$$

$$\Delta^{n+1}x^n = 0, \quad \Delta^{n+2}x^n = 0\ldots.. \text{etc.}$$

On voit que les différences successives de x^n sont nulles à partir de l'ordre $n+1$. Il en est évidemment de même de tout polynôme entier et rationnel $ax^n + bx^{n-1} + \text{etc.}$ Cette fonction est la seule qui jouisse de cette propriété.

245. *Différences des ordres supérieurs d'une fonction exprimées au moyen des valeurs successives de cette fonction.* — La différence d'un ordre quelconque n d'une fonction φx peut être exprimée au moyen des valeurs successives par lesquelles passe la fonction, quand on y fait croître x par intervalles égaux à Δx, c'est-à-dire, au moyen de φx, $\varphi(x+\Delta x)$, $\varphi(x+2\Delta x)\ldots..\varphi(x+n\Delta x)$; on a vu, en effet, que

$$\Delta\varphi x = \varphi(x+\Delta x) - \varphi x.$$

Comme les deux membres sont identiques, un accroissement Δx donné à la variable fera prendre aux deux membres des accroissements identiques; il vient donc en différenciant les deux membres,

$$\Delta^2\varphi x = \Delta\varphi(x+\Delta x) - \Delta\varphi x;$$

mais il résulte de la définition d'une différence de fonction, que l'on a

$$\Delta\varphi(x+\Delta x) = \varphi(x+2\Delta x) - \varphi(x+\Delta x)$$

$$\Delta\varphi x = \varphi(x+\Delta x) - \varphi x,$$

qui réduisent la valeur précédente de $\Delta^2\varphi x$ à

$$\Delta^2\varphi x = \varphi(x + 2\Delta x) - 2\varphi(x + \Delta x) + \varphi x.$$

On trouvera de même en différenciant cette dernière,

$$\Delta^3\varphi x = \Delta\varphi(x + 2\Delta x) - 2\Delta\varphi(x + \Delta x) + \Delta\varphi x$$
$$= \varphi(x + 3\Delta x) - 3\varphi(x + 2\Delta x) + 3\varphi(x + \Delta x) - \varphi x,$$
$$\Delta^4\varphi x = \varphi(x + 4\Delta x) - 4\varphi(x + 3\Delta x) + 6\varphi(x + 2\Delta x) - 4\varphi(x + \Delta x) + \varphi x$$

et en généralisant, on aura pour un ordre entier quelconque n,

$$\Delta^n\varphi x = \varphi(x + n\Delta x) - n\varphi[x + (n-1)\Delta x]$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi[x + (n-2)\Delta x] + \cdots\cdots \pm \varphi x,$$

ou bien en retournant le développement et commençant par le dernier terme,

$$\Delta^n\varphi x = \pm\left\{\varphi x - n\varphi(x + \Delta x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi(x + 2\Delta x)\right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varphi(x + 3\Delta x)\cdots\cdots \pm \varphi(x + n\Delta x)\right\}.$$

Le signe *plus* doit visiblement être pris quand n est pair et le signe *moins* quand n est impair. Ce développement de $\Delta^n\varphi x$ dont la loi est remarquable par sa ressemblance avec celle du développement du binôme de Newton, n'a été trouvé ici que par *induction*. Pour le démontrer d'une manière complète, nous ferons voir que, s'il est exact pour un indice n, il le sera encore pour un indice $n + 1$; en effet, si l'on prend la différence des deux membres de cette équation, en observant que la différence de $\Delta^n\varphi x$ est $\Delta^{n+1}\varphi x$ et que les différences des termes du second membre sont données par

$$\Delta\varphi(x + n\Delta x) = \varphi[x + (n+1)\Delta x] - \varphi(x + n\Delta x)$$
$$\Delta\varphi[x + (n-1)\Delta x] = \varphi(x + n\Delta x) - \varphi[x + (n-1)\Delta x],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

cette équation devient, en substituant les valeurs ci-dessus,

$$\Delta^{n+1}\varphi x = \pm\left\{\varphi x - (n+1)\varphi(x + \Delta x) + \frac{(n+1)n}{1.2}\varphi(x + 2\Delta x)\right.$$
$$\left. - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\varphi(x + 3\Delta x)\cdots\cdots \pm \varphi[x + (n+1)\Delta x]\right\},$$

ce qui démontre la proposition, puisque ce développement n'est autre chose que le premier, dans lequel n se trouve changé en $n+1$; or, on a reconnu directement l'exactitude de la loi pour la valeur de $\Delta^4\varphi x$; la loi est donc également vraie pour $\Delta^5\varphi x$. Étant vraie pour $\Delta^5\varphi x$, elle le sera pour $\Delta^6\varphi x$ et ainsi de suite.

Soit par exemple, $\varphi x = x^m$, on trouve

$$\Delta^n(x^m) = \pm \left\{ x^m - n(x+\Delta x)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(x+2\Delta x)^m \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(x+3\Delta x)^m \ldots\ldots \pm (x+n\Delta x)^m \right\}.$$

246. *Méthode pratique pour calculer les différences successives d'une fonction.* — L'expression générale de $\Delta^n\varphi x$ donne la valeur de la différence d'un ordre quelconque n d'une fonction φx, au moyen d'un nombre $n+1$ de ses valeurs successives correspondant à des valeurs $x, x+\Delta x, x+2\Delta x, x+3\Delta x \ldots\ldots x+n\Delta x$ de la variable. Ces valeurs des différences successives peuvent aussi s'obtenir par un autre procédé pratique très simple. Supposons que φx soit tel qu'en donnant à x les valeurs successives

$$x,\quad x+\Delta x,\quad x+2\Delta x,\quad x+3\Delta x,\quad x+4\Delta x,\quad x+5\Delta x, \ldots$$

on trouve pour φx, $\varphi(x+\Delta x)$, $\varphi(x+2\Delta x), \ldots$ les nombres suivants :

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f, \ldots \ldots$$

Si l'on prend les différences $b-a$, $c-b$, $d-c$, $e-d$, etc., qu'on représentera par

$$a',\quad b',\quad c',\quad d',\quad e',$$

qu'on prenne ensuite les différences $b'-a'$, $c'-b'$, $d'-c'$, etc., représentées par

$$a'',\quad b'',\quad c'',\quad d'',$$

qu'on prenne de nouveau les différences dans le même ordre, représentées par

$$a''',\quad b''',\quad c''', \ldots$$

et ainsi de suite, on formera avec tous ces nombres, le tableau suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a & & b & & c & & d & & e & & f \\
& a' & & b' & & c' & & d' & & e' & \\
& & a'' & & b'' & & c'' & & d'' & & \\
& & & a''' & & b''' & & c''' & & & \\
& & & & a^{\text{IV}} & & b^{\text{IV}} & & & & \\
& & & & & a^{\text{V}} & & & & &
\end{array}$$

et il est facile de reconnaître la signification de ces différentes lettres. Dans la première ligne, a, b, c, d, etc., sont les valeurs de φx, $\varphi(x+\Delta x)$, $\varphi(x+2\Delta x)$, $\varphi(x+3\Delta x)$, etc. Pour la seconde ligne, puisque l'on a fait

$$a'=b-a,\quad b'=c-b,\quad c'=d-c, \text{ etc.}$$

on a aussi

$$a'=\varphi(x+\Delta x)-\varphi x,\quad b'=\varphi(x+2\Delta x)-\varphi(x+\Delta x),$$
$$c'=\varphi(x+3\Delta x)-\varphi(x+2\Delta x), \text{ etc.}$$

et par conséquent la signification de a', b', c', d', etc., est

$$a'=\Delta\varphi x,\quad b'=\Delta\varphi(x+\Delta x),\quad c'=\Delta\varphi(x+2\Delta x),\quad d'=\Delta\varphi(x+3\Delta x), \text{ etc.}$$

On trouve de même pour la troisième ligne,

$$a''=\Delta\varphi(x+\Delta x)-\Delta\varphi x=\Delta[\varphi(x+\Delta x)-\varphi x]=\Delta.\Delta\varphi x=\Delta^2\varphi x,$$
$$b''=\Delta\varphi(x+2\Delta x)-\Delta\varphi(x+\Delta x)=\Delta[\varphi(x+2\Delta x)-\varphi(x+\Delta x)]$$
$$=\Delta.\Delta\varphi(x+\Delta x)=\Delta^2\varphi(x+\Delta x),$$
$$c''=\Delta^2\varphi(x+2\Delta x),\quad d''=\text{etc.}$$

Pour la quatrième, il est visible qu'il vient

$$a'''=\Delta^3\varphi x,\quad b'''=\Delta^3\varphi(x+\Delta x),\quad c'''=\Delta^3\varphi(x+2\Delta x)\ldots\ldots$$

et ainsi de suite. On voit par là, que la suite des nombres a', a'', a''',... de ce tableau représente les différences premières, secondes, etc. de la fonction φx, dont la forme peut rester inconnue, mais qui est telle que ses $n+1$ valeurs successives sont a, b, c, d,....

Ainsi, si une certaine fonction prend les valeurs successives 1, 3, 6, 10, 15, etc., quand on y fait croître la variable de Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$,.... ou plutôt de 1, 2, 3, 4,.... on formera le tableau suivant

1, 3, 6, 10, 15 etc.
2 3 4 5
1 1 1
0 0
0

dont la seule inspection fait connaître les différences 1res, 2mes, 3mes etc. de cette fonction, différences qui sont 2, 1, 0, 0. On aurait pu les obtenir immédiatement au moyen de la formule démontrée plus haut (N° 245). Ainsi pour connaître $\Delta^2\varphi x$, on y ferait n égal à 2, φx égal à 1, $\varphi(x+\Delta x)$ égal à 3, $\varphi(x+2\Delta x)$ égal à 6 et il viendrait

$$\Delta^2\varphi x = 1 - 2.3 + 6 = 1.$$

C'est en effet la valeur que donne le tableau.

Les valeurs particulières $a, b, c, d, \ldots$ d'une fonction φx correspondant à des valeurs particulières $x,\ x+\Delta x,\ x+2\Delta x, \ldots$ de la variable, valeurs que l'on peut comparer à des ordonnées équidistantes d'une courbe, relatives à des abscisses $x,\ x+\Delta x,\ x+2\Delta x$, etc., forment ce que l'on appelle *une suite* dont les termes correspondent à $x,\ x+\Delta x,\ x+2\Delta x$, etc. Les coefficients 0, 1, 2, 3..... n de Δx se nomment *indices* des différents termes de la suite et servent à fixer leur rang.

247. *Expression générale d'un terme d'une suite en fonction des différences successives.* — On peut aussi exprimer un terme quelconque d'une suite en fonction des différences successives et de l'indice; en effet, en augmentant successivement x de Δx, on a

$$\varphi(x+\Delta x) = \varphi x + \Delta\varphi x,$$

$$\varphi(x+2\Delta x) = \varphi(x+\Delta x) + \Delta\varphi(x+\Delta x),$$

$$\varphi(x+3\Delta x) = \varphi(x+2\Delta x) + \Delta\varphi(x+2\Delta x),$$

. . . .

et des substitutions successives donnent

$$\varphi(x+\Delta x) = \varphi x + \Delta\varphi x,$$

$$\varphi(x+2\Delta x) = \varphi x + 2\Delta\varphi x + \Delta^2\varphi x,$$

$$\varphi(x+3\Delta x) = \varphi x + 3\Delta\varphi x + 3\Delta^2\varphi x + \Delta^3\varphi x,$$

. . . .

et en généralisant comme on l'a fait au N° 245,

$$\varphi(x+n\Delta x) = \varphi x + n\Delta\varphi x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2\varphi x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3\varphi x + \text{etc.}$$

Cette formule est analogue à celle de Taylor ; il est même facile d'en déduire cette dernière, car en faisant

$$n\Delta x = h \quad \text{d'où} \quad n = \frac{h}{\Delta x},$$

il vient pour $\varphi(x + n\Delta x)$ ou $\varphi(x + h)$,

$$\varphi(x + h) = \varphi x + h\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} + \frac{h(h - \Delta x)}{1.2}\frac{\Delta^2\varphi x}{(\Delta x)^2}$$

$$+ \frac{h(h - \Delta x)(h - 2\Delta x)}{1.2.3}\frac{\Delta^3\varphi x}{(\Delta x)^3} + \text{etc.}$$

Si l'on fait converger Δx vers zéro, h restant invariable, il est visible que $\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2\varphi x}{(\Delta x)^2}$, etc., deviennent à la limite $\frac{d\varphi x}{dx}$, $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, etc., et on trouve la série de Taylor.

La formule précédente qui, en effectuant les calculs indiqués, peut être mise sous la forme

$$\varphi(x + n\Delta x) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + \text{etc.},$$

fait connaître les valeurs successives de la fonction φx, c'est-à-dire les termes de la suite

$$\varphi x, \quad \varphi(x + \Delta x), \quad \varphi(x + 2\Delta x) \ldots\ldots \quad \varphi(x + n\Delta x).$$

Il suffit pour cela de donner à n les valeurs des différents indices. Cette expression se nomme pour cette raison *terme général* de la suite.

En général, le nombre de termes qui entrent dans l'expression de $\varphi(x + n\Delta x)$ dépend de la valeur de n et est par conséquent indéfini aussi bien que n ; cependant si la fonction φx est telle que ses différences successives sont nulles à partir d'un certain ordre, ainsi que cela a lieu pour les fonctions entières et rationnelles (N° 244), le nombre de termes sera limité bien que n reste arbitraire.

Pour appliquer notre formule, considérons la suite

$$3, \quad 9, \quad 15, \quad 23, \quad 33 \ldots\ldots$$

que nous considérerons comme étant les valeurs successives d'une certaine fonction φx, quand on y remplace x par

$$x, \quad x + \Delta x, \quad x + 2\Delta x, \quad x + 3\Delta x, \quad x + 4\Delta x \ldots\ldots$$

ou comme représentant les coordonnées équidistantes de la courbe $y = \varphi x$.

Proposons-nous de déterminer le terme correspondant à $x + n\Delta x$, c'est-à-dire, le terme $(1+n)^{ième}$ ou *le terme général*. On calculera les différences successives $\Delta\varphi x$, $\Delta^2\varphi x$, $\Delta^3\varphi x$,.... soit au moyen de la formule du N° 245, soit en formant le tableau suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & & 9 & & 15 & & 23 & & 33 \\ & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & \\ & & & 0 & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

d'où l'on conclut

$$\varphi x = 5, \quad \Delta\varphi x = 4, \quad \Delta^2\varphi x = 2, \quad \Delta^3\varphi x = 0, \quad \Delta^4\varphi x = 0,$$

et en substituant dans l'expression du *terme général*, on trouve pour l'ordonnée correspondant à $x + n\Delta x$,

$$\varphi(x + n\Delta x) = 5 + 3n + n^2.$$

En faisant successivement

$$n = 0, \quad n = 1, \quad n = 2, \quad n = 3, \text{ etc.}$$

on retrouve en effet tous les termes de la suite donnée. Cette valeur de $\varphi(x + n\Delta x)$ exprime donc *la loi* de cette suite de nombres et l'on pourra en faisant croître n, prolonger celle-ci indéfiniment, de manière que les nouveaux termes soient soumis à la même loi que les premiers. Observons que cette équation n'est pas continue en n, puisque la manière dont on y est parvenu exige visiblement que n soit entier; si donc on faisait n égal à un nombre fractionnaire, compris entre deux nombres entiers n' et n'', il est visible que cette formule ne reproduirait plus les termes de la suite ou les coordonnées équidistantes, mais donnerait une ordonnée ou un nombre lié à la valeur fractionnaire de n, de la même manière que les termes de la suite elle-même sont liés aux différents indices entiers. Ainsi, si l'on veut connaître le nombre ou l'ordonnée qui correspondrait à l'indice $3\frac{1}{2}$ dans la suite précédente, il suffira de faire n égal à $3\frac{1}{2}$ dans le terme général de

cette suite et il viendra

$$\varphi\left(x + 3\frac{1}{2}\Delta x\right) = 3 + 3\left(3\frac{1}{2}\right) + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 27\frac{3}{4}.$$

248. *Application à l'interpolation.* — L'opération par laquelle on détermine un semblable terme se nomme *interpolation*. Il est facile de voir que l'opération de l'interpolation revient en géométrie à chercher l'ordonnée d'une courbe correspondant à une abscisse quelconque, connaissant les ordonnées équidistantes qui correspondent aux abscisses x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$, etc.

On a vu (N° 247) que la suite au moyen de laquelle on effectue les interpolations, n'est pas toujours limitée et par conséquent l'interpolation au moyen de la formule générale qui précède, n'est possible d'une manière exacte que lorsque toutes les différences successives de la fonction génératrice φx sont nulles à partir d'un certain ordre. Cependant si les différences successives, sans devenir nulles, prennent des valeurs très petites, c'est-à-dire, si la formule d'interpolation est très convergente, on pourra se borner à considérer un certain nombre des premiers termes, en négligeant les suivants. Prenons pour exemple la détermination du *logarithme d'un nombre* 2718,281828 *qui sort des limites des tables.* — Aux nombres entiers suivants :

$$2718, \quad 2718 + 1, \quad 2718 + 2, \quad 2718 + 3, \quad 2718 + 4$$

qui ici représentent les valeurs successives de x, savoir x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$,..... correspondent les logarithmes ou les valeurs successives de la fonction $\varphi x = \operatorname{Log} x$,

3,4529693, 3,4545689, 3,4561626, 3,4577506, 3,4593327.

En formant le tableau suivant des différences successives,

3,4529693		3,4545689		3,4561626		3,4577506		3,4593327
	0,0015996		0,0015937		0,0015880		0,0015821	
		− 0,0000059		− 0,0000057		− 0,0000059		
			0,0000002		− 0,0000002			
				− 0,0000004				

on voit que les différences troisièmes qui n'ont un chiffre significatif

qu'à la septième décimale, peuvent être négligées et en substituant les valeurs des autres différences dans la formule d'interpolation et faisant n égal à 0,281828, il vient

$$\text{Log}\,2718{,}281828 = 3{,}4329693 + 0{,}281828.0{,}0015996$$

$$+\frac{0{,}281828.0{,}718172}{2}0{,}0000059.$$

Le deuxième terme de cette valeur forme la différence proportionnelle à laquelle on s'arrête ordinairement, quand on fait usage des tables de logarithmes.

249. *Formule d'interpolation de Lagrange.* — La formule précédente d'interpolation suppose connues les valeurs équidistantes de la fonction, c'est-à-dire, les valeurs correspondant à des accroissements égaux entre eux, donnés successivement à la variable. Lagrange a proposé une formule très simple, empirique il est vrai, au moyen de laquelle on effectue une interpolation, connaissant des valeurs de la fonction qui correspondent à des valeurs quelconques de la variable. Soient

$$P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ldots.$$

les valeurs de φx quand on y fait successivement x égal à

$$p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ldots.$$

En désignant par $a, b, c, d,\ldots.$ des coefficients indéterminés fonctions de x, Lagrange admet que pour une valeur quelconque x de la variable on a

$$\varphi x = aP + bQ + cR + dS + eT + \text{etc.}$$

et il détermine a, b, c, .. par la condition que φx prenne les valeurs $P, Q, R, S, T,\ldots$ quand on y remplace x par p, q, r, s, t. Cette condition peut être remplie d'une infinité de manières. Elle le sera visiblement, par exemple, si les coefficients $a, b, c,\ldots$ sont tels que la supposition de $x=p$, puis $x=q$, puis $x=r$, etc., leur fait prendre les valeurs suivantes :

$$a=1,\quad b=0,\quad c=0,\quad d=0\ldots..$$

$$a=0,\quad b=1,\quad c=0,\quad d=0\ldots..$$

$$a=0,\quad b=0,\quad c=1,\quad d=0\ldots.$$

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad d=1\ldots..$$

. . . .

On remplit toutes ces conditions en posant

$$a=\frac{(x-q)(x-r)(x-s)(x-t)\ldots}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)\ldots},\quad b=\frac{(x-p)(x-r)(x-s)(x-t)}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)}$$

$c=$ etc., $\quad d=$ etc.

La formule d'interpolation devient ainsi

$$\varphi x=\frac{(x-q)(x-r)(x-s)(x-t)}{(p-q)(p-r)(p-s)(p-t)}P\quad+\frac{(x-p)(x-r)(x-s)(x-t)}{(q-p)(q-r)(q-s)(q-t)}Q+\text{etc.}$$

250. ***Signification géométrique d'une interpolation.*** — En remplaçant φx par y, et considérant P, Q, etc., comme des ordonnées DE, aa', bb', cc',... (fig. 51) correspondant aux abscisses p, q, r, etc., ou AE, Aa, Ab, Ac,..., il est visible que toute formule d'interpolation a pour objet de trouver l'équation d'une courbe passant par les n points D, a', b', c', d', e',..... problème entièrement indéterminé, si la nature de la courbe reste arbitraire, mais qui n'aura qu'une solution unique, quand on met pour condition que la courbe aura une équation de la forme

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots\cdot Kx^{n-1},$$

c'est-à-dire, quand elle sera de forme parabolique. Alors tout se réduit à trouver les valeurs de A, B, C,.... de manière que les coordonnées (P, p), (Q, q)..... satisfassent à cette équation qui devra contenir un nombre de termes ou un nombre d'inconnues A, B, C,... égal au nombre de points D, a', b', c'..... Or, ce mode d'interpolation est précisément celui auquel conduit la formule de Lagrange, puisque celle-ci suppose visiblement la valeur de φx exprimée par une fonction entière et rationnelle de x.

251. ***Formule d'interpolation inverse.*** — Le problème inverse de l'interpolation précédente consiste à déterminer la valeur de l'indice, connaissant la valeur de la fonction, ou, en d'autres termes, il consiste à trouver x connaissant φx. Il faudrait pour cela résoudre par rapport à x, l'équation précédente de Lagrange; mais la valeur de x s'obtient immédiatement en reprenant tous les raisonnements qui nous ont conduits à cette formule et l'on trouve

$$x=\frac{(\varphi x-Q)(\varphi x-R)(\varphi x-S)\ldots}{(P-Q)(P-R)(P-S)\ldots}p+\frac{(\varphi x-P)(\varphi x-R)(\varphi x-S)\ldots}{(Q-P)(Q-R)(Q-S)\ldots}q+\text{etc.}$$

Ainsi, si l'on demande à quel nombre correspond le logarithme 3,4334208, comme ce nombre est compris entre 2718 et 2719, on prendra pour p, q, r, s, t la suite des nombres -2, -1, 0, 1, 2, pour P, Q, R, S, T, les logarithmes de 2716, 2717, 2718, 2719, 2720, pour φx le logarithme donné 3,4334208. On trouvera ainsi $x = 0{,}281828$, c'est-à-dire, que le nombre cherché est 2718,281828.

Cette formule peut aussi servir à calculer la valeur d'une racine d'une équation $\varphi x = 0$. En désignant par $p, q, r, ..$ des valeurs approchées de la racine et par $P, Q, R, ..$ les valeurs que prend φx, lorsqu'on y remplace x par $p, q, r, ..$ comme la racine x correspond à $\varphi x = 0$, il faudra dans la formule précédente faire φx nul, et on aura pour valeur de la racine,

$$+x = \frac{pQRS...}{(P-Q)(P-R)(P-S)...} + \frac{PqRS...}{(Q-P)(Q-R)(Q-S)...} + \text{etc.}$$

Les formules d'interpolation servent surtout à découvrir la loi d'un phénomène, au moyen de résultats déduits d'un certain nombre d'observations.

252. *Différenciation d'une équation implicite.* — Jusqu'ici nous n'avons différencié au point de vue du calcul des différences, que des fonctions d'une seule variable φx, ou des équations explicites telles que $y = \varphi x$. Si l'équation était implicite et de la forme $f(x, y) = 0$, en désignant par Δx un accroissement donné à x et par Δy l'accroissement correspondant de y, on devrait avoir

$$f(x + \Delta x, \quad y + \Delta y) = 0.$$

Or, ce résultat d'un double accroissement donné simultanément à x et à y peut être obtenu par deux opérations successives, ainsi qu'on l'a déjà dit au N° 20. En donnant aux x seuls l'accroissement Δx, la fonction que nous désignerons par f, devient $f + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x$, dans laquelle Δf désigne l'accroissement ou la différence de la fonction f, due à un accroissement donné à la seule variable x. Si dans ce résultat on donne ensuite à tous les y l'accroissement Δy, f devient $f + \frac{\Delta f}{\Delta y}\Delta y$ et $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ devient $\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)}{\Delta y}\Delta y$, en désignant par $\frac{\Delta f}{\Delta y}\Delta y$ l'accroissement

de f, provenant du seul accroissement de y et par $\dfrac{\Delta\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)}{\Delta y}\Delta y$ l'accroissement dû au seul accroissement de y, de la fonction $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$; de sorte qu'après le double accroissement, la fonction prend la valeur $f+\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x+\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta y}+\dfrac{\Delta\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)}{\Delta y}\Delta x\right)\Delta y$ et que l'on a par conséquent, en remarquant que f est nul et que $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ l'est également,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x+\frac{\Delta f}{\Delta y}\Delta y+\frac{\Delta\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)}{\Delta y}\Delta y\Delta x=0.$$

Cette équation est dite l'*équation aux différences* de la proposée. $\dfrac{\Delta\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$ qui est le résultat d'une double différenciation de la fonction f, effectuée d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y, se désigne aussi par $\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x\Delta y}$ et l'équation aux différences prend la forme

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x+\frac{\Delta f}{\Delta y}\Delta y+\frac{\Delta^2 f}{\Delta x\Delta y}\Delta x\Delta y=0.$$

Comme $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x$ et $\dfrac{\Delta f}{\Delta y}\Delta y$ sont les différences d'une fonction prises par rapport à une seule variable et comme $\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x\Delta y}$ représente le résultat d'une double différenciation effectuée successivement par rapport à chaque variable x et y, on voit que la différenciation d'une équation implicite à deux variables est ramenée à des différenciations de fonctions d'une seule variable et peut par conséquent être déduite des théories précédentes.

Cette équation, que l'on peut combiner d'une manière quelconque avec l'équation primitive, sans changer sa signification et par conséquent sans qu'elle cesse d'être l'équation aux différences de cette dernière, sert à déterminer la valeur de Δy correspondant à chaque

valeur de x et de Δx; il suffit pour cela d'éliminer y entre ces deux équations, ce qui conduira à une équation en x, Δx et Δy qu'il faudra résoudre par rapport à Δy.

Observons qu'une équation $f(x, y) = 0$, ou $y = fx$ peut toujours être transformée de manière que, quel que soit l'accroissement constant Δx que l'on attribue à la variable x, il suffise de donner à la nouvelle variable indépendante qui tient lieu de x, un accroissement égal à l'unité. Il faut évidemment pour cela remplacer x par $x'\Delta x$; car il est visible qu'un accroissement Δx donné à x, répond à un accroissement égal à l'unité donné à x'.

255. *Calcul inverse des différences.* — Le calcul inverse des différences est pour le calcul direct ce qu'est le calcul intégral pour le calcul différentiel. Il a pour but de déterminer la forme d'une fonction connaissant sa différence. Si u représente une différence, la fonction s'indique par le signe Σu et se nomme l'*intégrale* de la *différence u*. L'opération par laquelle on détermine cette intégrale se nomme encore *intégration*. Comme les signes Δ et Σ indiquent deux opérations contraires, il est visible que l'on doit avoir

$$\Sigma\Delta x = x, \quad \Sigma\Delta\varphi x = \varphi x, \quad \Delta\Sigma x = x, \quad \Delta\Sigma\varphi x = \varphi x.$$

On voit aussi que, puisque

$$\Delta(\varphi x + \psi x - Fx) = \Delta\varphi x + \Delta\psi x - \Delta Fx,$$

on doit avoir

$$\Sigma(\Delta\varphi x + \Delta\psi x - \Delta Fx) = \varphi x + \psi x - Fx,$$

c'est-à-dire, que l'*intégrale d'une somme de plusieurs différences est égale à la somme des intégrales de chaque différence prise avec son signe*. De même, puisque

$$\Delta(a\varphi x) = a\Delta\varphi x,$$

on a aussi

$$\Sigma a\varphi x = a\Sigma\varphi x;$$

on voit donc qu'un facteur constant peut sortir du signe d'intégration.

Pour avoir l'intégrale la plus générale, il faut la compléter en y ajoutant une constante arbitraire, parce que la différence d'une constante arbitraire est nulle, ou plus généralement, il faut ajouter une fonction dont la différence soit nulle, comme cela a lieu pour certaines

fonctions trigonométriques, qui reprennent la même valeur quand on fait croître l'arc d'une ou plusieurs circonférences.

254. *Signification d'une intégrale définie.* — Dans le calcul inverse des différences, comme dans le calcul intégral proprement dit, $\Sigma\varphi x' - \Sigma\varphi x$ se nomme *intégrale définie* de φx, prise depuis x jusqu'à x' et cette quantité a une signification analogue; en effet on sait que

$$\Delta\varphi x = \varphi(x + \Delta x) - \varphi x,$$

$$\Delta\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x + 2\Delta x) - \varphi(x + \Delta x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta\varphi[x + (n-1)\Delta x] = \varphi(x + n\Delta x) - \varphi[x + (n-1)\Delta x].$$

Additionnant membre à membre, il vient

$$\varphi(x + n\Delta x) - \varphi x = \Delta\varphi x + \Delta\varphi(x + \Delta x) + \Delta\varphi(x + 2\Delta x)$$
$$+ \Delta\varphi(x + 3\Delta x) \cdots\cdots + \Delta\varphi[x + (n-1)\Delta x],$$

et en faisant

$$x + n\Delta x = x',$$

cette équation devient

$$\varphi x' - \varphi x = \Delta\varphi x + \Delta\varphi(x + \Delta x) + \Delta\varphi(x + 2\Delta x) + \Delta\varphi(x + 3\Delta x) \cdots\cdots$$
$$+ \Delta\varphi(x' - \Delta x).$$

Si l'on intègre les deux membres, on trouve

$$\Sigma\varphi x' - \Sigma\varphi x = \varphi x + \varphi(x + \Delta x) + \varphi(x + 2\Delta x) \cdots\cdots + \varphi(x' - \Delta x).$$

Le premier membre est ce que nous avons appelé l'*intégrale définie* de φx prise depuis x jusqu'à x', intégrale que nous représenterons par $\sum_{x}^{x'} \varphi x$; on voit donc qu'une intégrale définie prise entre deux limites x et x' représente la somme des valeurs successives de φx depuis la première correspondant à x jusqu'à l'avant-dernière correspondant à $x' - \Delta x$.

Il n'a pas été ajouté de constante arbitraire au second membre, parce que celui-ci doit, comme le premier, devenir zéro pour $x' = x$, ce qui

a lieu en effet, puisque le nombre de termes est visiblement égal au nombre d'accroissements Δx contenus dans $x' - x$ et que pour $x' = x$, ce nombre est nul. Cette signification de l'intégrale définie $\sum_{x}^{x'} \varphi x$, fait donner à celle-ci le nom de *somme* de φx prise entre les limites x et $x' - \Delta x$.

255. *Formule générale d'intégration.* — On peut toujours obtenir la somme ou l'intégrale d'une fonction donnée, exprimée par une série contenant les différences successives de la fonction; en effet on a vu (N° 247) que

$$\varphi(x + n\Delta x) = \varphi x + n\Delta\varphi x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2\varphi x + \text{etc.};$$

si donc on fait $x + n\Delta x = x'$, on aura, en intégrant les deux membres et observant que le second ne reçoit pas de constante arbitraire, parce que, pour x égal à x', n est nul et que le second membre doit être nul comme le premier,

$$\Sigma\varphi x' - \Sigma\varphi x \quad \text{ou} \quad \sum_{x}^{x'} \varphi x = n\varphi x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta\varphi x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^2\varphi x + \text{etc.}$$

Comme on a fait

$$x + n\Delta x = x' \quad \text{ou} \quad n = \frac{x' - x}{\Delta x},$$

la formule d'intégration prend aussi la forme

$$\sum_{x}^{x'} \varphi x = \frac{x' - x}{\Delta x}\varphi x + \frac{(x' - x)}{\Delta x}\left(\frac{x' - x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta\varphi x}{1.2} + \text{etc.}$$

Elle est analogue à celle donnée par Jacques Bernoully dans le calcul infinitésimal, pour exprimer l'intégrale d'une différentielle et fait connaître l'intégrale définie de φx. Si cette fonction est telle que toutes ses différences soient nulles à partir d'un certain rang, le nombre de termes sera limité. Cela n'a lieu que pour des fonctions entières et rationnelles.

256. *Intégration de quelques fonctions algébriques.* — Appliquons

la formule précédente à l'intégration de la fonction x^m. On trouve en remplaçant φx par x^m,

$$\sum_{x}^{x'} x^m = \frac{x'-x}{\Delta x} x^m + \frac{x'-x}{\Delta x}\left(\frac{x'-x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta(x^m)}{1.2}$$

$$+ \frac{x'-x}{\Delta x}\left(\frac{x'-x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x'-x}{\Delta x} - 2\right)\frac{\Delta^2(x^m)}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

dans laquelle on connait (N° 244) les valeurs de $\Delta(x^m)$, $\Delta^2(x^m)$..... Quand l'exposant m est entier et positif, le nombre de termes du second membre est limité, puisque l'on a vu que $\Delta^{m+1}(x^m)$ et toutes les différences supérieures sont nulles. En faisant successivement $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$,..... on trouve

$$\sum_{x}^{x'} x^0 = \frac{x'-x}{\Delta x},$$

$$\sum_{x}^{x'} x = \frac{x'^2 - x^2}{2\Delta x} - \frac{x'-x}{1.2},$$

$$\sum_{x}^{x'} x^2 = \frac{x'^3 - x^3}{3\Delta x} - \frac{x'^2 - x^2}{2} + \frac{(x'-x)\Delta x}{6},$$

$$\sum_{x}^{x'} x^3 = \text{etc.}\ldots.., \quad \sum_{x}^{x'} x^m = \text{etc.}$$

Si les sommes doivent être prises depuis 0 jusqu'à x, ces expressions deviennent

$$\sum_{0}^{x} x^0 = \frac{x}{\Delta x}, \quad \sum_{0}^{x} x = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{x}{2},$$

$$\sum_{0}^{x} x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x\Delta x}{6}, \quad \sum_{0}^{x} x^3 = \text{etc.}$$

qui font connaître les sommes de toutes les valeurs par lesquelles passent x^0, x, x^2, x^3, etc., tandis que x va en croissant par intervalles égaux à Δx depuis 0 jusqu'à $x - \Delta x$.

Au moyen de ces formules, on peut trouver les sommes de toute fonction entière et rationnelle de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$$

puisqu'on a

$$\Sigma(A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}) = A\Sigma x^0 + B\Sigma x + C\Sigma x^2 + \text{etc.}$$

257. *Intégrations de quelques fonctions transcendantes.* — Quelques fonctions peuvent être intégrées sans l'emploi de la formule générale. Prenons pour exemple la fonction a^x. On a trouvé que

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

On tire de là

$$a^x = \frac{\Delta a^x}{a^{\Delta x} - 1}$$

et en intégrant depuis x' jusqu'à x, et observant que le dénominateur est constant, il vient

$$\sum_{x'}^{x} a^x = \frac{a^x - a^{x'}}{a^{\Delta x} - 1}.$$

On a aussi

$$\Delta \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{1}{2}\Delta x \sin\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right),$$

d'où l'on tire

$$\sin\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) = -\frac{1}{2}\frac{\Delta \cos x}{\sin \frac{1}{2}\Delta x}$$

ou bien en remplaçant $x + \frac{1}{2}\Delta x$ par x,

$$\sin x = -\frac{1}{2}\frac{\Delta \cos\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)}{\sin \frac{1}{2}\Delta x}$$

et en intégrant depuis x' jusqu'à x,

$$\sum_{x'}^{x} \sin x = -\frac{1}{2}\frac{\cos\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)}{\sin \frac{1}{2}\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{\cos\left(x' - \frac{1}{2}\Delta x\right)}{\sin \frac{1}{2}\Delta x}.$$

Si l'on intègre depuis 0 jusqu'à x, il vient

$$\sum_0^x \sin x = \frac{1}{2}\cot\frac{\Delta x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{\sin\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x-\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}}.$$

On trouve de même

$$\sum_{x'}^{x} \cos x = \frac{\sin\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)-\sin\left(x'-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x'-\Delta x}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Ces dernières formules font connaître la somme des sinus et des cosinus d'une table trigonométrique calculés, par exemple, de minute en minute; car il vient

$$\sum_0^{90^\circ} \sin x = \frac{1}{2}\cot\frac{1'}{2} - \frac{1}{2}$$

et comme cette intégrale ne donne la somme des valeurs successives de $\sin x$ que jusqu'à $\sin(90^\circ - 1')$, la somme totale est

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1'}{2} - \frac{1}{2} + \sin 90^\circ = \frac{1}{2}\cot\frac{1'}{2} + \frac{1}{2}.$$

258. *Sommation des suites.* — On peut, au moyen de ce qui précède, déterminer la somme des n premiers termes d'une suite donnée; il suffit pour cela de calculer, comme on l'a vu (N° 244), les différences successives $\Delta\varphi x$, $\Delta^2\varphi x$.... et de substituer ces valeurs dans la formule du N° 254, puisque $\sum_x^{x'} \varphi x$ ou $\sum_x^{x+n\Delta x} \varphi x$ représente la somme cherchée. Il est vrai que pour que cette somme soit exprimée par un nombre limité de termes, il faut que les différences successives soient nulles à partir d'un certain rang ou du moins qu'elles décroissent assez pour que ce second membre forme une série convergente. C'est ainsi que l'on pourrait calculer la somme des logarithmes des nombres entiers entre deux nombres donnés.

Si l'on connaissait la loi de la suite, on pourrait également calculer la somme des n premiers termes; en effet, ν étant l'indice d'un terme

quelconque et $f\nu$ la loi de la suite; comme il suffit de faire ν égal à $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots n$ pour reproduire tous les termes, il est visible que la somme cherchée n'est autre chose que la somme des valeurs que prend $f\nu$ quand on y remplace successivement ν par $1, 2, 3 \ldots\ldots n$, c'est-à-dire qu'elle est l'intégrale de $f\nu$ prise depuis $\nu = 1$ jusqu'à $\nu = n + 1$; on a donc

$$S = \Sigma_{1}^{n+1} f\nu.$$

Prenons pour exemple la suite des nombres naturels. La somme des n premiers nombres est, en se rappelant la formule du N° 254,

$$S = \Sigma_{1}^{n+1} \nu = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Si l'on cherche la somme des carrés des nombres naturels depuis 1 jusqu'à n inclusivement, on aura

$$S = \Sigma_{1}^{n+1} \nu^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{2.3} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

259. *Valeur approchée d'une intégrale définie infinitésimale. Formule de Thomas Simpson.* — Le calcul des différences est utile pour trouver la valeur approchée d'une intégrale définie ordinaire ; supposons en effet qu'on ne puisse intégrer exactement $\varphi x dx$ dont on veut avoir l'intégrale définie depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + b$. On divisera l'intervalle b en un certain nombre de parties égales Δ et l'on sait que l'intégrale cherchée est représentée par

$$\left\{ \varphi a + \varphi(a+\Delta) + \varphi(a+2\Delta) \cdots\cdots + \varphi(a+b-\Delta) \right\} \Delta$$

d'autant plus exactement que Δ sera plus petit. Or, cette expression n'est autre chose que le produit de Δ par $\Sigma_{a}^{a+b} \varphi x$, et si l'on substitue à cette intégrale sa valeur donnée à la fin du N° 254, on trouve pour valeur approchée de l'intégrale,

$$\int_a^{a+b} \varphi x dx = \Delta \left\{ \frac{b}{\Delta} \varphi a + \frac{b}{\Delta}\left(\frac{b}{\Delta} - 1\right) \frac{\Delta \varphi a}{1.2} + \frac{b}{\Delta}\left(\frac{b}{\Delta} - 1\right)\left(\frac{b}{\Delta} - 2\right) \frac{\Delta^2 \varphi a}{1.2.3} + \text{etc.} \right\},$$

expression composée à la vérité d'un nombre illimité de termes, mais qui se simplifie ordinairement parce que les différences de la fonction φ sont négligeables le plus souvent à partir d'un certain ordre.

On trouve une expression plus exacte de l'intégrale de la manière suivante : dans la formule d'interpolation donnée au N° 247, changeons x en a' et désignons Δx par Δ; elle deviendra

$$\varphi(a'+h)=\varphi a'+h\frac{\Delta\varphi a'}{\Delta}+\frac{h(h-\Delta)}{1.2}\frac{\Delta^2\varphi a'}{\Delta^2}+\frac{h(h-\Delta)(h-2\Delta)}{1.2.3}\frac{\Delta^3\varphi a'}{\Delta^3}+\text{etc.}$$

Si l'on multiplie les deux membres par dh et qu'on intègre entre les limites zéro et 2Δ, il vient

$$\int_0^{2\Delta}\varphi(a'+h)\,dh=\Delta\left(2\varphi a'+2\Delta.\varphi a'+\frac{1}{3}\Delta^2.\varphi a'-\frac{1}{90}\Delta^4.\varphi a'+\text{etc.}\right),$$

intégrale que l'on peut changer dans la suivante, en remplaçant $a'+h$ par x,

$$\int_{a'}^{a'+2\Delta}\varphi x dx=\Delta\left(2\varphi a'+2\Delta.\varphi a'+\frac{1}{3}\Delta^2.\varphi a'-\frac{1}{90}\Delta^4.\varphi a'\ldots.\right).$$

Cela posé, divisons l'intervalle b entre les deux limites d'une intégrale cherchée $\int_a^{a+b}\varphi x dx$, en un nombre pair de parties égales Δ et dans la formule précédente, faisons successivement $a'=a$, $a'=a+2\Delta$, $a'=a+4\Delta\ldots..$ $a'=a+(n-2)\Delta=a+b-2\Delta$; la somme des valeurs obtenues représentera l'intégrale de $\varphi x dx$ prise depuis $x=a$ jusqu'à $x=a+b$. On trouve ainsi, toute réduction faite, et en négligeant les différences quatrièmes,

$$\int_a^{a+b}\varphi x dx=\Delta\left\{\begin{array}{l}2\varphi a+2\varphi(a+2\Delta)+2\varphi(a+4\Delta)+\cdots\cdots\quad+2\varphi(a+b-2\Delta)\\ +2\Delta\varphi a+2\Delta\varphi(a+2\Delta)+2\Delta\varphi(a+4\Delta)\ldots.\quad+2\Delta\varphi(a+b-2\Delta)\\ +\frac{1}{3}\Delta^2\varphi a+\frac{1}{3}\Delta^2\varphi(a+2\Delta)+\frac{1}{3}\Delta^2\varphi(a+4\Delta)\cdots\cdots+\frac{1}{3}\Delta^2\varphi(a+b-2\Delta)\end{array}\right\}.$$

On sait que l'on a

$$\Delta\varphi a = \varphi(a+\Delta) - \varphi a$$

$$\Delta\varphi(a+2\Delta) = \varphi(a+3\Delta) - \varphi(a+2\Delta)$$

$$\Delta\varphi(a+4\Delta) = \varphi(a+5\Delta) - \varphi(a+4\Delta)$$

. . . .

$$\Delta^2\varphi a = \varphi(a+2\Delta) - 2\varphi(a+\Delta) + \varphi a$$

$$\Delta^2\varphi(a+2\Delta) = \varphi(a+4\Delta) - 2\varphi(a+3\Delta) + \varphi(a+2\Delta)$$

. . . .

En substituant ces valeurs dans l'expression de l'intégrale, celle-ci devient

$$\int_a^{a+b} \varphi x dx = \frac{\Delta}{3}\Big\{\varphi a + 4\varphi(a+\Delta) + 2\varphi(a+2\Delta) + 4\varphi(a+3\Delta)$$

$$+ 2\varphi(a+4\Delta) \cdots\cdots + 4\varphi[a+(n-1)\Delta] + \varphi(a+b)\Big\},$$

d'où résulte cette règle : *pour avoir une valeur approchée de l'intégrale définie de* $\varphi x dx$ *depuis* $x=a$ *jusqu'à* $x=a+b$, *on divisera l'intervalle* b *en un nombre pair de parties égales* Δ, *on fera successivement dans* φx, $x=a$, $a+\Delta$, $a+2\Delta$, $a+3\Delta$..... $a+b$ *et on multipliera le tiers de l'une des divisions* Δ *par une somme formée par la première et la dernière valeur de la fonction, c'est-à-dire,* $\varphi a + \varphi(a+b)$, *plus quatre fois les fonctions correspondant à des divisions impaires, plus deux fois les fonctions correspondant à des divisions paires.* Cette expression d'une intégrale est connue sous le nom de formule de *Thomas Simpson.*

Si au lieu de négliger les différences 4[mes], on avait poussé l'approximation jusqu'aux différences 5[mes] ou 6[mes], on aurait trouvé d'autres expressions plus exactes de l'intégrale définie, mais elles se présentent sous des formes moins simples et moins régulières.

Il est visible que les différences quatrièmes et suivantes de la fonction φx, qui ont été négligées, ne sont rigoureusement nulles, que si la fonction est de la forme $a+bx+cx^2+ex^3$. Il suit de là que si l'on conçoit la fonction φx développée en série suivant

les puissances croissantes de x, on ne tient compte dans la formule de Simpson que des quatre premiers termes du développement, en négligeant tous les autres. Quand l'intégrale définie est destinée à représenter l'aire d'une courbe, la méthode d'intégration précédente revient visiblement à substituer à la courbe donnée $y=\varphi x$, des arcs de parabole cubique $y=a+bx+cx^2+ex^3$ depuis $x=a$ jusqu'à $x=a+2\Delta$, puis, depuis $x=a+2\Delta$ jusqu'à $x=a+4\Delta$ et ainsi de suite.

En appliquant cette formule à la recherche de l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}},$$

on trouve pour valeur approchée, au lieu de l'expression du N° 146,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}=\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{10}+\frac{4}{\sqrt[3]{1010}}+\frac{2}{\sqrt[3]{1040}}+\frac{4}{\sqrt[3]{1090}}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{4}{\sqrt[3]{1810}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2000}}\right\}.$$

Appliquons encore notre formule au jaugeage des tonneaux. En prenant l'axe du tonneau pour axe des X et $y=fx$ pour équation de la courbe génératrice, le volume sera exprimé par

$$\pi\int_0^a y^2dx,$$

a étant la hauteur du tonneau; or, si l'on en mesure la circonférence, 1° aux deux bases, 2° à égale distance de la base et du milieu, 3° au milieu, et si l'on représente les rayons correspondants par r, r', et r'', il est visible que pour

$$x=0,\quad x=\frac{a}{4},\quad x=\frac{a}{2},\quad x=\frac{3}{4}a,\quad x=a,$$

y^2 sera égal à r^2, r'^2, r''^2, r'^2, et r^2; la valeur de l'intégrale définie précédente est donc

$$\int_0^a y^2dx=\frac{a}{12}(r^2+4r'^2+2r''^2+4r'^2+r^2)$$

et l'on trouve pour la capacité du tonneau,

$$\frac{\pi a}{6}(r^2 + 4r'^2 + r''^2).$$

260. *Intégration des équations implicites aux différences.* — On ne s'est occupé jusqu'ici que de l'intégration des fonctions d'une seule variable. Passons à l'intégration des équations implicites à deux variables, équations que l'on représente d'une manière générale par

$$f(x, y, \Delta x, \Delta y) = 0,$$

ou plutôt, par

$$f(x, y, \Delta y) = 0,$$

attendu qu'on peut toujours faire en sorte que l'accroissement de l'une des deux variables soit égal à l'unité (fin du N° 252). Le cas le plus simple, est celui où la variable dépendante et sa différence sont à la première puissance, et ne sont pas multipliées entre-elles. L'équation aux différences est dite alors *du premier degré et du premier ordre*. Sa forme est

$$\Delta y + Py = Q,$$

P et Q étant des fonctions de x seul. Supposons d'abord, Q égal à zéro. Si l'on remplace y par e^v et Δy par $e^v(e^{\Delta v} - 1)$, il vient

$$e^v(e^{\Delta v} - 1) + Pe^v = 0, \quad \text{d'où} \quad e^{\Delta v} = 1 - P,$$

$$\Delta v = \log(1 - P), \quad v = \Sigma \log(1 - P)$$

et par conséquent

$$y = e^{\Sigma \log(1-P)}.$$

Comme P ne contient que la variable x, on voit que la question est ramenée à l'intégration d'une fonction d'une seule variable x.

En désignant par P_x, $P_{(x-1)}$, $P_{(x-2)}$.... les valeurs de P correspondant à des valeurs x, $x - 1$, $x - 2$.... de la variable, $\Sigma \log(1 - P)$ devient $\log(1 - P_{x-1}) + \log(1 - P_{x-2})\ldots$ ou $\log\{(1 - P_{x-1})(1 - P_{x-2})(1 - P_{x-3})\ldots\}$ et la valeur de y ou l'intégrale, se réduit à

$$y = (1 - P_{x-1})(1 - P_{x-2})(1 - P_{x-3})\ldots..$$

Le facteur $1 - P_x$ n'est pas inscrit, parce que la somme Σ ne comprend pas le terme final correspondant à la variable x entière.

Si P est constant, tous les facteurs binômes sont égaux et l'on a

$$y = (1 - P)^n,$$

n représentant le nombre de ces facteurs, qui est égal au nombre d'accroissements $\Delta x = 1$ compris entre une valeur arbitraire x' de la variable et une valeur finale x, c'est-à-dire $x - x'$; on a donc pour intégrale,

$$y = (1 - P)^{x - x'}.$$

Pour intégrer lorsque le terme Q n'est pas nul, remplaçons y par $u.z$ et Δy par $u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z$. L'équation aux différences se transforme dans la suivante

$$z(\Delta u + Pu) + \Delta z(u + \Delta u) = Q$$

et comme une des deux variables (u, z) est indéterminée, on pourra fixer la valeur de u en posant

$$\Delta u + Pu = 0,$$

qui donne, d'après ce qu'on vient de voir,

$$u = (1 - P_{x-1})(1 - P_{x-2})(1 - P_{x-3}) \ldots\ldots$$

Le reste de l'équation aux différences, savoir :

$$\Delta z(u + \Delta u) = Q$$

donne, en remplaçant u et Δu par leur valeur,

$$\Delta z = \frac{Q}{u + \Delta u} = \frac{Q}{u - Pu} = \frac{Q}{u(1 - P_x)}$$

ou

$$\Delta z = \frac{Q}{(1 - P_x)(1 - P_{x-1})(1 - P_{x-2}) \ldots\ldots},$$

d'où l'on tire

$$z = \Sigma \frac{Q}{(1 - P_x)(1 - P_{x-1})(1 - P_{x-2}) \ldots\ldots}$$

et l'intégrale cherchée devient

$$y = (1 - P_{x-1})(1 - P_{x-2})\ldots\ldots \Sigma \frac{Q}{(1 - P_x)(1 - P_{x-1})(1 - P_{x-2})\ldots\ldots}.$$

On est conduit à une équation aux différences du genre de celle dont on vient de s'occuper, en résolvant le problème suivant : *trouver le terme général d'une série dans laquelle chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une fonction fx de son indice x et en ajoutant au produit une fonction φx du même indice.*

En désignant par y un terme et par x son indice, le suivant sera d'après ces conditions, $fx.y + \varphi x$, et comme il est en général représenté par $y + \Delta y$, on aura

$$y + \Delta y = yfx + \varphi x \quad \text{ou} \quad \Delta y + y(1 - fx) = \varphi x.$$

Pour avoir l'intégrale ou le terme général, il faudra donc remplacer P par $1 - fx$ et Q par φx. Si fx ou f est constant ainsi que φx ou φ, on trouve (N° 257)

$$u = f^{x-x'},\ z = \Sigma \frac{\varphi}{uf} = \frac{\varphi}{f}\Sigma u^{-1} = \frac{\varphi}{f}\Sigma f^{x'-x} = \varphi f^{x'-1}\Sigma f^{-x} = \frac{\varphi f^{x'-1}}{f^{-1}-1}(f^{-x} - f^{-x'});$$

l'intégrale est donc

$$y = \varphi \frac{1 - f^{x-x'}}{1 - f},$$

et cette valeur de y fait connaître la loi de la série. Elle contient une constante arbitraire x'.

261. *Intégration des équations linéaires aux différences d'un ordre quelconque.* — L'intégration d'une équation aux différences est en général d'autant plus difficile que celle-ci est d'un ordre plus élevé. Lorsqu'elle est linéaire par rapport à la fonction y et ses différences, on peut, comme l'a fait remarquer Lagrange, faire dépendre son intégration de l'intégration d'une équation linéaire plus simple. Soit en effet

$$\Delta^n y + A\Delta^{n-1}y + B\Delta^{n-2}y + C\Delta^{n-3}y \ldots\ldots + P\Delta y + Qy = R \ldots\ldots (1)$$

une équation linéaire de l'ordre n, $A, B, C, \ldots\ldots R$ étant des fonctions de x. Supprimons le terme final R et supposons que l'on parvienne à

trouver n valeurs de $y, y', y'', y''',\ldots y^{n+1}$ satisfaisant à l'équation précédente privée du terme final R. En posant

$$y = C'y' + C''y'' + C'''y'''\ldots\ldots + C^{(n)}y^{(n)}\ldots\ldots(2)$$

on aura l'intégrale générale de la proposée, pourvu que $C, C', C'',\ldots$ soient déterminés par les conditions

$$\left.\begin{array}{l}(y' + \Delta y')\Delta C' + (y'' + \Delta y'')\Delta C'' + \text{etc.} = 0,\\ (\Delta y' + \Delta^2 y')\Delta C' + (\Delta y'' + \Delta^2 y'')\Delta C'' + \text{etc.} = 0,\\ (\Delta^2 y' + \Delta^3 y')\Delta C' + (\Delta^2 y'' + \Delta^3 y'')\Delta C'' + \text{etc.} = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\Delta^{n-1}y' + \Delta^n y')\Delta C' + (\Delta^{n-1}y'' + \Delta^n y'')\Delta C'' + \ldots\ldots = R,\end{array}\right\}\ldots\ldots(3)$$

ce qu'on démontre comme on l'a fait au N° 198, pour les équations différentielles linéaires. On prendra pour cela les n différences successives de y et celles-ci, en tenant compte de (3), vérifieront l'équation (1). Les équations (3) en nombre n serviront à déterminer les n différences $\Delta C'$, $\Delta C''$,.... en fonction de y', y'',.... c'est-à-dire en fonction de x, et des intégrations de fonctions d'une seule variable feront connaître C', C''.....

Quand les coefficients $A, B,\ldots. Q$ sont constants et que le terme final R seul est fonction de x, la recherche des intégrales particulières y', y'',.... ne présente pas de difficulté. En effet, comme les différences successives de $(a+1)^x$ prises avec $\Delta x = 1$ sont $(a+1)^x a$, $(a+1)^x a^2\ldots\ldots (a+1)^x a^n$, en posant $y = (a+1)^x$ dans (1) privée du terme final R, l'équation sera satisfaite, pourvu que l'on ait

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2}\ldots\ldots + Pa + Q = 0$$

et les n racines $a', a'', a'''\ldots\ldots$ donneront les valeurs

$$y' = (a'+1)^x, \quad y'' = (a''+1)^x,\ldots\ldots$$

262. *Intégration des équations aux différences mêlées.* — On est souvent conduit, en résolvant des problèmes de géométrie d'une certaine classe, à des équations qui renferment à la fois les différentielles des variables et leurs différences finies. Les équations de cette espèce sont dites *aux différences mêlées*. Prenons pour exemple le problème

suivant : *Trouver une courbe telle que l'aire renfermée entre la courbe et deux ordonnées distantes d'une quantité h, soit dans un rapport constant avec l'aire du trapèze qui a ces deux ordonnées pour bases.* En désignant par y et $y + \Delta y$ les deux ordonnées, par x et $x + h$ les deux abscisses correspondantes et par (x', y') les coordonnées d'un point intermédiaire quelconque de la courbe, l'aire comprise entre la courbe et les deux ordonnées sera représentée par $\int_x^{x+h} y'dx'$ et l'aire du trapèze, par $\frac{h}{2}(y + y + \Delta y)$; l'équation du problème est donc

$$n\int_x^{x+h} y'dx' = \frac{h}{2}(y + y + \Delta y).$$

Or si $y' = fx'$ est l'équation inconnue de la courbe et si l'on désigne par $\varphi x'$ l'intégrale de $y'dx'$ ou $fx'dx'$, l'équation précédente devient

$$n\,[\varphi(x+h) - \varphi x] = \frac{h}{2}[fx + f(x+h)],$$

et en dérivant par rapport à x et observant que la dérivée de φx est fx,

$$2n\,[f(x+h) - fx] = h\,[f'x + f'(x+h)],$$

et enfin en remplaçant $f(x+h) - fx$ par Δfx ou Δy, $f'(x+h)$ par $f'x + \Delta f'x = \frac{dy}{dx} + \Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et h par Δx,

$$2n\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\frac{dy}{dx} + \Delta\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Pour intégrer cette équation aux différences mêlées, remarquons que si l'on pose $y = e^{mx}$, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}, \quad \Delta y = e^{mx}(e^{mh} - 1), \quad \Delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = me^{mx}(e^{mh} - 1).$$

Comme l'équation trouvée est linéaire à coefficients constants, en y faisant les substitutions de ces valeurs, e^{mx} se trouve être facteur commun et l'équation est satisfaite identiquement, pourvu que m soit une des racines de l'équation

$$2n(e^{mh} - 1) = 2mh + mh(e^{mh} - 1) \quad \text{ou} \quad (2n - mh)e^{mh} = 2n + mh.$$

Si m, m', m''.... sont les différentes racines, l'intégrale de l'équation aux différences mêlées et par conséquent l'équation de la courbe cherchée est

$$y = Ce^{mx} + C'e^{m'x} + C''e^{m''x} + \text{etc.}$$

C, C', C''..... étant des constantes arbitraires.

Le problème suivant conduit aussi à une équation aux différences mêlées : *Trouver une courbe telle que l'aire* MM'N (fig. 30) *comprise entre la courbe et une portion* MN *d'une abscisse quelconque, d'une longueur constante h, soit proportionnelle à la puissance* $n^{\text{ième}}$ *de l'abscisse* AP.

En désignant par x l'abscisse AP, par y l'ordonnée correspondante MP et par x'' et y'' les coordonnées d'un autre point quelconque M'' compris entre M et M', la distance de ce point à MN sera égale à $y'' - y$, l'aire MM'N sera donnée par $\int_x^{x+h} (y'' - y)\, dx''$ et l'équation du problème sera

$$\int_x^{x+h} (y'' - y)\, dx'' = ax^n \quad \text{ou} \quad \int_x^{x+h} y''dx'' - \int_x^{x+h} ydx'' = ax^n.$$

Comme l'intégration se rapporte aux variables (x'', y''), x et y restant invariables, si l'on désigne par $y'' = fx''$ l'équation de la courbe et par Fx'' l'intégrale de $fx''dx''$, l'équation précédente est l'équivalent de celle-ci

$$F(x + h) - Fx - yh = ax^n.$$

Si l'on dérive les deux membres par rapport à x et qu'on remarque que la dérivée de Fx n'est autre que fx, l'équation devient

$$f(x + h) - fx - h\frac{dy}{dx} = nax^{n-1},$$

c'est-à-dire,

$$\Delta fx - h\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{nax^{n-1}}{h}.$$

Pour intégrer, l'on supposera n entier et positif et l'on dérivera n fois par rapport à x, ce qui transforme l'équation du problème dans la suivante

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d^n\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{dx^n}.$$

Elle est identiquement satisfaite en posant

$$y = Cx^m,$$

pourvu que m soit entier, positif et inférieur à $n+1$ ou, au plus, égal à $n+1$. Comme elle est linéaire elle est aussi satisfaite en égalant y à la somme de ces valeurs ; l'intégrale générale est donc

$$y = Cx^{n+1} + C'x^n + C''x^{n-1} \ldots\ldots + C^{(n)}x + C^{(n+1)}.$$

Les coefficients C, C'..... ne sont pas arbitraires, car en substituant cette valeur de y dans l'équation primitive aux différences mêlées, on trouve que celle-ci n'est identiquement satisfaite que si l'on pose

$$C = \frac{2a}{h^2(n+1)}, \quad C' = \frac{-2a}{3h}, \quad C'' = \frac{an}{18}, \quad C''' = \text{etc.}$$

Les constantes $C^{(n)}$ et $C^{(n+1)}$ restent seules arbitraires.

La branche d'analyse qui fait l'objet de ce paragraphe, a été peu cultivée jusqu'aujourd'hui et les géomètres qui s'en sont occupés ne lui ont fait faire que peu de progrès ; aussi n'est-ce que dans des cas peu nombreux et pour des formes très particulières que l'on parvient, dans l'état actuel de la science, à intégrer les équations aux différences mêlées.

CHAPITRE XIX.

Objet de la méthode des variations. Variation d'une fonction d'une seule variable. — Variation des dérivées d'une fonction d'une seule variable. — Variation d'une fonction de deux variables. — Variation d'une fonction contenant une variable indépendante, une variable dépendante et ses dérivées. — Variation d'une intégrale définie. — Cas des limites fixes. Limites variables. — Variation d'une intégrale définie contenant plusieurs variables dépendantes. — Applications de la méthode des variations à la détermination des maximum et minimum. — Maximum ou minimum d'une intégrale définie. Conditions relatives aux limites. Équation indéfinie. — Autres conditions relatives aux limites. — Problèmes divers. — Surface de moindre résistance. — Maximum relatif. — Applications diverses. — Cas où l'intégrale contient plusieurs variables dépendantes. — Brachystochrône. — Lignes maximum et minimum tracées sur une surface ou lignes géodésiques. — Propriétés des lignes maximum et minimum tracées sur une surface. — Courbe de plus vite descente sur une surface, et courbe de plus grande pente. — Caractère distinctif des maximum et des minimum.

263. *Objet de la méthode des variations. Variation d'une fonction d'une seule variable.* — Le calcul différentiel avait particulièrement pour objet de déterminer pour une fonction donnée, le rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement infiniment petit de la variable et de remonter de la valeur de ce rapport, aux propriétés de la fonction; mais cette recherche peut être envisagée à un point de vue beaucoup plus général. Au lieu de supposer à la fonction une forme invariable, admettons qu'elle passe d'une manière continue par

toutes les formes possibles; alors un changement infiniment petit dans cette forme joint à un accroissement infiniment petit de la variable, déterminera dans la fonction un accroissement essentiellement différent de celui que donne le calcul différentiel proprement dit et l'on peut se proposer, par exemple, de trouver la forme de la fonction par la condition que ce dernier accroissement jouisse de certaines propriétés données.

L'accroissement que prend la fonction $y = fx$ dans ce nouvel ordre d'idées et qui est dû en partie à un accroissement de la variable x et en partie au changement dans la forme de la fonction fx, se nomme *variation de y* et se désigne par δy. L'accroissement infiniment petit donné à x est entièrement arbitraire et se désigne par δx pour l'uniformité de la notation. Pour déterminer la variation δy, concevons la fonction fx de forme arbitraire, développée suivant les puissances entières et ascendantes de $x + \alpha$, α étant une constante quelconque; on aura (*)

$$y = a + b(x + \alpha) + c(x + \alpha)^2 + e(x + \alpha)^3 + \text{etc.}$$

Comme ce développement peut représenter toutes les fonctions, il est visible que l'on obtiendra toutes les formes possibles de la fonction fx par le seul changement des coefficients a, b, c, e..... Il suit de là que pour introduire un changement infiniment petit arbitraire dans la forme de cette fonction, il suffit de donner à ces coefficients des accroissements infiniment petits $\delta a, \delta b, \delta c$... entièrement arbitraires et par conséquent indépendants entre eux. La variation de y ne sera autre chose que la différentielle totale de cette série, indiquée avec le signe δ et prise aussi bien par rapport à x que par rapport à a, b, c....; on aura par conséquent

$$\delta y = b\delta x + 2c(x + \alpha)\delta x + 3e(x + \alpha)^2 \delta x + \text{etc.}$$

$$+ \delta a + \delta b(x + \alpha) + \delta c(x + \alpha)^2 + \text{etc.}$$

(*) On développe suivant les puissances de $x + \alpha$ au lieu de x, pour embrasser le cas où la fonction ne serait pas développable suivant les puissances entières et positives de la variable x. On pourrait du reste employer le développement suivant les puissances de la simple variable, mais en laissant alors les exposants arbitraires.

ou bien (*)

$$\delta y = [b + 2c(x+\alpha) + 3e(x+\alpha)^2 + \text{etc.}]\,\delta x$$
$$+ \delta a + (x+\alpha)\,\delta b + (x+\alpha)^2\,\delta c + \text{etc.}$$

Or, il est visible que la fonction comprise entre les parenthèses n'est autre chose que la dérivée ordinaire de la série ou de y, dérivée que nous désignerons par $p = \frac{dy}{dx}$. Le reste de la variation de y est la partie qui est due au changement de forme de la fonction. Comme elle est arbitraire, nous la désignerons par la lettre Δ et l'équation précédente deviendra

$$\delta y = p\,\delta x + \Delta.$$

264. *Variations des dérivées d'une fonction d'une seule variable.* — Les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., que nous représenterons par $p, q, r, \ldots$ étant elles-mêmes des fonctions de x, a, b, c, etc., ont aussi leur variation, et il existe une dépendance remarquable entre ces variations et celle de y ; en effet puisque l'on a

$$p = b + 2c(x+\alpha) + 3e(x+\alpha)^2 + \text{etc.}$$
$$q = 2c + 2.3e(x+\alpha) + 3.4g(x+\alpha)^2 + \text{etc.}$$
$$r = 1.2.3e + 2.3.4.g(x+\alpha) + \text{etc.},$$

(*) Remarquons que, puisque l'on a

$$dy = \{b + 2c(x+\alpha) + 3e(x+\alpha)^2 + 4g(x+\alpha)^3 + \text{etc.}\}\,dx,$$
$$\delta y = \{b + 2c(x+\alpha) + 3e(x+\alpha)^2 + 4g(x+\alpha)^3 + \text{etc.}\}\,\delta x,$$
$$+ \delta a + (x+\alpha)\,\delta b + (x+\alpha)^2\,\delta c + \text{etc.},$$

il en résulte que l'on a aussi

$$\delta(dy) = \{2c + 2.3e(x+\alpha) + 3.4g(x+\alpha)^2 + \text{etc.}\}\,dx\,\delta x$$
$$+ \{\delta b + 2(x+\alpha)\,\delta c + 3(x+\alpha)^2\,\delta e + \text{etc.}\}\,dx$$
$$d(\delta y) = \{2c + 2.3e(x+\alpha) + 3.4g(x+\alpha)^2 + \text{etc.}\}\,\delta x\,dx$$
$$+ \{\delta b + 2(x+\alpha)\,\delta c + 3(x+\alpha)^2\,\delta e + \text{etc.}\}\,dx$$

et que par conséquent on a identiquement

$$\delta dy = d\delta y \quad \text{ou} \quad \delta d f x = d \delta f x,$$

identité qui sert de fondement à l'exposition de la méthode des variations dans la plupart des traités.

on trouve

$$\delta p = [2c + 2.3e(x+\alpha) + 3.4g(x+\alpha)^2 + \text{etc.}]\delta x + \delta b + 2(x+\alpha)\,\delta c + 3(x+\alpha)^2\delta e + \text{etc.}$$

$$\delta q = [2.3e + 2.3.4g(x+\alpha) + \text{etc.}]\delta x + 2\delta c + 2.3(x+\alpha)\,\delta e + 3.4(x+\alpha)^2\,\delta g + \text{etc.}$$

$$\delta r = \text{etc.}$$

valeurs qui reviennent évidemment aux suivantes :

$$\delta p = \frac{dp}{dx}\delta x + \delta b + 2(x+\alpha)\,\delta c + 3(x+\alpha)^2\,\delta e + \text{etc.}$$

$$\delta q = \frac{dq}{dx}\delta x + 2\delta c + 2.3(x+\alpha)\,\delta e + 3.4(x+\alpha)^2\,\delta g + \text{etc.}$$

$$\delta r = \text{etc.}$$

Or, si l'on différencie par rapport à x la valeur de Δ, en remarquant que δa, δb, δc,.... sont des quantités indépendantes de x, on trouve

$$\Delta = \delta a + (x+\alpha)\,\delta b + (x+\alpha)^2\,\delta c + \text{etc.}, \quad \frac{d\Delta}{dx} = \delta b + 2(x+\alpha)\,\delta c$$

$$+ 3(x+\alpha)^2\delta e + \text{etc.}, \quad \frac{d^2\Delta}{dx^2} = 2\delta c + 2.3(x+\alpha)\,\delta e + \text{etc.}$$

Les valeurs de δp, δq..... prennent donc la forme

$$\delta y = p\delta x + \Delta,$$

$$\delta p = q\delta x + \frac{d\Delta}{dx},$$

$$\delta q = r\delta x + \frac{d^2\Delta}{dx^2},$$

$$\delta r = \ldots\ldots$$

265. *Variation d'une fonction de deux variables.* — Cela posé, considérons la fonction

$$V = f(x, y)$$

dans laquelle x et y sont deux variables indépendantes et f une fonction de forme déterminée. Puisque des accroissements dx et dy font prendre à V l'accroissement

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy,$$

il est clair que des accroissements δx et δy communiqueront à V la variation

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y.$$

Si y, au lieu d'être indépendant de x, était une fonction indéterminée de cette variable, pour faire varier infiniment peu la fonction, δy devrait être remplacé par la valeur trouvée ci-dessus, $p\delta x + \Delta$, et il viendrait

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dy}\right)\delta x + \frac{dV}{dy}\Delta;$$

or, en désignant par dV la différentielle totale de la fonction V, on a, dans le cas où y est une fonction de x,

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy = \left(\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dy}\right)dx;$$

la valeur de δV prend donc la forme

$$\delta V = dV\frac{\delta x}{dx} + \frac{dV}{dy}\Delta.$$

266. *Variation d'une fonction contenant une variable indépendante, une variable dépendante et ses dérivées.* — Si l'on avait

$$V = f(x, y, p, q, r, \ldots),$$

f étant une fonction de forme déterminée et x, y, p, q, r, etc., des variables indépendantes entre elles, il viendrait encore, d'après les principes de la différenciation,

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dp}\delta p + \frac{dV}{dq}\delta q + \text{etc.};$$

mais si y est une fonction indéterminée de x et p, q, r, etc. les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc., il faut pour faire varier infiniment peu cette fonction y, remplacer $\delta y, \delta p, \delta q, \ldots$ par leur valeur trouvée plus haut, et il vient

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}p + \frac{dV}{dp}q + \text{etc.}\right)\delta x + \Delta\frac{dV}{dy} + \frac{d\Delta}{dx}\frac{dV}{dp} + \frac{d^2\Delta}{dx^2}\frac{dV}{dq} + \text{etc.}$$

La différentielle totale de V est exprimée par

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx}dx + \frac{dV}{dp}\frac{dp}{dx}dx + \text{etc.}$$

$$= \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}p + \frac{dV}{dp}q + \text{etc.}\right)dx;$$

la valeur de δV se réduit donc à

$$\delta V = dV\frac{\delta x}{dx} + \Delta\frac{dV}{dy} + \frac{d\Delta}{dx}\frac{dV}{dp} + \frac{d^2\Delta}{dx^2}\frac{dV}{dq} + \text{etc.}$$

D'un autre côté, comme on a en général

$$udv = d(uv) - vdu,$$

il en résulte que l'on a aussi, en désignant par $\frac{1}{dx}\cdot\frac{d^2V}{dp}$ la dérivée seconde de V, totale par rapport à x et partielle par rapport à p,

$$\frac{dV}{dp}d\Delta = d\left(\Delta\frac{dV}{dp}\right) - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}\Delta dx,$$

$$\frac{dV}{dq}\frac{d^2\Delta}{dx} = d\left(\frac{dV}{dq}\frac{d\Delta}{dx}\right) - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dq}d\Delta$$

$$= d\left(\frac{dV}{dq}\frac{d\Delta}{dx}\right) - d\left(\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dq}\Delta\right) + \frac{1}{dx^2}\frac{d^3V}{dq}\Delta dx,$$

. . . .

valeurs qui font prendre à δV la forme suivante :

$$\delta V = dV\frac{\delta x}{dx} + \Delta\left\{\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} + \frac{1}{dx^2}\frac{d^3V}{dq} - \frac{1}{dx^3}\frac{d^4V}{dr} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ \frac{1}{dx}d\left\{\Delta\left(\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dq} + \frac{1}{dx^2}\frac{d^3V}{dr} - \ldots\ldots\right)\right.$$

$$\left. + \frac{d\Delta}{dx}\left(\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dr} + \cdots\right) + \frac{d^2\Delta}{dx^2}\left(\frac{dV}{dr} - \cdots\right) + \ldots\ldots\right\}.$$

Si la fonction V contenait une seconde variable z fonction indéterminée de la variable indépendante x, ainsi que les dérivées de z que nous désignerons par $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$,.... en représentant par $\Delta_{,}$ la quantité analogue à Δ, c'est-à-dire, en faisant

$$\delta z = p_{,}\delta x + \Delta_{,}, \quad \delta p_{,} = q_{,}\delta x + \frac{d\Delta_{,}}{dx}, \quad \delta q_{,} = r_{,}\delta x + \frac{d^2\Delta_{,}}{dx^2}, \text{ etc.},$$

on trouverait l'expression suivante de la variation totale de V,

$$\delta V = dV\frac{\delta x}{dx} + \Delta\frac{dV}{dy} + \Delta_{,}\frac{dV}{dz} + \frac{d\Delta}{dx}\frac{dV}{dp} + \frac{d\Delta_{,}}{dx}\frac{dV}{dp_{,}} + \frac{d^2\Delta}{dx^2}\frac{dV}{dq}$$

$$+ \frac{d^2\Delta_{,}}{dx^2}\frac{dV}{dq_{,}} + \text{etc.}$$

à laquelle on donnera par des intégrations par parties, comme plus haut, la forme suivante :

$$\delta V = dV\frac{\delta x}{dx} + \Delta\left\{\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} + \text{etc.}\right\} + \Delta_{,}\left\{\frac{dV}{dz} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ \frac{1}{dx}d\left[\Delta\left\{\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dq} + \text{etc.}\right\} + \Delta_{,}\left\{\frac{dV}{dp_{,}} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dq_{,}} + \text{etc.}\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{d\Delta}{dx}\left\{\frac{dV}{dq} - \text{etc.}\right\} + \frac{d\Delta_{,}}{dx}\left\{\frac{dV}{dq_{,}} - \text{etc.}\right\} + \text{etc.}\right].$$

267. *Variation d'une intégrale définie.* — Enfin si l'on considère une intégrale définie de la forme

$$u = \int_{x'}^{x''} f(x, y, p, q, r, ...)\,dx = \int_{x'}^{x''} V dx,$$

il est évident que des accroissements δx, δy, δp, δq,.... donnés aux variables x, y, p, q,.... contenues dans V, feront prendre à $\int_{x'}^{x''} V dx$ l'accroissement ou la variation suivante

$$\int_{x'}^{x''}(V + \delta V)\,d(x + \delta x) - \int_{x'}^{x''} V dx = \int_{x'}^{x''}\left\{\delta V d(x + \delta x) + V d\delta x\right\}$$

ou plutôt (*)

$$\int_{x'}^{x''} (\delta V dx + V d\delta x),$$

en négligeant δx devant x d'après l'esprit du calcul différentiel, variation qui devient, en remplaçant δV par sa valeur trouvée plus haut,

$$\int_{x'}^{x''} \left[V d\delta x + d V \delta x + \Delta \left\{ \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2 V}{dp} + \frac{1}{dx^2}\frac{d^3 V}{dq} - \text{etc.} \right\} dx \right.$$

$$\left. + d \left\{ \Delta \left(\frac{dV}{dp} - \text{etc.} \right) + \frac{d\Delta}{dx} \left(\frac{dV}{dq} - \text{etc.} \right) + \text{etc.} \right\} \right].$$

Remarquons que $V d\delta x + d V \delta x$ est la différentielle du produit $V\delta x$ et que par conséquent l'intégrale définie de ces deux premiers termes est $V''\delta x'' - V'\delta x'$ que nous désignerons par $\left[V\delta x \right]_{x'}^{x''}$. Remarquons aussi que la fonction représentée par la dernière accolade dans l'expression qui précède, étant une différentielle totale, a pour intégrale définie, en adoptant cette nouvelle notation,

$$\left[\Delta \left(\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx}\frac{d^2 V}{dq} + \text{etc.} \right) \right]_{x'}^{x''} + \left[\frac{d\Delta}{dx} \left(\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx}\frac{d^2 V}{dr} + \text{etc.} \right) \right]_{x'}^{x''}$$

$$+ \left[\frac{d^2\Delta}{dx^2} \left(\frac{dV}{dr} - \text{etc.} \right) \right]_{x'}^{x''} + \text{etc.}$$

(*) On peut faire ici une remarque analogue à celle de la note de la page 549. Si dans l'égalité qu'on vient de trouver

$$\delta \int_{x'}^{x''} V dx = \int_{x'}^{x''} (\delta V dx + V d\delta x),$$

on remplace $d\delta x$ par δdx, il vient

$$\delta \int_{x'}^{x''} V dx = \int_{x'}^{x''} \delta V dx + V d\delta x = \int_{x'}^{x''} \delta (V dx),$$

parce que l'on a d'après les principes du calcul différentiel,

$$\delta (uv) = u\delta v + v\delta u.$$

La variation de l'intégrale définie $\int_{x'}^{x''} V dx$ prend donc la forme

$$\delta \int_{x'}^{x''} V dx = \Big[V\delta x \Big]_{x'}^{x''} + \left[\Delta\left(\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dq} + \frac{1}{dx^2}\frac{d^3V}{dr} - \text{etc.}\right)\right]_{x'}^{x''}$$

$$+ \left[\frac{d\Delta}{dx}\left(\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dr} + \text{etc.}\right)\right]_{x'}^{x''} + \left[\frac{d^2\Delta}{dx^2}\left(\frac{dV}{dr} - \text{etc.}\right)\right]_{x'}^{x''} \cdots\cdots$$

$$+ \int_{x'}^{x''} \left(\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} + \frac{1}{dx^2}\frac{d^3V}{dq} - \text{etc.}\right)\Delta dx.$$

268. *Cas des limites fixes. Limites variables.* — Si les limites x' et x'' de l'intégrale définie sont invariables, le premier terme du second membre ou $\Big[V\delta x\Big]_{x'}^{x''}$ qui n'est autre chose que $V''\delta x'' - V'\delta x'$, devra disparaître, parce que $\delta x''$ et $\delta x'$ seront nulles. Si au contraire les limites sont variables, ce terme doit être maintenu et il représente l'accroissement qui résulte pour l'intégrale, d'une variation dans la valeur des limites x' et x'' (*).

Dans plusieurs problèmes dépendants de la méthode des variations, la fonction V contient implicitement les coordonnées x', y', x'', y'', correspondant aux limites de l'intégrale, ainsi que les dérivées $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{dy''}{dx''}$ etc., ou p', p'', q', q'', etc. Quand cela a lieu et que ces quantités

(*) Il semble que pour avoir la variation complète de $\int_{x'}^{x''} V dx$ dans le cas de x' et x'' variables, il ne suffit pas, comme on l'a supposé, de faire croître les variables contenues dans V, et qu'il faut encore donner aux limites x' et x'' de l'intégrale, des accroissements $\delta x'$ et $\delta x''$; mais il est à remarquer que, du chef de ces accroissements, la variation de l'intégrale devrait être augmentée aux deux limites d'un élément différentiel, c'est-à-dire, de $\delta (V''dx'') - \delta (V'dx')$, quantité négligeable devant la variation trouvée plus haut, puisque cette quantité est infiniment petite du second ordre.

ne sont pas invariables, il faut pour avoir la valeur la plus générale de la variation de l'intégrale définie, faire prendre à ces quantités des accroissements $\delta x', \delta x'', \delta p', \delta p'', \delta q'$, etc., ce qui produit dans $\int_{x'}^{x''} V dx$ un accroissement égal à

$$\int_{x'}^{x''} \left(\frac{dV}{dx'}\delta x' + \frac{dV}{dx''}\delta x'' + \frac{dV}{dy'}\delta y' + \frac{dV}{dy''}\delta y'' + \frac{dV}{dp'}\delta p' \text{ etc.} \right) dx$$

$$= \int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx'}\delta x' dx + \int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx''}\delta x'' dx + \text{etc.}$$

qu'on peut écrire ainsi

$$\delta x' \int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx'} dx + \delta x'' \int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx''} dx + \text{etc.},$$

parce que $\delta x'$, $\delta x''$ se rapportent à un point déterminé et sont par conséquent des facteurs communs dans ces intégrales, et cette somme doit être jointe à la variation de $\int_{x'}^{x''} V dx$ trouvée plus haut.

Si les données de la question établissaient entre x', x'', y', y'', p', etc. une relation

$$f(x', x'', y', y'', p', p'', q' \ldots\ldots) = 0,$$

on serait conduit par la différenciation à une relation entre les accroissements ou variations de ces quantités, de la forme

$$A\delta x' + B\delta x'' + C\delta y' \cdots\cdots = 0$$

au moyen de laquelle l'une de ces variations pourrait être éliminée de la somme qu'on vient de trouver.

En remplaçant Δ, $\frac{d\Delta}{dx}$, $\frac{d^2\Delta}{dx^2}$, etc., par leur valeur $\delta y - p\delta x$, $\delta p - q\delta x$, $\delta q - r\delta x$, etc., la variation d'une intégrale définie prend

la forme

$$\int_{x'}^{x''} V dx = \left\{ V'' - p''\left(\frac{dV''}{dp''} - \frac{1}{dx''}\frac{d^2V''}{dq''} + \text{etc.}\right) - q''\left(\frac{dV''}{dq''} - \frac{1}{dx''}\frac{d^2V''}{dr''} + \text{etc.}\right) - r''() \right\}\delta x''$$

$$- \left\{ V' - p'\left(\frac{dV'}{dp'} - \frac{1}{dx'}\frac{d^2V'}{dq'} + \text{etc.}\right) - q'\left(\frac{dV'}{dq'} - \frac{1}{dx'}\frac{d^2V'}{dr'} + \text{etc.}\right) - r'() \right\}\delta x'$$

$$+ \left\{ \frac{dV''}{dp''} - \frac{1}{dx''}\frac{d^2V''}{dq''} + \text{etc.} \right\}\delta y'' - \left\{ \frac{dV'}{dp'} - \frac{1}{dx'}\frac{d^2V'}{dq'} + \text{etc.} \right\}\delta y'$$

$$+ \left\{ \frac{dV''}{dq''} - \frac{1}{dx''}\frac{d^2V''}{dr''} + \text{etc.} \right\}\delta p'' - \left\{ \frac{dV'}{dq'} - \frac{1}{dx'}\frac{d^2V'}{dr'} + \text{etc.} \right\}\delta p'$$

. . . .

$$+ \int_{x'}^{x''} \left(\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} + \frac{1}{dx^2}\frac{d^3V}{dq} - \text{etc.} \right) \Delta dx,$$

et pour y ajouter les termes $\delta x' \int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx'} dx + \delta x'' \int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx''} dx + \text{etc.}$, provenant de la variation des limites, il suffira d'ajouter aux coefficients précédents de $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta y'$, etc., les intégrales $\int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx'} dx, \int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx''} dx$, etc. (*)

(*) Cette expression de la variation d'une intégrale définie serait encore vraie pour une intégrale indéfinie; il suffirait de remplacer x'', y'', p'', q''..... par x, y, p, q.... Sous cette nouvelle forme, elle peut servir à démontrer, d'une manière indirecte à la vérité, un théorème important du calcul intégral. Si Vdx, c'est-à-dire, $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\right)dx$ était la différentielle exacte d'une fonction U de la forme $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\right)$, la variation de l'intégrale $\int Vdx$ se confondrait avec la variation de U. Or, on a vu au N° 266, que la variation de $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\right)$ ne contient aucun terme sous forme d'intégrale; il faut donc, quand Vdx est une différentielle exacte, que l'intégrale qui entre dans l'expression de la variation de $\int Vdx$, disparaisse également, ce qui n'arrive que

269. *Variation d'une intégrale définie contenant plusieurs variables dépendantes.* — Si la fonction V, outre la variable dépendante y et ses dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., contenait une seconde variable dépendante z fonction indéterminée de x, ainsi que ses dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, etc., ou $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$,..... la variation de l'intégrale définie deviendrait, d'après ce qu'on a vu au N° 266,

$$\begin{aligned}\delta\int_{x'}^{x''}Vdx = V''\delta x'' - V'\delta x' + \Delta''\left(\frac{dV''}{dp''}-\text{etc.}\right) - \Delta'\left(\frac{dV'}{dp'}-\text{etc.}\right)\\ +\frac{d\Delta''}{dx''}\left(\frac{dV''}{dq''}-\text{etc.}\right)-\frac{d\Delta'}{dx'}\left(\frac{dV'}{dq'}-\text{etc.}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ +\int_{x'}^{x''}\Delta dx\left(\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\text{etc.}\right)\\ +\Delta_{,}''\left(\frac{dV''}{dp_{,}''}-\text{etc.}\right)-\Delta_{,}'\left(\frac{dV'}{dp_{,}'}-\text{etc.}\right)\\ +\frac{d\Delta_{,}''}{dx''}\left(\frac{dV''}{dq_{,}''}-\text{etc.}\right)-\frac{d\Delta_{,}'}{dx'}\left(\frac{dV'}{dq_{,}'}-\text{etc.}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ +\int_{x'}^{x''}\Delta_{,}dx\left(\frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}}+\text{etc.}\right)\end{aligned}$$

si l'on a identiquement

$$\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\frac{1}{dx^2}\frac{d^3V}{dq}-\text{etc.}=0,$$

puisque Δ placé sous le signe d'intégration est une quantité qui doit rester arbitraire et que par conséquent l'intégration indiquée est impossible sans cette équation. Telle est donc la condition nécessaire pour que Vdx soit une différentielle exacte. Cette condition est aussi suffisante, car elle rend la variation $\delta\int Vdx$ indépendante de toute intégrale, ce qui, visiblement, n'a jamais lieu lorsque $\int Vdx$ n'est pas une fonction de la forme $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\cdots\cdots\right)$.

qui, après que l'on aura remplacé $\Delta, \frac{d\Delta}{dx}, \ldots\ldots \Delta_{,}, \frac{d\Delta_{,}}{dx}$, etc., par leur valeur $\partial y - p\partial x$, $\partial p - q\partial x \ldots\ldots$ $\partial z - p_{,}\partial x$, $\partial p_{,} - q_{,}\partial x, \ldots\ldots$, prendra la forme

$$\partial \int_{x'}^{x''} Vdx = \Big\{ V'' - p''\left(\frac{dV''}{dp''} - \text{etc.}\right) - q''\left(\frac{dV''}{dq''} - \text{etc.}\right) \ldots\ldots$$

$$- p_{,}''\left(\frac{dV''}{dp_{,}''} - \text{etc.}\right) - q_{,}''\left(\frac{dV''}{dq_{,}''} - \text{etc.}\right) \ldots\ldots \Big\} \partial x''$$

$$- \Big\{ V' - p'\left(\frac{dV'}{dp'} - \text{etc.}\right) - q'\left(\frac{dV'}{dq'} - \text{etc.}\right) \ldots\ldots - p_{,}'\left(\frac{dV'}{dp_{,}'} - \text{etc.}\right)$$

$$- q_{,}'\left(\frac{dV'}{dq_{,}'} - \text{etc.}\right) \ldots\ldots \Big\} \partial x'$$

$$+ \left(\frac{dV''}{dp''} - \frac{1}{dx''}\frac{d^2V''}{dq''} + \text{etc.}\right)\partial y'' + \left(\frac{dV''}{dq''} - \text{etc.}\right)\partial p'' \ldots\ldots$$

$$+ \left(\frac{dV''}{dp_{,}''} - \frac{1}{dx''}\frac{d^2V''}{dq_{,}''} + \text{etc.}\right)\partial z'' + \left(\frac{dV''}{dq_{,}''} - \text{etc.}\right)\partial p_{,}'' \ldots\ldots$$

$$- \left(\frac{dV'}{dp'} - \frac{1}{dx'}\frac{d^2V'}{dq'} + \text{etc.}\right)\partial y' - \left(\frac{dV'}{dq'} - \text{etc.}\right)\partial p' \ldots\ldots$$

$$- \left(\frac{dV'}{dp_{,}'} - \frac{1}{dx'}\frac{d^2V'}{dq_{,}'} + \text{etc.}\right)\partial z' + \left(\frac{dV'}{dq_{,}'} - \text{etc.}\right)\partial p_{,}' \ldots\ldots$$

$$+ \int_{x'}^{x''} \left[\left(\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} + \text{etc.}\right)\partial y + \left(\frac{dV}{dz} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}} + \text{etc.}\right)\partial z \right.$$

$$\left. - \Big\{ p\left(\frac{dV}{dy} - \text{etc.}\right) + p_{,}\left(\frac{dV}{dz} - \text{etc.}\right) \Big\} \partial x \right] dx.$$

270. *Applications de la méthode des variations à la détermination des maximum et minimum.* — La théorie des maximum et minimum exposée dans le calcul différentiel, a pour but de trouver la valeur de x qui rend y maximum ou minimum dans une équation de forme déterminée en x et y. La méthode employée pour cette recherche est fondée sur ce que, au moment du passage de la fonction y par le maximum ou le minimum, un accroissement infiniment petit donné à la variable indépendante x ne produit pas d'accroissement dans la

fonction y, c'est-à-dire sur ce que la différentielle de la fonction y est nulle. Le calcul des variations a particulièrement pour but de traiter la question des maximum à un autre point de vue ; ici la relation entre x et y est indéterminée et on se propose de la déterminer par la condition qu'une certaine quantité exprimée par une fonction donnée de (x, y) et des dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$..... soit un maximum ou un minimum. Par un raisonnement semblable à celui employé dans le calcul différentiel, on reconnaît que si l'on donne à x un accroissement différentiel et qu'on introduise dans la relation entre x et y un changement infiniment petit entièrement arbitraire, il en résulte dans la fonction donnée un certain accroissement qui doit être nul au moment du maximum ou du minimum. Or, introduire un changement infiniment petit dans la valeur de x et dans la relation entre x et y, c'est faire croître ces quantités de leur variation, et l'accroissement qui en résultera dans la fonction donnée de x, y, p, q,.... n'est par conséquent autre chose que la variation de cette fonction ; c'est donc cette variation qui doit être nulle pour que la fonction soit maximum ou minimum.

271. *Maximum ou minimum d'une intégrale définie. Conditions relatives aux limites. Équation indéfinie.* — Cela posé, représentons par V une fonction donnée de x, y, p, q, r,.... et proposons-nous de trouver, parmi toutes les relations possibles entre x et y, celle qui rend la fonction $\int_{x'}^{x''} V dx$ maximum ou minimum. Il résulte de ce qui précède qu'il faut pour cela, égaler à zéro la variation de cette intégrale définie, variation que nous représenterons pour abréger par

$$A'\delta x' + A''\delta x'' + B'\delta y' + B''\delta y'' + C'\delta p' + C''\delta p'' \cdots + \int_{x'}^{x''} U \Delta dx$$

et qui se compose d'une suite de termes multipliés respectivement par les variations de x, y, p, q,.... prises aux deux extrémités de l'intégrale et d'une intégrale définie. Si les extrémités de l'intégrale ne sont soumises à aucune condition particulière, les variations $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta p'$,..... sont entièrement arbitraires, et comme l'intégrale définie qui entre dans l'expression de la variation représente elle-même la somme des valeurs de $U dx$ multipliées respectivement par Δ, qui est un coefficient entièrement arbitraire pour chaque élément de l'intégrale, on voit que la variation d'une intégrale définie se compose

d'une somme de produits de certains facteurs par des coefficients entièrement indéterminés. On conclut de là que chaque facteur doit être nul séparément(*) c'est-à-dire que A', A'', B', B'',.... doivent être égalés à zéro ainsi que toutes les valeurs par lesquelles passe U entre les deux limites de l'intégrale, ou que l'on doit avoir pour une valeur quelconque de x,

$$U = 0.$$

Cette équation différentielle se rapportant à toutes les valeurs de x, comprises entre les deux extrémités de l'intégrale, est une *équation indéfinie*, tandis que les premières ne se rapportent qu'à l'une des deux extrémités de l'intégrale.

272. *Autres conditions relatives aux limites.* — Quelquefois les extrémités de l'intégrale sont fixes; c'est ce qui aurait lieu pour une question de cette nature : mener entre deux points donnés la courbe qui jouit de certaine propriété maximum ou minimum. Dans ce cas les variations $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta y'$, $\delta y''$ sont nulles et les termes qui les contiennent disparaissent de l'équation sans donner lieu à aucune équation de condition. Si l'on donnait la direction fixe du premier élément de la courbe, ou celle des deux ou trois premiers éléments, ce qui revient à donner les valeurs fixes de p, de p et q, ou de p, q, r pour les extrémités de la courbe, alors les variations $\delta p'$, $\delta p''$, $\delta q'$, $\delta q''$,..... seraient aussi nulles. Dans certains cas, les variations extrêmes $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$,.... ne sont pas entièrement indépendantes. C'est ce qui arriverait si les coordonnées $(x'y')$ et $(x''y'')$ devaient satisfaire à certaines conditions exprimées par des équations entre $(x'y')$ et $(x''y'')$, si les extrémités étaient assujetties, par exemple, à demeurer sur des courbes données. Il est visible que les accroissements $\delta x'$ et $\delta y'$ dépendraient alors de la forme de cette courbe et qu'il existerait entre ces variations la même relation qu'entre les différentielles de ces coordonnées prises

(*) Soit en effet l'équation suivante

$$Aa + Bb + Cc + Dd\ldots.. = 0$$

dans laquelle a, b, c, d,... sont des coefficients entièrement arbitraires, et A, B, C.... des quantités indépendantes de a, b, c.... Si l'on fait tous les coefficients nuls à l'exception de l'un d'eux b, qu'on laisse arbitraire, on aura

$$Bb = 0$$

et comme b reste arbitraire, cette dernière équation n'est possible que si $B = 0$. On raisonnera de la même manière sur les autres facteurs A, C.. ..

dans l'équation de la courbe; si donc $dy = \varphi x.dx$ est cette équation différentielle, on aura aussi

$$\delta y' = \varphi x'.\delta x'$$

et en remplaçant $\delta y'$ par sa valeur dans la variation générale, le coefficient total de $\delta x'$ devra être égalé à zéro. En résumé, on voit qu'en général, il faudra supprimer les termes multipliés par les variations des quantités qui sont fixes aux extrémités de la courbe; puis, si la question admet des relations entre quelques-unes des autres variations relatives aux limites, se servir de ces relations pour éliminer le plus grand nombre possible de variations et enfin égaler à zéro chacun des coefficients des variations qui restent indéterminées.

L'équation différentielle indéfinie $U = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} + \frac{1}{dx^2}\frac{d^3V}{dq} - \text{etc.} = 0$$

donne la relation qui doit exister entre x et y pour que $\int_{x'}^{x''} Vdx$ soit un maximum ou un minimum, c'est-à-dire que, étant intégrée, elle donne l'équation de la courbe cherchée. Les autres équations qui se rapportent aux limites, servent comme on le verra dans les applications suivantes, à déterminer les constantes arbitraires qui entrent dans l'intégrale.

273. *Problèmes divers. — Déterminer la ligne la plus courte qu'on puisse tracer entre deux points dans un plan.*

ds étant l'élément de la courbe cherchée, on a

$$ds = dx\sqrt{1 + p^2}$$

et en représentant par (x', y') et (x'', y''), les coordonnées des points extrêmes donnés, il vient

$$s = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + p^2}\,dx;$$

il faut donc que $\int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + p^2}\,dx$ soit un minimum, ou que l'on ait

$$\delta \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + p^2}\,dx = 0.$$

Il est visible que la fonction V de la formule générale représente ici $\sqrt{1+p^2}$ et que par conséquent il faut y faire

$$V=\sqrt{1+p^2},\quad \frac{dV}{dy}=0,\quad \frac{dV}{dp}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\quad \frac{dV}{dq}=0,\ \text{etc.}$$

L'équation différentielle de la courbe est donc

$$\frac{1}{dx}d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0\quad \text{d'où}\quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\text{const.},$$

et par conséquent $p=\text{const.}=c$.

On tire de là

$$dy=cdx\quad \text{et}\quad y=cx+c',$$

qui est l'équation de la ligne cherchée. On voit que cette ligne est droite. Les extrémités étant fixes, les variations $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta y'$, $\delta y''$, sont nulles et il n'y a pas d'*équations aux limites*. Les constantes c et c' se déterminent ici par la condition que la droite devant passer par les points (x', y') et (x'', y''), ces coordonnées doivent satisfaire à l'équation de la droite, ce qui fournit, pour déterminer c et c', les relations

$$y'=cx'+c',\quad y''=cx''+c'.$$

Chercher la ligne la plus courte ou la plus longue qu'on puisse mener entre deux courbes données dans un plan.

On aura encore comme précédemment

$$\delta\int_{x'}^{x''}\sqrt{1+p^2}\,dx=0\quad \text{d'où}\quad p=c\quad \text{et}\quad y=cx+c',$$

c'est-à-dire que la ligne est encore droite. Les extrémités (x', y'), (x'', y'') ne sont pas fixes, puisqu'elles ne sont assujetties qu'à se trouver sur deux courbes connues; les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$ ne sont donc pas nulles, mais il existe entre elles la relation

$$\delta y'=\varphi x'\delta x',\quad \delta y''=\psi x''\delta x''$$

tirée des équations de ces deux courbes.

Si l'on remplace $\delta y'$ et $\delta y''$ par ces valeurs dans la partie de la variation qui se rapporte aux limites et qu'on égale à zéro les coefficients des variations $\delta x'$ et $\delta x''$, on trouve

$$\sqrt{1+p'^2} - \frac{p'^2}{\sqrt{1+p'^2}} + \frac{p'}{\sqrt{1+p'^2}}\varphi x' = 0$$

$$\sqrt{1+p''^2} - \frac{p''^2}{\sqrt{1+p''^2}} + \frac{p''}{\sqrt{1+p''^2}}\psi x'' = 0$$

qui se réduisent à

$$1 + p'\varphi x' = 0, \quad 1 + p''\psi x'' = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + c\varphi x' = 0, \quad 1 + c\psi x'' = 0.$$

Ces deux dernières équations jointes aux deux équations données des deux courbes et aux deux suivantes

$$y' = cx' + c', \quad y'' = cx'' + c'$$

serviront à déterminer les six inconnues c, c', x', y', x'', y''.

Les équations

$$1 + p'\varphi x' = 0 \quad \text{et} \quad 1 + p''\psi x'' = 0$$

font connaître une propriété de la ligne maximum ou minimum. Si aux points où la ligne cherchée atteint les deux courbes données, on mène à celles-ci des touchantes, ainsi qu'à la ligne cherchée, les tangentes trigonométriques des angles que ces touchantes feront avec l'axe des X sont $\varphi x'$, $\psi x''$ et p', p''; les deux équations précédentes expriment donc que les tangentes aux extrémités de la ligne cherchée sont perpendiculaires aux tangentes menées aux deux courbes données, c'est-à-dire, que la droite la plus courte ou la plus longue est une normale commune aux deux courbes.

274. *Surface de moindre résistance. — Trouver l'équation de la courbe qui par sa révolution autour d'un axe, engendre la surface qui éprouve le moins de résistance, en se mouvant dans un fluide, parallèlement à cet axe.*

Supposons la courbe AD (fig. 44) assujettie à passer par le point fixe A et à se terminer dans une parallèle BC à l'axe des X, en un point indéterminé D. On démontre (N° 200 de la mécanique) que la résis-

tance R qu'oppose la surface engendrée par la rotation de la courbe AD autour de l'axe des X est donnée par

$$2\rho\pi v^2 \int \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y\,dy}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\rho\pi v^2 \int \frac{yp^3}{1+p^2}\,dx,$$

l'intégrale étant prise depuis A jusqu'à D ou depuis $x = \mathrm{OE} = x'$ jusqu'à $x = \mathrm{OA} = x''$, c'est-à-dire qu'on a

$$\mathrm{R} = 2\rho\pi . v^2 \int_{x'}^{x''} y \frac{p^3}{1+p^2}\,dx.$$

Si la courbe AB était connue, on tirerait de son équation les valeurs de y et p et une intégration ferait connaître R; mais si cette courbe est inconnue et qu'on veuille l'assujettir à la condition de rendre R minimum, il est évident qu'il faudra égaler à zéro la variation de R, c'est-à-dire poser

$$\delta \int_{x'}^{x''} y \frac{p^3}{1+p^2}\,dx = 0,$$

et par conséquent substituer, dans les formules générales, les valeurs suivantes :

$$V = y\frac{p^3}{1+p^2}, \quad \frac{dV}{dy} = \frac{p^3}{1+p^2}, \quad \frac{dV}{dp} = y\frac{3p^2+p^4}{(1+p^2)^2},$$

$$\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} = -\frac{2pqy(p^2-3)}{(1+p^2)^3} + \frac{3+p^2}{(1+p^2)^2}p^3.$$

On trouve ainsi pour l'équation dérivée de la courbe,

$$p^2 = \frac{qy(p^2-3)}{(1+p^2)}.$$

Pour intégrer, remarquons que

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{pdp}{dy};$$

et en substituant cette valeur de q, l'équation devient

$$\frac{dy}{y} = \frac{p^2 - 3}{p(1 + p^2)} dp,$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$y = \frac{C(1 + p^2)^2}{2p^3}.$$

Si l'on remplace y par cette valeur dans l'équation dérivée de la courbe, celle-ci devient, en remettant $\frac{dp}{dx}$ pour q,

$$dx = \frac{C}{2} \frac{(p^2 - 3)(p^2 + 1)}{p^3} dp,$$

qui a pour intégrale,

$$x = \frac{C}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{3}{4p^4} + \log p\right) + C'.$$

Une élimination de p entre cette dernière équation et la valeur précédente de y, conduira à une relation entre x et y qui sera l'équation cherchée de la courbe.

Pour ce qui est des équations aux limites, remarquons que $\delta x''$ et $\delta y''$ sont nulles parce que la première extrémité A de la courbe est fixe, et que $\delta y'$ est aussi nulle, parce que la seconde extrémité se trouve sur la droite BC dont l'équation est

$$y' = a.$$

Les autres variations $\delta x'$, $\delta p'$, $\delta p''$..... sont entièrement arbitraires et leurs coefficients doivent être égalés à zéro; on a donc

$$y' \frac{p'^3}{1 + p'^2} - p'y' \frac{3p'^2 + p'^4}{(1 + p'^2)^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$p' = 0,$$

qui apprend que la courbe est tangente à BC au point D.

Si l'équation de la courbe était connue, on en tirerait la valeur de $\frac{dy'}{dx'} = p'$, qu'on égalerait à zéro, ce qui fournirait une première

équation entre C, C' et x'; les deux autres équations seraient fournies par la condition que la courbe passe par les points A et D et que, par conséquent, les coordonnées $y''=0$ et x'', $y'=a$ et x' doivent satisfaire à l'équation de la courbe.

La surface dont on vient de déterminer l'équation est connue sous le nom de *surface de moindre résistance.*

Il est à observer que lorsque la fonction V ne contient que y et p, l'intégrale première de l'équation indéfinie

$$\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV}{dp}\right)=0$$

s'obtient immédiatement et d'une manière générale; car la différentielle totale de V sera égale à

$$dV=\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dp}dp$$

et en éliminant $\frac{dV}{dy}$, on transforme la première dans la suivante

$$dV=d\left(p\frac{dV}{dp}\right)$$

qui a pour intégrale

$$V=p\frac{dV}{dp}+C.$$

Cette remarque peut du reste être généralisée, pourvu que V ne contienne pas la variable indépendante x; car des intégrations successives par parties font prendre à l'équation indéfinie générale, après qu'on l'a multipliée par dy, la forme suivante :

$$\int\frac{dV}{dy}dy+\int\frac{dV}{dp}dp+\int\frac{dV}{dq}dq\cdots-p\frac{dV}{dp}+p\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV}{dq}\right)-q\frac{dV}{dq}$$
$$-p\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{dV}{dr}\right)+q\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV}{dr}\right)-r\frac{dV}{dr}+\text{etc}=C.$$

En tenant compte de la différentielle totale de V

$$dV=\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dp}dp+\frac{dV}{dq}dq+\cdots\cdot$$

la précédente devient

$$C = V - p\left\{\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx}d\left(\frac{dV}{dq}\right) + \frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{dV}{dr}\right) - \text{etc.}\right\}$$

$$-q\left\{\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx}d\left(\frac{dV}{dr}\right) + \text{etc.}\right\} - r\left\{\frac{dV}{dr} - \text{etc.}\right\} - s\left\{\frac{dV}{ds} - \text{etc.}\right\}\dots$$

qui est l'intégrale première de l'équation indéfinie.

Si y n'entrait pas dans V, $\frac{dV}{dy}$ serait nul dans l'équation indéfinie qui devient visiblement une différentielle exacte ayant pour intégrale

$$\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dq} + \text{etc.} = C.$$

275. *Maximum relatif.* — Dans les problèmes précédents, les variables qui entrent dans la fonction V ne sont assujetties qu'à la seule condition de rendre l'intégrale définie, la plus grande ou la plus petite possible; mais dans un grand nombre d'applications, ces variables et leurs dérivées doivent satisfaire à d'autres conditions, comme cela aurait lieu si l'on demandait de trouver la relation entre x et y qui rend maximum l'intégrale définie $\int_{x'}^{x''} Vdx$ en y joignant la condition qu'une autre intégrale définie $\int_{x'}^{x''} V'dx$, que nous supposerons prise entre les mêmes limites, ait une valeur constante donnée. Le maximum ou minimum ainsi trouvé, n'étant plus absolu mais relatif à la valeur fixée pour la seconde intégrale définie, prend le nom de *maximum relatif.*

Pour trouver cette relation entre x et y, remarquons que comme l'intégrale $\int_{x'}^{x''} Vdx$ doit être un maximum, sa variation doit être nulle, ce qui conduit à une équation de la forme suivante

$$A\delta x' + B\delta x'' + C\delta y' + D\delta y'' + \dots\dots + \int_{x'}^{x''}\Delta.Udx = 0.$$

D'un autre côté, comme l'intégrale définie $\int_{x'}^{x''} V'dx$ est égale à une constante l, sa variation est aussi nulle, ce qui donne lieu à une autre équation de la forme

$$A'\delta x' + B'\delta x'' + C'\delta y' + D'\delta y'' + \ldots\ldots + \int_{x'}^{x''} \Delta . U'dx = 0.$$

Si le maximum était absolu, on n'aurait qu'à satisfaire à la première des deux équations précédentes, et l'on sait qu'après avoir éliminé le plus grand nombre possible de variations au moyen des équations de condition qui se rapportent aux limites, il faudrait égaler à zéro les coefficients des variations restantes $\delta y'$, $\delta y''$...... Δ qui sont arbitraires; mais si l'on doit tenir compte de la seconde de ces équations, celle-ci devient une nouvelle équation de condition, au moyen de laquelle il faudra éliminer encore l'une des variations arbitraires $\delta y'$, par exemple, ce qui conduit à l'équation suivante, en observant que les coefficients C et C' sont deux constantes, et peuvent par conséquent entrer sous les signes d'intégration,

$$\left(A - \frac{C}{C'}A'\right)\delta x' + \left(B - \frac{C}{C'}B'\right)\delta x'' + \left(D - \frac{C}{C'}D'\right)\delta y'' + \left(E - \frac{C}{C'}E'\right)\delta p' ..$$

$$+ \int_{x'}^{x''} \Delta . \left(U - \frac{C}{C'}U'\right)dx = 0.$$

Comme les variations restantes $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta p'$....Δ sont toutes indéterminées, on posera

$$A - \frac{C}{C'}A' = 0, \quad B - \frac{C}{C'}B' = 0, \quad D - \frac{C}{C'}D' = 0, \ldots . \; U - \frac{C}{C'}U' = 0,$$

dont la dernière est une équation indéfinie qui fait connaître la relation cherchée entre x et y.

Si, au lieu d'éliminer $\delta y'$, on avait éliminé une autre variation $\delta y''$, par exemple, on aurait trouvé

$$\left(A - \frac{D}{D'}A'\right)\delta x' + \left(B - \frac{D}{D'}B'\right)\delta x'' + \left(C - \frac{D}{D'}C'\right)\delta y' + \left(E - \frac{D}{D'}E'\right)\delta p' \ldots$$

$$+ \int \Delta . \left(U - \frac{D}{D'}U'\right) dx = 0$$

et en égalant à zéro tous les coefficients,

$$A-\frac{D}{D'}A'=0,\quad B-\frac{D}{D'}B'=0,\quad C-\frac{D}{D'}C'=0,\quad E-\frac{D}{D'}E'=0,\ldots.$$

$$U-\frac{D}{D'}U'=0.$$

On trouverait de la même manière pour équations de condition et pour équation indéfinie,

$$A-\frac{E}{E'}A'=0,\ldots\ldots U-\frac{E}{E'}U'=0.$$

Il est à remarquer que ces différents systèmes d'équations sont identiques; car elles se ramènent toutes aux suivantes :

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}=\text{etc.}=\frac{U}{U'}.$$

L'élimination de l'une des variations peut se faire d'une manière plus générale, en réunissant les deux équations, après avoir multiplié les deux membres de l'une d'elles par une constante indéterminée a, ce qui donne

$$(A+aA')\delta x'+(B+aB')\delta x''+(C+aC')\delta y'+\cdots+\int_{x'}^{x''}\Delta.(U+aU')dx=0$$

et en égalant à zéro le coefficient de chaque variation $\delta x'$, $\delta x''$.....Δ, ce qui donne

$$A+aA'=0,\quad B+aB'=0,\quad C+aC'=0\ldots\ldots U+aU'=0$$

et il est visible que l'élimination de a entre ces équations conduit au même résultat que plus haut. Si les variables sont les coordonnées d'une certaine courbe, les premières de ces équations se rapportent à ses deux extrémités et la dernière est l'équation indéfinie de la courbe elle-même.

L'emploi de ce coefficient indéterminé présente cet avantage qu'au lieu de développer séparément les variations de $\int_{x'}^{x''}Vdx$ et $\int_{x'}^{x''}V'dx$ pour éliminer ensuite $\delta x'$ ou $\delta x''$, etc., il suffit de multiplier la seconde

intégrale par un coefficient constant indéterminé a, de prendre ensuite la variation de la somme $\int_{x'}^{x''} (V + aV')dx$, et d'égaler à zéro les coefficients de toutes les variations arbitraires, ce qui conduira visiblement au même résultat que plus haut.

276. *Applications diverses.* — Appliquons cette théorie à la solution de quelques problèmes.

1° *Trouver entre toutes les courbes planes de même longueur, passant entre deux points fixes, celle qui renferme la plus grande aire.*

En désignant par (x', y') et (x'', y'') les coordonnées des deux points fixes, la surface est représentée par $\int_{x'}^{x''} ydx$ et la longueur de la courbe par

$$\int_{x'}^{x''} dx\sqrt{1 + p^2} = l.$$

Dans les formules précédentes, il faut donc poser

$$V = y \quad \text{et} \quad V' = \sqrt{1 + p^2},$$

d'où l'on tire pour la première,

$$\frac{dV}{dy} = 1, \quad \frac{dV}{dp} = 0, \text{ etc.}$$

et pour la seconde,

$$\frac{dV'}{dy} = 0, \quad \frac{dV'}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \frac{dV'}{dq} = 0, \text{ etc.};$$

l'équation dérivée de la courbe ou $U + aU' = 0$ est donc

$$1 + a\frac{1}{dx}d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{-ap}{\sqrt{1 + p^2}} + b, \quad p = \frac{x - b}{\sqrt{a^2 - (x - b)^2}} \quad \text{et} \quad (y - c)^2 + (x - b)^2 = a^2.$$

On voit que la courbe cherchée est un cercle.

Comme les deux extrémités sont fixes, il n'y a pas d'équations aux limites. Les constantes b, c et a se déterminent au moyen de trois

équations de condition qui expriment que la courbe trouvée passe par les points (x', y') et (x'', y'') et que la longueur de la courbe est égale à l. Pour trouver cette dernière, on remplacera p par sa valeur précédente en x dans

$$\int_{x'}^{x''} \sqrt{1+p^2}\,dx = l$$

et il vient

$$\int_{x'}^{x''} \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}} = l \quad \text{d'où} \quad a\left\{\text{arc}\sin\frac{x'-b}{a} - \text{arc}\sin\frac{x''-b}{a}\right\} = l.$$

2° *Parmi les courbes isopérimètres, c'est-à-dire de même longueur, menées entre deux droites données, quelle est celle qui jouit de cette propriété que l'aire renfermée entre la courbe et les deux droites est un maximum?*

En prenant l'une des deux droites OA (fig. 45) pour axe des Y et l'intersection O pour origine, l'équation de la seconde droite OB sera en désignant par α l'angle qu'elle forme avec la première,

$$y = x \cot\alpha\,;$$

on a donc la relation suivante entre les variations des coordonnées (x', y') de l'extrémité B,

$$\delta y' = \cot\alpha . \delta x'$$

et à l'autre extrémité A, comme on a $x'' = 0$, $\delta x''$ est nul. L'aire AOB comprise entre la courbe et les deux droites est donnée par ABPO — OBP, c'est-à-dire, $\int_0^{x'} y\,dx - \int_0^{x'} \cot\alpha . x\,dx$ ou bien

$$\int_0^{x'} (y - x\cot\alpha)\,dx$$

et la longueur de l'arc AB est égale à $\int_0^{x'} \sqrt{1+p^2}\,dx$. La première de ces intégrales devant être un maximum et la seconde devant être constante, on a vu qu'il fallait égaler à zéro la variation de l'intégrale définie

$$\int_0^{x'} (y - x\cot\alpha + a\sqrt{1+p^2})\,dx.$$

On trouve pour équations aux limites,

$$\frac{ap''}{\sqrt{1+p''^2}}=0,\quad y'-x'\cot\alpha+a\sqrt{1+p'^2}-\frac{ap'^2}{\sqrt{1+p'^2}}+\frac{ap'\cot\alpha}{\sqrt{1+p'^2}}=0$$

qui se réduisent aux suivantes,

$$p''=0,\quad 1+p'\cot\alpha=0.$$

L'équation indéfinie est

$$1-\frac{1}{dx}d\left(\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0$$

qui a pour intégrale

$$(x-m)^2+(y-n)^2=a^2.$$

La courbe cherchée est donc un cercle dont m et n sont les coordonnées du centre. En dérivant, puis se plaçant aux deux extrémités de l'arc, en tenant compte de p'' et p' et observant que $y'=x'\cot\alpha$, on trouve que m et n sont nuls, c'est-à-dire que l'arc de cercle a son centre placé à l'intersection des deux droites. On détermine a comme dans le problème précédent.

3° *Parmi les courbes isopérimètres planes passant par deux points fixes, quelle est celle qui par sa révolution autour de l'axe des X engendre la plus grande ou la plus petite surface?*

L'aire d'une surface de révolution et la longueur d'une courbe étant exprimées par

$$2\pi\int_{x'}^{x''}y\sqrt{1+p^2}\,dx\quad\text{et}\quad\int_{x'}^{x''}\sqrt{1+p^2}\,dx=l,$$

on a

$$V=y\sqrt{1+p^2},\quad V'=\sqrt{1+p^2}$$

et on trouve pour équation de la courbe,

$$dx=\frac{b\,dy}{\sqrt{(y-a)^2-b^2}},$$

qui appartient à la chaînette. Les constantes se détermineront comme dans le problème 1er.

Si le volume engendré devait être un maximum, la fonction V serait y^2 et l'équation différentielle de la courbe deviendrait

$$dx = \frac{(b - y^2)\,dy}{\sqrt{a^2 - (b - y^2)^2}}.$$

Cette équation est celle de la lame élastique.

4° *Parmi les courbes planes uniformément pesantes de même longueur, passant par deux points fixes, quelle est celle dont le centre de gravité est le plus bas ?*

L'ordonnée du centre de gravité d'un arc de courbe l compris entre les points (x', y') et (x'', y'') est

$$\frac{\int_{x'}^{x''} y\,ds}{l} = \frac{\int_{x'}^{x''} y\,dx\sqrt{1+p^2}}{l}.$$

On a aussi

$$l = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1+p^2}\,dx;$$

l'intégrale définie qu'il faut rendre maximum est donc

$$\int_{x'}^{x''} (y\sqrt{1+p^2} + a\sqrt{1+p^2})\,dx.$$

On trouve pour solution, la chaînette comme dans le problème troisième; ce qui, du reste, résulte aussi de ce que la surface d'un corps de révolution étant donné par le produit de la longueur de la courbe, et de la circonférence décrite par son centre de gravité, le maximum de la surface du 3me problème doit coïncider avec le maximum de l'ordonnée de ce point.

Si l'aire comprise entre la courbe et l'axe des X restant constante, devait avoir son centre de gravité le plus bas possible, cette dernière intégrale serait remplacée par la suivante :

$$\int_{x'}^{x''} (y^2 + ay)\,dx,$$

et l'on trouverait que la ligne cherchée est une droite horizontale. Enfin si l'on demandait *quelle est, parmi les courbes de même longueur tracées entre deux points fixes, celle qui jouit de la propriété d'avoir le centre de gravité de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des* X *le plus bas possible*, en désignant par $y_{,}$ l'ordonnée de ce point et par l la longueur constante, on aurait à la fois

$$y_{,}=\frac{1}{2}\frac{\int_{x'}^{x''} y^2dx}{\int_{x'}^{x''} ydx}, \quad l=\int_{x'}^{x''}\sqrt{1+p^2}\,dx.$$

Or, si l'on se rappelle la forme de la différentielle d'une fraction, il est visible que la variation de $\frac{u}{v}$ est $\frac{v\delta u - u\delta v}{v^2}$ et que par conséquent, $\delta y_{,}=0$ conduit à l'équation

$$\int_{x'}^{x''} ydx.\delta\int_{x'}^{x''} y^2dx - \int_{x'}^{x''} y^2dx.\delta\int_{x'}^{x''} ydx = 0$$

qu'on peut remplacer par

$$\delta\int_{x'}^{x''} y^2dx - 2y_{,}\delta\int_{x'}^{x''} ydx = 0, \quad \text{ou plutôt,} \quad \delta\int_{x'}^{x''}(y^2-2y_{,}y)\,dx=0,$$

parce que $y_{,}$ est une constante inconnue. D'un autre côté on a

$$\delta\int_{x'}^{x''}\sqrt{1+p^2}\,dx=0.$$

En multipliant l'une des deux variations par un coefficient arbitraire a et en les réunissant on est conduit à l'équation de condition

$$\delta\int_{x'}^{x''}(y^2-2yy_{,}+a\sqrt{1+p^2})\,dx=0.$$

On trouve pour équation indéfinie,

$$2y-2y_{,}-\frac{1}{dx}d\left(\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0$$

qu'on peut mettre sous la forme suivante, en substituant à dx sa valeur $\frac{dy}{p}$,

$$2ydy - 2y_{,}dy = apd\left(\frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2}}\right).$$

Si l'on effectue la différenciation indiquée, on trouve pour intégrale première,

$$dx = \frac{(y^2 - 2y_{,}y - C)\,dy}{\mp\sqrt{a^2 - (y^2 - 2y_{,}y - C)^2}}$$

et l'intégrale finale s'obtient par une quadrature. Cette équation appartient à la lame élastique. Les deux constantes arbitraires introduites par l'intégration, le facteur a et l'ordonnée minimum $y_{,}$, se déterminent en exprimant que la courbe passe par les deux points extrêmes et en effectuant les intégrations dans les équations suivantes :

$$\int_{x'}^{x''} y^2 dx = 2y_{,}\int_{x'}^{x''} y dx, \quad \int_{x'}^{x''} \sqrt{1+p^2}\, dx = l,$$

après avoir remplacé y et $\frac{dy}{dx}$ ou p par leur valeur en x tirée de l'équation finie et de l'équation différentielle de la courbe.

277. *Cas où l'intégrale définie contient plusieurs variables dépendantes.* — Si dans l'intégrale $\int_{x'}^{x''} Vdx$, la fonction V renfermait une seconde variable z fonction de x, et ses dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}\ldots$, il est visible qu'il faudrait encore égaler à zéro tous les coefficients des variations qui ont une indétermination absolue, ainsi que l'intégrale définie qui entre dans l'expression de la variation de $\int_{x'}^{x''} Vdx$. Cette dernière équation est, en représentant $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, etc., par $p_{,}$, $q_{,}$, etc.,

$$\int_{x'}^{x''}\left[\left(\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} + \text{etc.}\right)\Delta + \left(\frac{dV}{dz} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}} + \text{etc.}\right)\Delta_{,}\right]dx = 0,$$

ou bien, en remplaçant Δ et $\Delta_{,}$ par leur valeur $\delta y - p\delta x$ et $\delta z - p_{,}\delta x$,

$$\int_{x'}^{x''}\left[\left(\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\text{etc.}\right)\delta y+\left(\frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}}+\text{etc.}\right)\delta z\right.$$

$$\left.-\left\{p\left(\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\text{etc.}\right)+p_{,}\left(\frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}}+\text{etc.}\right)\right\}\delta x\right]dx=0.$$

Il faut ici distinguer deux cas. La nature de la question peut laisser (δx, δy, δz) complétement indéterminés. C'est ce qui arrive lorsque les variables ne sont soumises qu'à la seule condition de rendre maximum l'intégrale définie. Il faut alors, pour satisfaire à l'équation précédente, égaler à zéro les trois coefficients, c'est-à-dire, poser

$$\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\text{etc.}=0,\quad \frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}}+\text{etc.}=0$$

$$p\left(\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\text{etc.}\right)+p_{,}\left(\frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}}+\text{etc.}\right)=0,$$

et comme la troisième équation est une conséquence des deux autres, il suffit d'avoir égard aux deux premières qui sont des équations indéfinies entre les variables (x, y, z). Si celles-ci sont des coordonnées, ces deux équations différentielles sont celles de la courbe à double courbure que cette théorie a pour but de déterminer.

Dans certains cas, la courbe est assujettie à de certaines conditions qui ne laissent pas à δx, δy, δz une entière indétermination. C'est ce qui arriverait si les variables x, y, z devaient satisfaire à une équation donnée, par exemple, si la courbe cherchée devait se trouver sur une surface donnée par son équation. Cette condition établirait entre δx, δy, δz une relation dépendante de l'équation de la surface, relation qui serait

$$\delta x = A\delta y + B\delta z,$$

l'équation différentielle de la surface étant

$$dx = Ady + Bdz.$$

A et B sont des fonctions connues de (x, y, z). En éliminant alors δx sous le signe d'intégration, l'intégrale devient

$$\int_{x'}^{x''}\left[\left\{\left(\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\text{etc.}\right)(1-Ap)-Ap_{,}\left(\frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}}+\text{etc.}\right)\right\}\delta y\right.$$

$$\left.+\left\{\left(\frac{dV}{dz}-\text{etc.}\right)(1-Bp_{,})-Bp\left(\frac{dV}{dy}-\text{etc.}\right)\right\}\delta z\right]dx=0,$$

et comme les deux variations δy et δz ne sont plus soumises à aucune condition, elles sont entièrement arbitraires et il faudra poser

$$\left(\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\text{etc.}\right)(1-Ap)-Ap_{,}\left(\frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}}+\text{etc.}\right)=0$$

$$\left(\frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}}+\text{etc.}\right)(1-Bp_{,})-Bp\left(\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\text{etc.}\right)=0.$$

Remarquons que ces deux équations sont identiques; en effet l'équation différentielle

$$dx=Ady+Bdz$$

donne en divisant par dx,

$$1=Ap+Bp_{,}.$$

Si, à l'aide de cette équation, on élimine $1-Ap$ et $1-Bp_{,}$, elles se réduisent l'une et l'autre à

$$\left(\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp}+\text{etc.}\right)B-\left(\frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}}+\text{etc.}\right)A=0.$$

Cette équation jointe à celle de la surface, ou

$$dx=Ady+Bdz$$

sont donc les deux équations différentielles de la ligne demandée.

Lorsque, à la condition du maximum de l'intégrale définie $\int_{x'}^{x''}Vdx$ est jointe la condition qu'une seconde intégrale définie $\int_{x'}^{x''}V'dx$ soit égale à une constante l, il suffit, comme au N° 275 de rendre maximum l'intégrale $\int_{x'}^{x''}(V+aV')\,dx$. Enfin si les variables $x, y, z, p, p_{,}, \ldots$ qui entrent dans la fonction V devaient satisfaire à l'équation indéfinie $V'=0$, contenant $x, y, z, p, p_{,}, q, q_{,}, \ldots$, en multipliant V' par dx, il est visible que pour toute valeur de x, $V'dx$ serait nul et

par conséquent en prenant la somme de ces valeurs depuis x' jusqu'à x'', on aurait aussi

$$\int_{x'}^{x''} V'dx = 0,$$

c'est-à-dire que l'intégrale définie $\int_{x'}^{x''} V'dx$ serait constante. Il faudrait donc encore égaler à zéro la variation de l'intégrale définie

$$\int_{x'}^{x''} (V + aV')dx.$$

278. *Brachystochrône.* — Appliquons ces formules à la résolution de quelques problèmes.

1° *On demande quelle est la courbe que doit suivre un corps pesant pour descendre d'un point* (x', y', z'), *à un autre point* (x'', y'', z'') *dans le moindre temps possible.*

Comme la vitesse du corps à une époque quelconque est celle qui est due à la hauteur de la chute verticale, (voir la mécanique N° 129) quelle que soit la courbe décrite, on a à une époque quelconque, en prenant l'axe des X vertical et dirigé vers le bas,

$$v^2 = 2g(x - x'), \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\sqrt{x - x'}$$

et

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g}\sqrt{x - x'}} = \frac{\sqrt{1 + p^2 + p_,^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{x - x'}}dx,$$

d'où l'on tire la valeur suivante du temps t de la descente, temps qui doit être minimum,

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x'}^{x''} \frac{\sqrt{1 + p^2 + p_,^2}}{\sqrt{x - x'}}dx.$$

On voit que dans les formules générales il faut faire

$$V = \frac{\sqrt{1+p^2+p_,^2}}{\sqrt{x-x'}}, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dp} = \frac{p}{\sqrt{x-x'}\sqrt{1+p^2+p_,^2}}, \quad \frac{dV}{dq} = 0, \text{ etc.}$$

$$\frac{dV}{dz} = 0, \quad \frac{dV}{dp_,} = \frac{p_,}{\sqrt{x-x'}\sqrt{1+p^2+p_,^2}}, \quad \frac{dV}{dq_,} = 0, \text{ etc.}$$

Comme les différents points de la courbe ne sont soumis à aucune condition autre que celle du minimum, les variations δx, δy, δz sont arbitraires; il faut donc poser les deux équations

$$\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{dV}{dz} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}} + \text{etc.} = 0$$

qui se réduisent aux suivantes

$$\frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} = 0, \quad \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_{,}} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dV}{dp} = C, \quad \frac{dV}{dp_{,}} = C',$$

c'est-à-dire,

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}} = C\sqrt{x-x'}, \quad \frac{p_{,}}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}} = C'\sqrt{x-x'} \ldots\ldots (1)$$

Ces équations se simplifient, car on en tire

$$\frac{p}{p_{,}} = \frac{C}{C'}, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{C}{C'}dz \quad \text{et} \quad y = \frac{C}{C'}z + D.$$

Cette dernière équation fait voir que la projection horizontale de la ligne cherchée est droite, c'est-à-dire que la courbe est renfermée dans un plan vertical. Si l'on prend ce plan pour celui des XY, il faudra égaler à zéro z et par conséquent $\frac{dz}{dx}$ ou $p_{,}$. Les deux équations de la courbe se réduisent ainsi à la suivante :

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = C\sqrt{x-x'}, \quad \text{d'où} \quad p \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{x-x'}}{\sqrt{\frac{1}{C^2}-(x-x')}}.$$

Comme le corps descend, les x vont en augmentant et dx est positif; il faut donc prendre le signe $+$ et poser

$$dy = \frac{\sqrt{x-x'}\,dx}{\sqrt{\frac{1}{C^2}-(x-x')}} = \frac{(x-x')\,dx}{\sqrt{\frac{1}{C^2}(x-x')-(x-x')^2}}.$$

On reconnaît dans cette équation, une cycloïde verticale, qui commence au point de départ. Le rayon du cercle générateur est $\frac{1}{2C^2}$.
La constante C et celle qui sera introduite par l'intégration de cette équation, sont déterminées par la condition que la courbe passe par les points (x', y') et (x'', y''). Cette courbe, de plus vite descente, est connue sous le nom de *brachystochrône*.

Les équations aux limites ne fournissent aucune autre condition, tant que les points extrêmes sont fixes. Il n'en est pas de même quand ces points sont seulement assujettis à se trouver sur deux courbes données; car les variations $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta z'$, $\delta z''$, $\delta y'$, $\delta y''$ devront alors satisfaire aux équations différentielles de ces courbes. Ainsi, en rapportant de nouveau la brachystochrône à trois axes rectangulaires et en posant

$$\left.\begin{aligned} dy' &= \varphi x' dx' \\ dz' &= \psi x' dx' \end{aligned}\right\} \text{ et } \left\{\begin{aligned} dy'' &= \varphi_{,} x'' dx'' \\ dz'' &= \psi_{,} x'' dx'' \end{aligned}\right.$$

pour équations différentielles des deux courbes données, on devra avoir entre les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, d'une part, et les variations $\delta x''$, $\delta y''$, dz'', d'autre part, les relations

$$\left.\begin{aligned} \delta y' &= \varphi x' \delta x' \\ \delta z' &= \psi x' \delta x' \end{aligned}\right\} \text{ et } \left\{\begin{aligned} \delta y'' &= \varphi_{,} x'' \delta x'' \\ \delta z'' &= \psi_{,} x'' \delta x''. \end{aligned}\right.$$

De plus, comme l'ordonnée verticale x' du premier point, entre dans la valeur de V, on doit ajouter à la variation de l'intégrale définie (N° 268) le terme $\delta x' \int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx'} dx$. Si l'on remplace $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta y''$, $\delta z''$, par les valeurs précédentes et qu'on égale à zéro les coefficients de $\delta x'$, $\delta x''$, on est conduit aux équations de condition

$$-V' + p' \frac{dV'}{dp'} + p_{,}' \frac{dV'}{dp_{,}'} - \frac{dV'}{dp'} \varphi x' - \frac{dV'}{dp_{,}'} \psi x' + \int_{x'}^{x''} \frac{dV}{dx'} dx = 0$$

$$V'' - p'' \frac{dV''}{dp''} - p_{,}'' \frac{dV''}{dp_{,}''} + \frac{dV''}{dp''} \varphi_{,} x'' + \frac{dV''}{dp_{,}''} \psi_{,} x'' = 0.$$

La seconde devient, en remplaçant V'' par sa valeur,

$$\frac{\sqrt{1+p''^2+p_,''^2}}{\sqrt{x''-x'}} - \frac{p''^2}{\sqrt{x''-x'}\sqrt{1+p''^2+p_,''^2}} - \frac{p_,''^2}{\sqrt{x''-x'}\sqrt{1+p''+p_,''^2}}$$

$$+\frac{p''}{\sqrt{x''-x'}\sqrt{1+p''^2+p_,''^2}}\cdot\varphi_,x'' + \frac{p_,''}{\sqrt{x''-x'}\sqrt{1+p''^2+p_,''^2}}\psi_,x'' = 0$$

et après réduction,

$$1 + p''\varphi_,x'' + p_,''\psi_,x'' = 0 \ldots\ldots (2)$$

Quant à la première, il faudrait en général remplacer dans $\int_{x'}^{x''}\frac{dV}{dx'}dx$, y, z, p et $p_,$ par leur valeur en x tirée des deux équations (1) et de leurs intégrales, et effectuer l'intégration; mais ici on transforme plus promptement en remarquant que si l'on effectue par parties l'intégration de $\frac{dV}{dx'}dx$ ou $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+p^2+p_,^2}}{(x-x')^{\frac{3}{2}}}dx$, on trouve d'abord

$$-\frac{\sqrt{1+p^2+p_,^2}}{\sqrt{x-x'}} + \int\frac{pdp}{\sqrt{x-x'}\sqrt{1+p^2+p_,^2}} + \int\frac{p_,dp_,}{\sqrt{x-x'}\sqrt{1+p^2+p_,^2}}$$

ou bien en remplaçant dans les deux intégrales $\sqrt{x-x'}$ par sa valeur tirée des deux équations (1),

$$\int\frac{\sqrt{1+p^2+p_,^2}}{2(x-x')^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{\sqrt{1+p^2+p_,^2}}{\sqrt{x-x'}}$$

$$+\int Cdp + C'dp_, = + Cp + C'p_, - V;$$

on a donc pour l'intégrale définie cherchée,

$$\int_{x'}^{x''}\frac{dV}{dx'}dx = V' - V'' + C(p''-p') + C'(p_,''-p_,')$$

et en remplaçant $\frac{dV'}{dp'}$ et $\frac{dV'}{dp_,'}$ par C et C' et remarquant que C et C' ont pour valeurs $\frac{p''}{\sqrt{x''-x'}\sqrt{1+p''^2+p_,''^2}}$, $\frac{p_,''}{\sqrt{x''-x'}\sqrt{1+p''^2+p_,''^2}}$,

la première équation aux limites devient

$$1 + p''\varphi x' + p_{,}''\psi x' = 0 \ldots. (3)$$

Les équations (2) et (3) mises sous la forme suivante, après qu'on a remplacé p'' et $p_{,}''$ par leur valeur tirée de (1),

$$1 + \frac{C\sqrt{x''-x'}\,\varphi_{,}x'' + C'\sqrt{x''-x'}\,\psi_{,}x''}{\sqrt{1+(x''-x')(C^2+C'^2)}} = 0$$

$$1 + \frac{C\sqrt{x''-x'}\,\varphi x' + C'\sqrt{x''-x'}\,\psi x'}{\sqrt{1+(x''-x')(C^2+C'^2)}} = 0,$$

jointes aux quatre équations qui expriment que les points $(x'\,y'\,z')$ et $(x''\,y''\,z'')$ sont situés sur les deux courbes données, serviront à déterminer les valeurs de x', y', z', x'', y'', z''. Un plan vertical passant par les deux points qu'on vient de déterminer, contiendra la cycloïde cherchée.

Les équations (2) et (3) font connaître une propriété importante de la brachystochrône tracée entre deux courbes données. La première exprime qu'elle coupe à angle droit la courbe d'arrivée, puisque $\varphi' x''$ et $\psi_{,} x''$ ne sont autre chose que $\frac{dy''}{dx''}$ et $\frac{dz''}{dx''}$ tirés des équations de cette dernière courbe, tandis que p'' et $p_{,}''$ sont les mêmes dérivées tirées de l'équation de la brachystochrône. La seconde (3) exprime que la tangente à la courbe donnée, au point de départ, fait aussi un angle droit avec la tangente à la cycloïde au point d'arrivée.

279. *Lignes maximum et minimum tracées sur une surface. Lignes géodésiques.* — Proposons-nous encore de trouver la ligne la plus longue ou la plus courte qu'on puisse tracer sur une surface entre deux points donnés. $u = 0$ étant l'équation de la surface, ds un élément de la courbe, p et $p_{,}$ les dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, on a

$$ds = \sqrt{1+p^2+p_{,}^2}\,dx \quad \text{et par conséquent} \quad s = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1+p^2+p_{,}^2}\,dx;$$

la condition du minimum est donc

$$\delta \int_{x'}^{x''} \sqrt{1+p^2+p_{,}^2}\,dx = 0$$

c'est-à-dire que dans cet exemple il faut poser

$$V = \sqrt{1 + p^2 + p_,^2}, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0,$$

$$\frac{dV}{dp} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p_,^2}}, \quad \frac{dV}{dp_,} = \frac{p_,}{\sqrt{1 + p^2 + p_,^2}}.$$

Comme la courbe est assujettie à être tracée sur une surface donnée, les variations $\delta x, \delta y, \delta z$ ne sont pas complètement arbitraires. Il existe entre elles la même relation qu'entre les (dx, dy, dz) de l'équation différentielle de la surface, c'est-à-dire, qu'on a à la fois

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dz}\delta z = 0.$$

En résolvant donc cette dernière équation par rapport à δx, on en conclut que, dans l'équation $\delta x = A\delta y + B\delta z$ employée au N° 277, les coefficients A et B ont les valeurs suivantes :

$$A = -\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dx}}, \quad B = -\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{du}{dx}}$$

qu'il faut introduire dans l'équation indéfinie

$$\left(\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp} + \text{etc.}\right)B - \left(\frac{dV}{dz} - \frac{1}{dx}\frac{d^2V}{dp_,} + \text{etc.}\right)A = 0.$$

Elle devient par là,

$$\frac{du}{dz}\frac{1}{dx}d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p_,^2}}\right) - \frac{du}{dy}\frac{1}{dx}d\left(\frac{p_,}{\sqrt{1 + p^2 + p_,^2}}\right) = 0,$$

et on peut l'écrire ainsi :

$$\frac{du}{dz}d\left(\frac{dy}{ds}\right) - \frac{du}{dy}d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0 \ldots\ldots (1)$$

Il est à remarquer que si, au lieu d'éliminer δx, on avait éliminé δy ou δz, on eût été conduit à l'une des deux équations différentielles

$$\frac{du}{dx}d\left(\frac{dz}{ds}\right)-\frac{du}{dz}d\left(\frac{dx}{ds}\right)=0,\quad \frac{du}{dy}d\left(\frac{dx}{ds}\right)-\frac{du}{dx}d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0;\ldots(2)$$

mais celles-ci sont comprises dans la précédente, comme il est facile de s'en assurer en substituant dans la première la valeur de $\frac{du}{dz}$ tirée de l'équation différentielle totale de la surface, valeur qui est

$$\frac{du}{dz}=-\frac{\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}p}{p,}$$

et en remarquant que l'équation

$$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$$

conduit par la différenciation à la suivante :

$$\frac{dx}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0$$

d'où l'on tire

$$dxd\left(\frac{dx}{ds}\right)+dyd\left(\frac{dy}{ds}\right)=-dzd\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

L'une ou l'autre des trois équations (1) et (2) étant intégrée et combinée avec l'équation de la surface, fera connaître la courbe cherchée qui est connue sous le nom de *ligne géodésique*. Les constantes arbitraires se déterminent par la condition que la courbe passe par les points (x', y', z') et (x'', y'', z''). Il n'y a pas d'équations aux limites. Il n'en serait plus de même si l'on se proposait de trouver la ligne la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface entre deux courbes données. On trouverait sans peine par les équations aux limites, que la ligne cherchée doit être normale aux deux courbes.

Appliquons les formules précédentes à la sphère dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0,\quad \frac{du}{dz}=2z,\quad \frac{du}{dy}=2y.$$

L'équation indéfinie de la ligne cherchée est

$$zd\left(\frac{dy}{ds}\right) - yd\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

En intégrant par parties, on a

$$z\frac{dy}{ds} - \int \frac{dy}{ds} dz - y\frac{dz}{ds} + \int \frac{dz}{ds} dy = C$$

qui se réduit à

$$z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds} = C.$$

Jointe à l'équation de la sphère, elle représente la ligne cherchée; mais on détermine celle-ci plus facilement en remarquant que si l'on avait fait usage de l'équation différentielle de la courbe mise sous l'une des deux autres formes, on aurait trouvé de la même manière,

$$x\frac{dz}{ds} - z\frac{dx}{ds} = C', \quad y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds} = C'',$$

d'où l'on tire, en multipliant ces trois équations respectivement par x, y, z et additionnant membre à membre,

$$Cx + C'y + C''z = 0$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$z + \frac{C}{C''}x + \frac{C'}{C''}y = 0 \quad \text{ou} \quad z + cx + c'y = 0.$$

Cette équation et celle de la sphère sont les deux équations de la courbe cherchée. Les deux constantes c et c' se déterminent au moyen des deux équations de condition

$$z' + cx' + c'y' = 0,$$

$$z'' + cx'' + c'y'' = 0.$$

Comme l'équation

$$z + cx + c'y = 0$$

appartient à un plan passant par l'origine, on en conclut que la ligne la plus courte qu'on puisse tracer sur une sphère entre deux points, est déterminée par l'intersection de cette surface par un plan passant par les deux points et par le centre, c'est-à-dire, que cette ligne est un arc de grand cercle.

280. *Propriété des lignes maximum et minimum tracées sur une surface.* — L'équation différentielle des courbes maximum ou minimum

$$\frac{du}{dz}d\left(\frac{dy}{ds}\right)-\frac{du}{dy}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0$$

fait connaître une propriété générale de ces courbes. On a trouvé dans le calcul différentiel, pour l'équation du plan osculateur d'une courbe à double courbure,

$$(dyd^2z - dzd^2y)(x' - x) + (dzd^2x - dxd^2z)(y' - y)$$

$$+ (dxd^2y - dyd^2x)(z' - z) = 0,$$

et pour l'équation du plan tangent à la surface $u = 0$,

$$\frac{du}{dx}(x' - x) + \frac{du}{dy}(y' - y) + \frac{du}{dz}(z' - z) = 0.$$

Si donc on considère la courbe maximum comme tracée sur la surface, on aura pour l'angle δ formé par le plan osculateur de la courbe avec le plan tangent à la surface donnée au point (x, y, z),

$$\cos\delta = \frac{(dyd^2z-dzd^2y)\frac{du}{dx}+(dzd^2x-dxd^2z)\frac{du}{dy}+(dxd^2y-dyd^2x)\frac{du}{dz}}{\sqrt{}\qquad\sqrt{}};$$

or si l'on divise les deux termes du second membre par ds^2 et qu'on suppose ds constant, ce qu'on est libre de faire, puisqu'aucune autre

variable n'a été prise comme indépendante, la valeur de cos δ prendra la forme suivante :

$$\cos\delta = \frac{\frac{dy}{ds}\left[\frac{du}{dx}d\left(\frac{dz}{ds}\right) - \frac{du}{dz}d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right] + \frac{dx}{ds}\left[\frac{du}{dz}d\left(\frac{dy}{ds}\right) - \frac{du}{dy}d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right] + \frac{dz}{ds}\left[\frac{du}{dy}d\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{du}{dx}d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]}{\sqrt{\qquad}\quad\sqrt{\qquad}}$$

valeur que les équations différentielles (1) et (2) de la courbe maximum ou minimum trouvées plus haut, rendent nulle; ce qui apprend que le plan osculateur à la courbe minimum est partout normal à la surface. Il est visible que cette courbe se confond avec celle qu'affecte un fil tendu sur la surface, entre les deux points donnés. (Voir la statique N° 70.)

281. *Courbe de plus vite descente sur une surface, et courbe de plus grande pente.* Proposons-nous encore de trouver la ligne que doit suivre un point matériel pesant pour glisser sur une surface, dans le moindre temps possible, d'un point donné jusqu'à un niveau donné, jusqu'au plan horizontal des YZ, par exemple. On trouve, comme dans le problème de la brachystochrône (N° 278), que l'intégrale définie

$$\int_h^0 \frac{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}{\sqrt{h-x}}\,dx$$

dans laquelle h est l'x du point de départ, doit être rendue minimum. A cette condition du minimum doit être jointe la condition que les coordonnées satisfont à l'équation de la surface ou à son équation différentielle que nous mettrons sous la forme

$$dx = A\,dy + B\,dz,$$

ce qui conduit, comme dans le problème précédent, à l'équation différentielle indéfinie

$$B\frac{1}{dx}d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}\sqrt{h-x}}\right)$$

$$-A\frac{1}{dx}d\left(\frac{p_{,}}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}\sqrt{h-x}}\right) = 0$$

ou, en tenant compte de la valeur de ds ainsi que des valeurs de A et B données au N° 279,

$$\frac{du}{dz}\frac{1}{dx}d\left(\frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{h-x}}\right)-\frac{du}{dy}\frac{1}{dx}d\left(\frac{\frac{dz}{ds}}{\sqrt{h-x}}\right)=0$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\left\{\frac{du}{dz}d\left(\frac{dy}{ds}\right)-\frac{du}{dy}d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right\}+\frac{dx}{2(h-x)}\left(\frac{dy}{ds}\frac{du}{dz}-\frac{dz}{ds}\frac{du}{dy}\right)=0.$$

Cette équation différentielle de la *courbe de plus vite descente sur la surface* $u=0$, diffère de celle de la ligne la plus courte, puisque celle-ci s'obtient en égalant à zéro la première parenthèse de cette équation. (Voir le numéro précédent.) Elle diffère aussi de l'équation de la *ligne de plus grande pente* (*) qui est représentée par la seconde parenthèse égalée à zéro. Enfin elle diffère de l'équation de la courbe que suivrait un point matériel pesant, glissant librement sur la surface

(*) On appelle ainsi la courbe tracée sur une surface donnée, qui jouit de cette propriété qu'en chaque point sa tangente est celle de toutes les tangentes en ce point, qui fait avec le plan des YZ supposé horizontal, le plus grand angle possible, angle qui mesure la *pente* de la courbe en chaque point. Si (α, β, γ) sont les angles formés avec les axes par la tangente à une des courbes tracées sur une surface et passant par le point $(x\,y\,z)$ et si q et q' désignent les dérivées partielles $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{dx}{dz}$ tirées de l'équation de la surface, on a vu (N° 110) qu'il existe entre α, β, γ les relations

$$\cos\alpha = q\cos\beta + q'\cos\gamma, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Le maximum de α répond à

$$q\cos\gamma = q'\cos\beta,$$

équation qui détermine la ligne de plus grande pente. $u=0$ étant l'équation de la surface, on sait que q et q' ou $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{dx}{dz}$ sont donnés par $-\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dx}}$ et $-\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{du}{dx}}$

et comme $\cos\gamma$ et $\cos\beta$ sont représentés par $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$, l'équation précédente se confond avec celle que nous avons indiquée plus haut.

(voir le traité de mécanique rationnelle N° 135), équation que l'on obtient en changeant le signe de la seconde parenthèse. On voit donc que ces quatre courbes tracées sur une même surface à partir d'un même point et terminées à un même plan horizontal, sont en général très distinctes, mais que si deux d'entre elles se confondent, elles se confondront toutes les quatre.

282. *Caractères distinctifs des maximum et des minimum.* — Pour compléter la théorie des maximum et minimum exposée dans les numéros précédents, il nous reste encore à chercher les caractères par lesquels on les distingue. A cet effet, remarquons que si dans $\int_{x'}^{x''} V dx$, on donne à $x, y, p, q\ldots$ qui entrent dans V, des accroissements finis ou infiniment petits quelconques désignés par $\delta x, \delta y, \delta p\ldots$, il résulte du théorème de Taylor généralisé, que cette intégrale prendra un accroissement représenté par

$$\int_{x'}^{x''} \left(\frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dp}\delta p\ldots\right) dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x'}^{x''} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\delta x^2 + 2\frac{d^2V}{dxdy}\delta x\delta y + 2\frac{d^2V}{dxdp}\delta x\delta p\cdots + \frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2\right) dx + \text{etc.}$$

Supposons que l'on ait attribué à $y, p, q\ldots$ les valeurs en x qui rendent maximum ou minimum l'intégrale proposée et que les accroissements $\delta x, \delta y, \delta p\ldots$ soient les variations de $x, y, p, q\ldots$; la première des intégrales précédentes sera nulle, puisqu'elle est visiblement la variation de $\int_{x'}^{x''} V dx$ et on reconnaît sans peine en se rappelant la théorie des maximum et minimum dans les fonctions de plusieurs variables, que si les termes de seconde puissance en $\delta x, \delta y\ldots$, c'est-à-dire, la seconde intégrale ci-dessus, conserve le même signe pour toutes les valeurs de $\delta x, \delta y\ldots$, il y aura maximum ou minimum suivant que ce signe sera négatif ou positif. Ces termes de seconde puissance en $\delta x, \delta y\ldots$ sont placés sous un signe d'intégration et comprennent toutes les valeurs de la fonction; ils sont donc en nombre infini et représentés par la somme de toutes les valeurs du polynôme depuis x' jusqu'à x''. De plus, cette somme de valeurs où l'intégrale sera positive ou négative suivant que le polynôme, qui

est un élément de l'intégrale, sera lui-même constamment positif ou constamment négatif pour toute valeur de δx, δy... et pour toute valeur des variables comprises entre x' et x''. Il suit de là que le maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée se distingue par le signe du polynôme ci-dessus, pourvu que ce signe reste le même pour toutes les valeurs de x comprises entre x' et x'' et pour toute valeur infiniment petite de δx, δy.....

Appliquons cette règle à un cas particulier et supposons que V ne contienne que x, y et p. Les termes du second ordre seront

$$\frac{d^2V}{dx^2}\delta x^2 + \frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2 + \frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2 + 2\frac{d^2V}{dxdy}\delta x\delta y$$

$$+ 2\frac{d^2V}{dxdp}\delta x\delta p + 2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p$$

que l'on peut encore réduire par la remarque que la variation δx de la variable indépendante étant entièrement arbitraire, on peut supposer δx nul. Dans ce cas ce polynôme devient

$$\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p + \frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2.$$

On a vu (N° 105) que pour que ce trinôme conserve le même signe pour toute valeur de δy et δp, il faut que $\frac{d^2V}{dy^2}$ et $\frac{d^2V}{dp^2}$ soient de même signe et que l'on ait

$$\frac{d^2V}{dy^2}\,\frac{d^2V}{dp^2} > \left(\frac{d^2V}{dydp}\right)^2.$$

Si ces deux conditions sont remplies pour toute valeur de x comprise entre x' et x'', le signe commun de $\frac{d^2V}{dy^2}$ et $\frac{d^2V}{dp^2}$ servira à distinguer le maximum du minimum. Il est bien entendu que pour comparer ces différentes dérivées et s'assurer que ces conditions sont remplies, il faudra faire usage de la relation entre x et y donnée par l'équation indéfinie ou par son intégrale.

CHAPITRE XX.

—

Application de la méthode des variations aux intégrales doubles. Variation d'une fonction de deux variables indépendantes. — Variation des dérivées partielles. — Variation d'une fonction contenant deux variables indépendantes, une variable dépendante et ses dérivées partielles. — Variation d'une intégrale définie double. — Maximum et minimum d'une intégrale définie double. — Équations aux limites. Problème de la moindre surface pour un contour donné. — Maximum et minimum relatifs.

283. *Application de la méthode des variations aux intégrales doubles. Variation d'une fonction de deux variables indépendantes.* — La marche suivie aux Nos 264 et suivants conduit à l'expression de la variation d'une intégrale définie double. Soit en effet

$$z = f(x, y),$$

x et y étant deux variables indépendantes. On peut toujours concevoir cette fonction développée suivant les puissances ascendantes entières et positives de x ou plutôt, de $x - \alpha$ et poser

$$z = a + b(x - \alpha) + c(x - \alpha)^2 + e(x - \alpha)^3 + \text{etc.}$$

$a, b, c, e....$ étant des fonctions de y dont la forme dépend de la forme de la fonction $f(x, y)$ et α une constante quelconque. Pour obtenir la variation de z ou de $f(x, y)$, il faut donner à x l'accroissement δx et donner aux coefficients $a, b, c....$ des accroissements représentés par leurs variations; on trouve ainsi

$$\delta z = \frac{dz}{dx}\delta x + \delta a + (x - \alpha)\delta b + (x - \alpha)^2\delta c + \cdots;$$

mais les variations des fonctions a, b, c et de leurs dérivées $\frac{da}{dy}$, $\frac{db}{dy}$,..... $\frac{d^2a}{dy^2}$ sont représentées par

$$\frac{da}{dy}\delta y + \omega, \quad \frac{db}{dy}\delta y + \omega', \quad \frac{dc}{dy}\delta y + \omega'', \ldots,$$

$$\frac{d^2a}{dy^2}\delta y + \frac{d\omega}{dy}, \quad \frac{d^2b}{dy^2}\delta y + \frac{d\omega'}{dy}, \ldots\ldots \frac{d^3a}{dy^3}\delta y + \frac{d^2\omega}{dy^2}, \ldots\ldots$$

ω, ω', ω'',.... étant les accroissements de ces coefficients provenant d'un changement dans la forme de ces fonctions (fin du N° 263); δz devient ainsi

$$\delta z = \frac{dz}{dx}\delta x + \left\{\frac{da}{dy} + (x-\alpha)\frac{db}{dy} + (x-\alpha)^2\frac{dc}{dy}\ldots\ldots\right\}\delta y$$
$$+ \omega + (x-\alpha)\omega' + (x-\alpha)^2\omega'' + \ldots\ldots$$

que l'on peut écrire de cette manière

$$\delta z = \frac{dz}{dx}\delta x + \frac{dz}{dy}\delta y + \Delta = p\delta x + p_{,}\delta y + \Delta,$$

en désignant par Δ la somme $\omega + (x-\alpha)\omega' + (x-\alpha)^2\omega''$..... c'est-à-dire la partie de la variation de $f(x, y)$ due à un changement de forme de cette fonction. Telle est l'expression de la variation d'une fonction indéterminée de deux variables indépendantes.

284. *Variation des dérivées partielles.* — Les variations de p et $p_{,}$ ou des trois dérivées du second ordre q, $q_{,}$, $q_{,,}$, etc., s'obtiennent en remarquant que l'on a

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dx} = b + 2c(x-\alpha) + 3e(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots$$

$$p_{,} \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{da}{dy} + (x-\alpha)\frac{db}{dy} + (x-\alpha)^2\frac{dc}{dy} + \ldots\ldots$$

$$q \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 2c + 2.3\,e(x-\alpha) + \ldots\ldots$$

$$q_{,} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{db}{dy} + 2(x-\alpha)\frac{dc}{dy} + \cdots,$$

. . . .

d'où l'on tire

$$\delta p = \frac{dp}{dx}\delta x + \delta b + 2(x-\alpha)\delta c + 3(x-\alpha)^2\delta e + \cdots\cdots$$

et en remplaçant δb, δc.... par leur valeur indiquée au numéro précédent,

$$\delta p = \frac{dp}{dx}\delta x + \frac{dp}{dy}\delta y + \omega' + 2(x-\alpha)\omega'' + 3(x-\alpha)^2\omega''' + \cdots\cdots$$

Comme on a posé

$$\Delta = \omega + (x-\alpha)\omega' + (x-\alpha)^2\omega'' \ldots,$$

il vient en dérivant par rapport à x et remarquant que ω, ω', ω''..... sont, par leur nature, indépendants de x,

$$\frac{d\Delta}{dx} = \omega' + 2(x-\alpha)\omega'' + 3(x-\alpha)^2\omega''' + \cdots\cdots$$

La variation de p devient ainsi

$$\delta p = \frac{dp}{dx}\delta x + \frac{dp}{dy}\delta y + \frac{d\Delta}{dx}\cdot$$

On trouve de même pour $\delta p_{,}$,

$$\delta p_{,} = \frac{dp_{,}}{dx}\delta x + \delta\frac{da}{dy} + (x-\alpha)\delta\frac{db}{dy} + (x-\alpha)^2\delta\frac{dc}{dy} + \cdots\cdots$$

et en remplaçant (N° 283) $\delta\frac{da}{dy}$, $\delta\frac{db}{dy}$ .... par $\frac{d^2a}{dy^2}\delta y + \frac{d\omega}{dy}$, $\frac{d^2b}{dy^2}\delta y + \frac{d\omega'}{dy}$, il vient

$$\delta p_{,} = \frac{dp_{,}}{dx}\delta x + \frac{dp_{,}}{dy}\delta y + \frac{d\omega}{dy} + (x-\alpha)\frac{d\omega'}{dy} + (x-\alpha)^2\frac{d\omega''}{dy} + \cdots\cdots$$

ou plutôt en tenant compte de la valeur de Δ,

$$\delta p_{,}=\frac{dp_{,}}{dx}\delta x+\frac{dp_{,}}{dy}\delta y+\frac{d\Delta}{dy}.$$

Une marche semblable conduit aux valeurs suivantes :

$$\delta q=\frac{dq}{dx}\delta x+\frac{dq}{dy}\delta y+\frac{d^2\Delta}{dx^2},$$

$$\delta q_{,}=\frac{dq_{,}}{dx}\delta x+\frac{dq_{,}}{dy}\delta y+\frac{d^2\Delta}{dxdy},$$

$$\delta q_{,,}=\frac{dq_{,,}}{dx}\delta x+\frac{dq_{,,}}{dy}\delta y+\frac{d^2\Delta}{dy^2}.$$

. . . .

Ces équations donnent aussi

$$\Delta=\delta z-p\delta x-p_{,}\delta y,$$

$$\frac{d\Delta}{dx}=\delta p-q\delta x-q_{,}\delta y,$$

$$\frac{d\Delta}{dy}=\delta p_{,}-q_{,}\delta x-q_{,,}\delta y,$$

$$\frac{d^2\Delta}{dx^2}=\delta q-r\delta x-r_{,}\delta y,$$

. . . .

285. *Variation d'une fonction contenant deux variables indépendantes, une variable dépendante et ses dérivées partielles.* — Représentons par $f(x, y, z, p, p_{,}, q, q_{,}, q_{,,}, r.....)$ une fonction de forme déterminée, contenant les deux variables indépendantes x et y, la variable dépendante z fonction indéterminée de (x, y) et les dérivées partielles $p, p_{,}, q, q_{,},....$ de cette fonction indéterminée. Puisque sa différentielle totale est

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz+\frac{df}{dp}dp+\frac{df}{dp_{,}}dp_{,}+\cdots,$$

il est visible que sa variation sera

$$\frac{df}{dx}\delta x+\frac{df}{dy}\delta y+\frac{df}{dz}\delta z+\frac{df}{dp}\delta p+\frac{df}{dp_{\prime}}\delta p_{\prime}+\ldots\ldots$$

et en remplaçant δz, δp, $\delta p_{\prime}$, δq,.... par leurs valeurs trouvées plus haut, cette variation devient

$$\left\{\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{df}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{df}{dp_{\prime}}\frac{dp_{\prime}}{dx}\cdots\right\}\delta x+\left\{\frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{df}{dp}\frac{dp}{dy}\cdots\right\}\delta y$$

$$+\frac{df}{dz}\Delta+\frac{df}{dp}\frac{d\Delta}{dx}+\frac{df}{dp_{\prime}}\frac{d\Delta}{dy}+\frac{df}{dq}\frac{d^2\Delta}{dx^2}+\frac{df}{dq_{\prime}}\frac{d^2\Delta}{dxdy}+\ldots\ldots$$

En remarquant que les deux parenthèses sont les dérivées totales, l'une par rapport à x et l'autre par rapport à y, de la fonction f, dérivées qu'il convient de désigner par $\frac{1}{dx}df$ et $\frac{1}{dy}df$, cette variation prend la forme

$$\frac{\delta x}{dx}df+\frac{\delta y}{dy}df+\frac{df}{dz}\Delta+\frac{df}{dp}\frac{d\Delta}{dx}+\frac{df}{dp_{\prime}}\frac{d\Delta}{dy}+\frac{df}{dq}\frac{d^2\Delta}{dx^2}+\ldots\ldots$$

Des intégrations successives par parties transforment les termes contenant les dérivées partielles de Δ, comme il suit, en continuant à représenter par $\frac{1}{dx}df$, $\frac{1}{dxdy}d^2f$,.... la dérivée de f par rapport à x, la dérivée seconde de f par rapport à x et par rapport à y, etc.,

$$\frac{df}{dp}\frac{d\Delta}{dx}=\frac{1}{dx}d\left(\frac{df}{dp}\Delta\right)-\frac{\Delta}{dx}d\left(\frac{df}{dp}\right),$$

$$\frac{df}{dp_{\prime}}\frac{d\Delta}{dy}=\frac{1}{dy}d\left(\frac{df}{dp_{\prime}}\Delta\right)-\frac{\Delta}{dy}d\left(\frac{df}{dp_{\prime}}\right),$$

$$\frac{df}{dq}\frac{d^2\Delta}{dx^2}=\frac{1}{dx}d\left(\frac{df}{dq}\frac{d\Delta}{dx}\right)-\frac{d\Delta}{dx}\frac{1}{dx}d\left(\frac{df}{dq}\right),$$

$$=\frac{1}{dx}d\left(\frac{df}{dq}\frac{d\Delta}{dx}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{\Delta}{dx}d\frac{df}{dq}\right)+\frac{\Delta}{dx^2}d^2\left(\frac{df}{dq}\right),$$

$$\frac{df}{dq_{,}}\frac{d^2\Delta}{dxdy}=\frac{1}{dx}d\left(\frac{df}{dq_{,}}\frac{d\Delta}{dy}\right)-\frac{d\Delta}{dy}\frac{1}{dx}d\left(\frac{df}{dq_{,}}\right)$$

$$=\frac{1}{dxdy}d^2\left(\Delta\frac{df}{dq_{,}}\right)-\frac{1}{dy}d\left(\frac{\Delta}{dx}d\frac{df}{dq_{,}}\right)+\frac{1}{dx}d\left(\frac{\Delta}{dy}d\frac{df}{dq_{,}}\right)-\frac{\Delta}{dxdy}d^2\left(\frac{df}{dq_{,}}\right),$$

$$\frac{df}{dq_{,,}}\frac{d^2\Delta}{dy^2}=\frac{1}{dy}d\left(\frac{df}{dq_{,,}}\frac{d\Delta}{dy}\right)-\frac{1}{dy}d\left(\frac{\Delta}{dy}d\frac{df}{dq_{,,}}\right)+\frac{\Delta}{dy^2}d^2\left(\frac{df}{dq_{,,}}\right),$$

$$\frac{df}{dr}\frac{d^3\Delta}{dx^3}=\text{etc.}\quad\frac{df}{dr_{,}}\frac{d^3\Delta}{dx^2dy}=\text{etc.}$$

En substituant, la variation de $f(x, y, z, p, p_{,}, q\ldots..)$ devient enfin

$$\frac{\delta x}{dx}df+\frac{\delta y}{dy}df+\Delta\left\{\frac{df}{dz}-\frac{1}{dx}d\left(\frac{df}{dp}\right)-\frac{1}{dy}d\left(\frac{df}{dp_{,}}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{df}{dq}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{dxdy}d^2\left(\frac{df}{dq_{,}}\right)+\frac{1}{dy^2}d^2\left(\frac{df}{dq_{,,}}\right)-\frac{1}{dx^3}d^3\left(\frac{df}{dr}\right)\ldots..\right\}$$

$$+\frac{1}{dx}d\left[\begin{array}{l}\Delta\left\{\frac{df}{dp}-\frac{1}{dx}d\frac{df}{dq}-\frac{1}{dy}d\frac{df}{dq_{,}}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{dr}+\ldots..\right\}\\+\frac{d\Delta}{dx}\left\{\frac{df}{dq}-\frac{1}{dx}d\frac{df}{dr}-\frac{1}{dy}d\frac{df}{dr_{,}}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{ds}\ldots..\right\}\\+\frac{d^2\Delta}{dx^2}\left\{\frac{df}{dr}-\frac{1}{dx}d\frac{df}{ds}-\frac{1}{dy}\frac{df}{ds_{,}}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{dt}\ldots...\right\}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right]$$

$$+\frac{1}{dy}d\left[\begin{array}{l}\Delta\left\{\frac{df}{dp_{,}}-\frac{1}{dx}d\frac{df}{dq_{,}}-\frac{1}{dy}d\frac{df}{dq_{,,}}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{dr_{,}}+\ldots..\right\}\\+\frac{d\Delta}{dy}\left\{\frac{df}{dq_{,,}}-\frac{1}{dx}d\frac{df}{dr_{,,}}-\frac{1}{dy}d\frac{df}{dr_{,,,}}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{ds_{,,}}+\ldots..\right\}\\+\frac{d^2\Delta}{dy^2}\left\{\frac{df}{dr_{,,,}}-\frac{1}{dx}d\frac{df}{ds_{\text{IV}}}-\frac{1}{dy}d\frac{df}{ds_{\text{V}}}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{dt_{,,,}}+\ldots\right\}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right]$$

$$+\frac{1}{dxdy}d^2\left[\begin{array}{l}\Delta\left\{\frac{df}{dq_{,}}-\frac{1}{dx}d\frac{df}{dr_{,}}-\frac{1}{dy}d\frac{df}{dr_{,,}}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{ds_{,}}+\dots\right\}\\ +\frac{d\Delta}{dx}\left\{\frac{df}{dr_{,}}-\frac{1}{dx}d\frac{df}{ds_{,}}-\frac{1}{dy}d\frac{df}{ds_{,,}}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{dt_{,}}+\dots\right\}\\ +\frac{d\Delta}{dy}\left\{\frac{df}{dr_{,,}}-\frac{1}{dx}d\frac{df}{ds_{,,}}-\frac{1}{dy}d\frac{df}{ds_{,,,}}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{dt_{,,}}+\dots\right\}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right]$$

286. *Variation d'une intégrale définie double.* — Proposons-nous enfin de trouver la variation d'une intégrale définie double $\int\int f(x, y, z, p, p_{,}, q\dots\dots)\,dxdy$ prise entre les limites x', x'' et y', y'' fixes ou variables. Cette variation est visiblement

$$\int\int(f+\delta f)\,d(x+\delta x)\,d(y+\delta y)-\int\int f\,dxdy$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$\int\int(f+\delta f)\left(dx+\frac{d\delta x}{dx}dx\right)\left(dy+\frac{d\delta y}{dy}dy\right)-\int\int f dxdy.$$

$\frac{d\delta x}{dx}$ et $\frac{d\delta y}{dy}$ sont les dérivées partielles de δx et de δy, car dans l'intégrale double donnée, dx et dy étant les différentielles de x et de y, en supposant respectivement y et x constants, il en doit être de même de $d(x+\delta x)$ et de $d(y+\delta y)$ et par conséquent, de $d\delta x$ et $d\delta y$. En effectuant les multiplications et négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs, cette variation se réduit à

$$\int\int\left\{\delta f dxdy + f.(dxd\delta y + dyd\delta x)\right\}.$$

Si l'on remplace δf par sa valeur trouvée au numéro précédent et mise sous la forme

$$\frac{\delta x}{dx}df+\frac{\delta y}{dy}df+\Delta.u+\frac{1}{dx}dU+\frac{1}{dy}dV+\frac{1}{dxdy}d^2W,$$

en remarquant que l'on a

$$\frac{1}{dx}d(f\delta x)=f\frac{d\delta x}{dx}+\delta x\frac{1}{dx}df,\quad \frac{1}{dy}d(f\delta y)=f\frac{d\delta y}{dy}+\delta y\frac{1}{dy}df,$$

la variation devient

$$\iint \frac{1}{dx} d(f\partial x) dx dy + \iint \frac{1}{dy} d(f\partial y) dx dy + \iint \Delta . u dx dy$$

$$+ \iint \frac{1}{dx} dU dx dy + \iint \frac{1}{dy} dV dx dy + \iint \frac{1}{dx dy} d^2 W dx dy.$$

Comme dx et dy sont indépendants, la première différentielle et la quatrième s'intègrent immédiatement par rapport à x, y restant quelconque, la seconde et la cinquième par rapport à y et la sixième qui est la différentielle totale de W, a pour intégrale W; cette expression de la variation peut donc se mettre sous la forme

$$\int f\partial x . dy + \int f\partial y . dx + \iint \Delta . u dx dy$$

$$+ \int U dy + \int V dx + W.$$

Pour fixer les limites de ces intégrations, nous supposerons que l'intégrale définie double doive s'étendre à tous les éléments d'une surface ABCD (fig. 46) limitée par une courbe connue ou inconnue ABCD et ayant EFGH pour projection XY. Si l'on désigne par y' et y'' les ordonnées extrêmes pq et pr répondant à une abscisse quelconque Op, l'intégrale par rapport à y, x restant quelconque, devra être prise depuis y' jusqu'à y'' ou dans toute l'étendue de qr et pour embrasser la surface entière, la seconde intégration par rapport à x devra s'étendre depuis le point F de la courbe le plus rapproché de l'axe Y, jusqu'au point H le plus éloigné, ou depuis X' jusqu'à X''.

Lorsque la première intégration se fait par rapport à x et la seconde, par rapport à y, les premières limites seront x', x'' et les secondes, Y', Y''. La variation de l'intégrale double devient ainsi, en désignant par $f'\partial x$, $f''\partial x''$, U', U''..... ce que deviennent $f\partial x$, U..... quand on remplace x par x' et x'', et par V_i', V_i'', $f_i'\partial y'$ etc., les valeurs extrêmes de $V, f\partial y$, etc.,

$$[W] + \int_{Y'}^{Y''} [U'' - U' + f''\partial x'' - f'\partial x'] dy$$

$$+ \int_{X'}^{X''} [V_i'' - V_i' + f_i''\partial y'' - f_i'\partial y'] dx + \iint \Delta . u dx dy,$$

que nous écrirons de cette manière

$$[W] + \int_{Y'}^{Y''} \Big[U + f\delta x \Big]_{x'}^{x''} dy + \int_{X'}^{X''} \Big[V + f\delta y \Big]_{y'}^{y''} dx + \int\!\!\int \Delta . u dx dy.$$

La valeur de $[W]$ s'obtient en remarquant que l'intégrale par rapport à x, de $\frac{1}{dxdy} d^2W.dxdy$ est $\frac{1}{dx} dW.dy$; l'intégrale définie est donc $\frac{1}{dy} dW''dy - \frac{1}{dy} dW'dy$, en désignant par W'' et W' ce que devient W quand on y remplace x par x'' et x' ou par leur valeur en y. Les intégrales par rapport à y, de ces deux termes, sont de même $W'' - W'$ et l'intégrale définie de chacun d'eux prend la forme $W_{\prime\prime}'' - W_{\prime}''$ et $W_{\prime\prime}' - W_{\prime}'$, $W_{\prime\prime}''$ désignant ce que devient W'' quand on y remplace y par Y'', etc.; on a donc

$$[W] = W_{\prime\prime}'' - W_{\prime}'' - W_{\prime\prime}' - W_{\prime}'.$$

287. *Maximum et minimum d'une intégrale définie double.* — En reprenant les raisonnements du N° 270, on reconnaît sans peine que pour rendre maximum ou minimum la valeur d'une intégrale définie double $\int\!\!\int f dx dy$ dans laquelle f contient une variable z fonction indéterminée de x et de y ainsi que ses dérivées partielles, il faut égaler à zéro la variation de l'intégrale. La condition du maximum ou du minimum est donc

$$W_{\prime\prime}'' - W_{\prime}'' - W_{\prime\prime}' + W_{\prime}'$$

$$+ \int_{Y'}^{Y''} \left[\Delta \left\{ \frac{df}{dp} - \cdots \right\} + \frac{d\Delta}{dx} \left\{ \frac{df}{dq} - \cdots \right\} + \frac{d^2\Delta}{dx^2} \left\{ \frac{df}{dr} - \cdots \right\} + \cdots + f\delta x \right]_{x'}^{x''} dy$$

$$+ \int_{X'}^{X''} \left[\Delta \left\{ \frac{df}{dp_{\prime}} - \cdots \right\} + \frac{d\Delta}{dy} \left\{ \frac{df}{dq_{\prime\prime}} - \cdots \right\} + \frac{d^2\Delta}{dy^2} \left\{ \frac{df}{dr_{\prime\prime\prime}} - \cdots \right\} + \cdots + f\delta y \right]_{y'}^{y''} dx$$

$$+ \int\!\!\int \Delta \left\{ \frac{df}{dz} - \frac{1}{dx} d \frac{df}{dp} - \frac{1}{dy} d \frac{df}{dp_{\prime}} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{df}{dq} + \cdots \right\} dx dy = 0.$$

Si dans cette équation on remplace les Δ et ses dérivées par leur valeur de la fin du N° 284, elle contiendra les variations δx, δy, δz, δp... sous trois formes essentiellement différentes. Dans la première ligne,

les variations contenues dans les W ne se rapportent qu'à certaines valeurs déterminées X', Y', X'', Y'' de x et de y. Dans l'intégrale suivante, les variations ne se rapportent qu'aux valeurs extrêmes x' et x'' de x, l'y restant quelconque et dans la seconde intégrale les variations se rapportent aux valeurs extrêmes y' et y'' de y, x restant arbitraire. Enfin dans l'intégrale double, le Δ correspond à toutes les valeurs de x et de y dans la surface ABCD. Il suit de là que l'on doit avoir séparément

$$W_{\prime\prime}'' - W_{\prime}'' - W_{\prime\prime}' + W_{\prime}' = 0,$$

$$\int_{Y'}^{Y''}\Big[\;\Big]_{x'}^{x''} dy + \int_{X'}^{X''}\Big[\;\Big]_{y'}^{y''} dx = 0,$$

$$\iint \Delta\left\{\frac{df}{dz} - \frac{1}{dx}d\frac{df}{dp} - \ldots\ldots\right\} dxdy = 0.$$

L'intégrale double de la troisième équation représente une somme de valeurs multipliées respectivement par un facteur indéterminé Δ. Cette somme ne peut être nulle sans que l'on ait pour chaque valeur de x et de y,

$$\frac{df}{dz} - \frac{1}{dx}d\frac{df}{dp} - \frac{1}{dy}d\frac{df}{dp_{\prime}} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{df}{dq} + \frac{1}{dxdy}d^2\frac{df}{dq_{\prime}}$$

$$+ \frac{1}{dy^2}d^2\frac{df}{dq_{\prime\prime}} - \ldots\ldots = 0.$$

Telle est l'équation indéfinie qui fait connaître la relation cherchée entre z, x, y.

288. *Équation aux limites. Problème de la moindre surface pour un contour donné.* — Pour interpréter la première des deux autres équations, que l'on appelle, comme dans la première partie du calcul des variations, *équation aux limites*, nous ferons une hypothèse sur la nature du problème à résoudre et nous supposerons qu'il s'agisse de trouver l'équation d'une surface remplissant certaines conditions et jouissant d'une propriété de maximum ou de minimum relative à sa surface ou à un volume, la surface ayant pour limite une courbe fermée ABCD (fig. 46) représentée par les deux équations

$$z = \varphi x, \quad y = \psi x.$$

Comme la quantité $W_{,,}'' - W_{,}'' - W_{,,}' + W_{,}'$ est le résultat d'une double intégration par rapport à x et à y, étendue à tous les points de la surface, il est clair que si EFGH (fig. 46) est la projection du contour de la surface dans le plan des XY et ayant pour équation $y = \psi x$, l'intégrale par rapport à y devra être prise depuis $y' = pq$ jusqu'à $y'' = pr$, y' et y'' étant deux valeurs de y correspondant à un même $x = Op$, tirées de l'équation $y = \psi x$; puis l'intégrale par rapport à $x = Op$ devra se prendre depuis $X' = OL$ jusqu'à $X'' = OK$, X' et X'' répondant aux points F et H de la projection EFGH les plus rapprochés et les plus éloignés de l'axe des Y. Or, si cette projection est une courbe fermée continue, il est visible que pour $X' = OL$, les deux valeurs de y' et y'' se réduisent à LF, pour $X'' = OK$, y' et y'' deviennent KH et les valeurs extrêmes des dérivées $p, p_{,}, q, q_{,}$..... se confondront *en général*. Il suit de là que la quantité $W_{,,}'' - W_{,}'' - W_{,,}' + W_{,}'$ est nulle d'elle-même et ne donne lieu à aucune équation de condition, puisque $W_{,,}''$ et $W_{,}''$ s'obtiennent l'un en remplaçant dans W, x par $X'' = OK$, y par $y'' = KH$, et l'autre en faisant $x = X' = OK$ et $y' = KH$ et que par conséquent $W_{,,}''$ et $W_{,}''$ sont identiques. Il en est de même de $W_{,,}'$ et $W_{,}'$.

Les choses se passeraient autrement si la projection A'B'D'C' du contour ABDC (fig. 40), au lieu d'être une courbe fermée continue, était limitée par des parallèles A'B' et C'D' à l'axe des Y (fig. 40). (Pour que la fig. 40 qui a déjà servi à un autre usage, puisse être employée à cette démonstration, il convient d'y supprimer l'axe Y et de remplacer Y' par Y). Alors en remplaçant x par $X' = OF$, y' et y'' ne prennent plus la même valeur, mais deviennent FA' et FB'. Quand x est égalé à $X'' = OG$, y' et y'' deviennent GC' et GD'; la quantité $W_{,,}'' - W_{,}'' - W_{,,}' + W_{,}'$ n'est donc plus nulle d'elle-même et son égalité à zéro formera une véritable équation de condition. Or, si dans W qui contient $\Delta, \frac{d\Delta}{dx} \cdots\cdots$, on remplace ces quantités par leur valeur de la fin du N° 280, en remarquant que l'on a

$$\delta z'' = \varphi' x'' \delta x'', \quad \delta z' = \psi' x' \delta x', \quad \delta y'' = F' x'' \delta x'', \quad \delta y' = f' x' \delta x'$$

à cause des équations

$$z = \varphi x \quad \text{et} \quad y = Fx,$$

$$z = \psi x \quad \text{et} \quad y = fx,$$

des deux branches AC et BD, l'équation

$$W_{,,}'' - W_{,}'' - W_{,,}' + W_{,}' = 0$$

contiendra des termes multipliés par $\delta x'$, d'autres multipliés par $\delta x''$, par $\delta p'$, par $\delta p''$, par $\delta p_{,}'$..... Comme les valeurs de X′ et de X″ sont constantes, les deux premières variations disparaissent d'elles-mêmes; mais $\delta p'$, $\delta p''$.... étant arbitraires, les coefficients doivent être égalés à zéro, ce qui donne lieu à un certain nombre d'équations aux limites, qui ne concernent que les points A′, B′, C′, D′.

Si les deux points A′, B′ coïncidaient, ainsi que C′ et D′, sans qu'il y eut continuité aux points A′ et C′ entre les deux branches A′C′ et B′D′, les ordonnées extrêmes y' et y'' coïncideraient encore, mais il est visible que les dérivées partielles p, $p_{,}$, q..... prises dans les deux branches ne se confondraient pas et que par conséquent il y aurait encore en général des équations aux limites.

Passons à l'interprétation de la seconde équation aux limites du numéro précédent. Il est visible que les deux intégrales qui y entrent ont toutes deux pour effet d'étendre au contour ABCD (fig. 46) ou $\psi(x, y) = 0$, tout entier, les différentielles dont se composent ces intégrales. Cette remarque, qui fait donner à cette équation le nom d'*équation au contour*, permet de réunir les deux intégrales en une seule; car si l'on désigne par ds l'élément de cette courbe, croissant dans l'ordre FGHEF, comme on a

$$dy = -\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}}dx, \quad ds = dx\frac{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}}{\frac{d\psi}{dy}},$$

il vient aussi

$$dx = \frac{\frac{d\psi}{dy}ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}}, \quad dy = -\frac{\frac{d\psi}{dx}ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}}$$

et si l'on remplace dx et dy par ces valeurs, l'*équation au contour*

devient

$$\int_{X'}^{X''}\Big[\;\Big]_{y'}^{y''}\frac{\frac{d\psi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}}ds-\int_{Y'}^{Y''}\Big[\;\Big]_{x'}^{x''}\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}}ds=0,$$

ou bien, en désignant par $M''-M'$ et $N''-N'$, les coefficients de ds sous les deux signes d'intégration,

$$\int_{X'}^{X''}M''ds-\int_{X'}^{X''}M'ds-\int_{Y'}^{Y''}N''ds+\int_{Y'}^{Y''}N'ds=0$$

qu'on peut écrire de cette manière

$$\int_{X'}^{X''}M''ds+\int_{X''}^{X'}M'ds+\int_{Y''}^{Y'}N''ds+\int_{Y'}^{Y''}N'ds=0.$$

Il est à remarquer que la première intégrale concerne la branche de courbe FGH la plus éloignée de l'axe X, puisque dans M'' les y sont remplacés par y'' ou pr. Pour le même motif la seconde intégrale concerne la branche HEF, la troisième, la branche GHE et la quatrième, la branche EFH. La première intégrale est donc étendue à tous les points de la courbe FGH depuis X′ jusqu'à X″ ou depuis F jusqu'à H, la seconde, à la courbe HEF, depuis X″ jusqu'à X′, ou depuis H jusqu'à F; la somme de ces deux intégrales représente donc une intégrale unique de Mds prise sur toute l'étendue du contour FGHEF, c'est-à-dire $\int_0^l Mds$, en désignant par l la longueur totale de la courbe dont ds est l'élément. Par le même raisonnement, on reconnait que la somme des deux autres intégrales tient lieu de $\int_0^l Nds$ et l'équation au contour prend la forme suivante

$$\int_0^l\left(\Big[\;\Big]_{y'}^{y''}\frac{d\psi}{dy}+\Big[\;\Big]_{x'}^{x''}\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}}=0$$

ou simplement, en convenant de n'étendre l'intégrale qu'au contour,

$$\int_0^l \left([\;] \frac{d\psi}{dy} + [\;] \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}} = 0$$

dans laquelle l est la longueur totale de la courbe EFGHE, comptée depuis un point pris arbitrairement.

Après avoir remplacé Δ et ses dérivées, par les valeurs du N° 280, en remarquant que les coordonnées appartenant à des points situés sur la courbe limite, on doit avoir à cause des équations de cette courbe

$$\delta z = \varphi' x \delta x, \quad \delta y = -\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}} \delta x,$$

la différentielle placée sous le signe d'intégration ne se composera plus que de termes multipliés par δx, par δp, par $\delta p_{,}$..... et comme ces dernières variations sont arbitraires, les coefficients devront être égalés à zéro, ce qui donnera lieu à des équations de condition lesquelles devront subsister pour tous les points du contour et donneront des valeurs de p, $p_{,}$, q..... qui doivent s'accorder avec celles fournies par l'intégrale de l'équation indéfinie aux dérivées partielles. On est ainsi conduit à des identités au moyen desquelles on détermine la forme des fonctions arbitraires que cette intégrale doit contenir.

Si la fonction f ne contient que les dérivées p et $p_{,}$ du premier ordre, l'équation indéfinie aux dérivées partielles se réduit à

$$\frac{df}{dz} - \frac{1}{dx} d \frac{df}{dp} - \frac{1}{dy} d \frac{df}{dp_{,}} = 0,$$

et l'intégrale qui concerne le contour devient

$$\int_0^l \left(\left[\Delta \frac{df}{dp_{,}} + f \delta y \right] \frac{d\psi}{dy} + \left[\Delta \frac{df}{dp} + f \delta x \right] \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}} = 0$$

ou bien

$$\int_0^l \left[\Delta\left(\frac{df}{dp}\frac{d\psi}{dx} + \frac{df}{dp_,}\frac{d\psi}{dy}\right) + f\left(\frac{d\psi}{dx}\delta x + \frac{d\psi}{dy}\delta y\right)\right] \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}} = 0.$$

Le coefficient de f est nul à cause de la valeur de la variation de $\psi(x, y) = 0$ et comme Δ est la partie de l'accroissement de z due à un changement de forme de la surface, ce coefficient ici est nul puisque le contour donné et invariable ne prend pas part à ce changement de forme. Il n'y a donc aucune équation aux limites.

Il n'en serait plus de même si la surface, au lieu d'être limitée par une courbe donnée et invariable, était seulement assujettie à se terminer dans un cylindre ayant pour base la courbe $\psi(x, y) = 0$, comme cela a lieu pour un problème de cette nature : *quelle est parmi les surfaces jouissant de certaines propriétés et ayant même projection dans le plan* XY, *celle qui a la moindre étendue?* Dans ce cas le z du contour est indéterminé, Δ n'est plus nul et l'on a l'équation de condition

$$\frac{df}{dp_,}\frac{d\psi}{dy} + \frac{df}{dp}\frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Ainsi, si l'on demande quelle est parmi toutes les surfaces ayant même contour celle qui a la moindre étendue, il faut visiblement rendre minimum l'intégrale double $\iint\sqrt{1 + p^2 + p_,^2}\,dxdy$ et l'on trouve pour équation indéfinie de la surface,

$$(1 + p^2)q_{,,} - 2pp_,q_, + (1 + p_,^2)q = 0.$$

Il n'y a ici aucune équation aux limites et les fonctions arbitraires de l'intégrale se déterminent par la condition que la surface doit contenir la courbe limite donnée; mais si l'on demande la surface minimum qui recouvre un cylindre ayant pour base la courbe $\psi(x, y) = 0$, on sera encore conduit à l'équation indéfinie précédente et en outre, à l'équation *au contour*

$$p\frac{d\psi}{dx} + p_,\frac{d\psi}{dy} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{d\psi}{dy} = 0.$$

Sans effectuer l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de la surface, on reconnaît que celle-ci est satisfaite, ainsi que l'équation au contour, en posant $z =$ const., puisque $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}\ldots$ ou $p, q\ldots$ sont alors nuls. La surface dans ce cas particulier est donc un plan parallèle à la base.

Il est à remarquer que l'*équation au contour* exprime que la surface minimum ou maximum est en tous les points de son contour, normale au cylindre limite, ce que l'on prouve en cherchant le cosinus de l'angle formé par les normales élevées en un même point à la surface minimum et au cylindre.

Si la surface cherchée, au lieu d'avoir pour contour une courbe donnée ou d'être limitée par un cylindre, était assujettie à la condition d'avoir son contour placé dans une surface donnée $z = \varphi(x, y)$, comme cette dernière équation différenciée successivement avec le signe d et avec le signe δ conduit aux suivantes

$$dz = \pi dx + \pi_1 dy, \quad \delta z = \pi\delta x + \pi_1 \delta y,$$

et qu'on a pour la surface cherchée et pour la projection indéterminée de son contour, les relations

$$dz = p dx + p_1 dy, \quad \frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy = 0,$$

il en résulte pour Δ la valeur suivante :

$$\Delta = \delta z - p\delta x - p_1 \delta y = (\pi - p)\,\delta x + (\pi_1 - p_1)\,\delta y$$

$$= (\pi - p)\left(\delta x - \frac{dx}{dy}\delta y\right) = (\pi - p)\left(\frac{\frac{d\psi}{dx}\delta x + \frac{d\psi}{dy}\delta y}{\frac{d\psi}{dx}}\right)$$

dans laquelle $\frac{d\psi}{dx}\delta x + \frac{d\psi}{dy}\delta y$ n'est plus nul, puisque, en faisant varier la position du contour sur la surface donnée, sa projection dans le plan XY change de forme et que par conséquent la fonction ψ ne reste pas invariable. En remplaçant Δ par sa valeur, l'*équation au*

contour devient

$$\int_0^l \left\{ (\pi - p) \left(\frac{\frac{d\psi}{dx}\delta x + \frac{d\psi}{dy}\delta y}{\frac{d\psi}{dx}} \right) \left(\frac{df}{dp}\frac{d\psi}{dx} + \frac{df}{dp_{,}}\frac{d\psi}{dy} \right) + f\left(\frac{d\psi}{dx}\delta x + \frac{d\psi}{dy}\delta y \right) \right\} \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}} = 0,$$

ou bien

$$\int_0^l \left\{ (\pi - p) \left(\frac{df}{dp} + \frac{df}{dp_{,}} \frac{\frac{d\psi}{dy}}{\frac{d\psi}{dx}} \right) + f \right\} \times \left(\frac{d\psi}{dx}\delta x + \frac{d\psi}{dy}\delta y \right) \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}} = 0,$$

qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$\int_0^l \left[(\pi - p)\frac{df}{dp} + (\pi_{,} - p_{,})\frac{df}{dp_{,}} + f \right] \left(\frac{d\psi}{dx}\delta x + \frac{d\psi}{dy}\delta y \right) \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}} = 0.$$

Si l'on égale à zéro le coefficient des variations arbitraires δx et δy, il vient pour équation au contour

$$(\pi - p)\frac{df}{dp} + (\pi_{,} - p_{,})\frac{df}{dp_{,}} + f = 0.$$

Ainsi, si l'on demande la surface minimum dont le contour soit tracé sur une surface donnée, on remplacera f par $\sqrt{1 + p^2 + p_{,}^2}$ et le contour sera assujetti à la condition

$$(\pi - p)p + (\pi_{,} - p_{,})p_{,} + 1 + p^2 + p_{,}^2 = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + p\pi + p_{,}\pi_{,} = 0.$$

Cette équation exprime visiblement que la surface minimum est partout normale à la surface donnée.

289. *Maximum ou minimum relatifs.* — Si les variables qui entrent dans l'intégrale double qu'on se propose de rendre maximum ou minimum devaient en même temps satisfaire à une certaine équation exprimant qu'une seconde intégrale double prise entre les mêmes limites que la première, est égale à une constante, le maximum ne serait plus alors qu'un *maximum relatif*. Il est visible que la seconde intégrale étant constante, sa variation sera nulle comme celle de la première et il faudra, comme au N° 275, se servir de cette équation pour éliminer l'une ou l'autre des variations arbitraires; mais ici comme au N° 275, on peut arriver au même résultat d'une manière plus générale et plus analytique, en égalant à zéro la somme des deux variations totales, après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur indéterminé, et en rendant nul le coefficient de chaque variation restante, résultats auxquels on est visiblement conduit en réunissant les deux intégrales doubles $\iint V dxdy$ et $\iint U dxdy$ après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur constant indéterminé a et en égalant à zéro la variation de $\iint (V + aU)\, dxdy$. Ainsi si l'on demande quelle est parmi toutes les surfaces renfermant le même volume, et ayant le même contour, celle qui a la moindre étendue, l'intégrale $\iint \sqrt{1 + p^2 + p_{,}^2}\, dxdy$ devra encore être minimum, mais en même temps l'intégrale $\iint z dxdy$ devra être constante; il faudra donc égaler à zéro la variation de $\iint (z + a\sqrt{1 + p^2 + p_{,}^2})\, dxdy$. On trouve ainsi pour équation dérivée indéfinie de la surface,

$$\frac{1}{a}(1 + p^2 + p_{,}^2)^{\frac{3}{2}} = (1 + p^2) q_{,,} - 2pp_{,}q_{,} + (1 + p_{,}^2) q.$$

Elle est satisfaite, comme on peut s'en assurer par la substitution, en prenant pour intégrale

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2,$$

pourvu que l'on fasse $r = -2a$. La surface est par conséquent celle d'une sphère; mais comme les constantes α, β, γ se déterminent en assujettissant celle-ci à passer par la courbe de contour, on voit qu'une solution aussi simple n'est possible que si le contour donné peut se trouver sur une sphère. Dans le cas contraire, il faudra faire usage de l'intégrale la plus générale et déterminer les fonctions arbitraires de manière à rendre possible cette coïncidence. Quand la courbe de contour n'est pas fixée, mais est seulement assujettie à se

trouver sur un cylindre donné par l'équation de sa base $\psi(x, y) = 0$, alors Δ est arbitraire et il y a une équation au contour

$$p\frac{d\psi}{dx} + p_{,}\frac{d\psi}{dy} = 0$$

qui exprime encore que la surface minimum est dans chacun de ses points normale au cylindre. Cette dernière équation et l'équation aux dérivées partielles deviennent identiques en supposant $z =$ const. pourvu que $\frac{1}{a}$ soit égal à zéro, c'est-à-dire, pourvu que r soit infini. Il suit de là que la moindre surface par laquelle on limite un cylindre de volume donné est un plan parallèle à la base. Enfin si la surface minimum devait se terminer dans une surface donnée, on reconnaîtrait, comme à la fin du numéro précédent, que le contour doit satisfaire à la condition

$$1 + p\pi + p_{,}\pi_{,} + \frac{1}{a}z\sqrt{1 + p^2 + p_{,}^2} = 0.$$

On trouve de même que parmi toutes les surfaces de même contour et de même étendue, celle qui a son centre de gravité le plus bas, (l'axe des Z est ici vertical) est donnée par l'équation

$$(1 + p^2 + p_{,}^2)^2 = \left(z + \frac{1}{a}\right)\left\{(1 + p^2)q_{,,} - rpp_{,}q_{,} + (1 + p_{,}^2)q\right\}.$$

Enfin, on démontre sans peine que parmi tous les cylindres de même base et de même volume, celui-là a son centre de gravité le plus bas, qui a pour base supérieure une surface plane horizontale.

FIN.



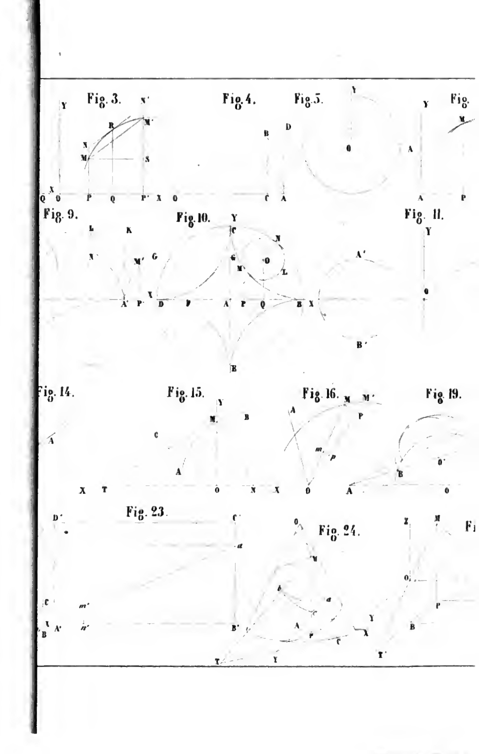
TABLE DES MATIÈRES.

N. B. Une Table détaillée se trouve en tête de chaque chapitre.

ERRATA.

—

Page.	Ligne.	Lisez :
98	16	inférieur à $2m$, *au lieu de* inférieur ou égal à $2m$.
126	25	y et β en $-y$ et $-\beta$.
174	2	(N° 86) *au lieu de* (N° 87).
178	15	$\left(\frac{ds}{dt}\right)^6$ *au lieu de* $\left(\frac{ds}{dt}\right)^9$.
212	7	$\frac{a^2-b^2}{ba^2}$, $\frac{c^2-b^2}{bc^2}$.
376	3	$Ne^{\int Pdx}dx$ *au lieu de* Ndx.
397	15	$-\frac{y'^2}{mx'^2}$ *au lieu de* $-y'^2$.
468	8	leurs *au lieu de* ses.


Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 19.
Fig. 23.
Fig. 24.



